электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель Общероссийская общественная организация "Академия инженерных наук им. А.М. Прохорова"
ISSN 2307-0609

03, сентябрь 2022

УДК 531.53:004.942

Анализ нелинейных колебаний математического маятника с использованием пакета Mathematica

Илларионов А.И., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана (НИУ),
кафедра «Электронные технологии в машиностроении»
illarionovai@student.bmstu.ru

Научный руководитель: Калиниченко В.А., д.ф.-м.н., профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана (НИУ),
кафедра «Теоретическая механика»
vakalin@mail.ru

Аннотация: Разработан пакет программ для анализа собственных нелинейных колебаний математического маятника в консервативном случае и с вязким трением. Выявлена определяющая роль начальных условий на различные режимы движения. Для каждого режима в графическом виде представлены фазовые кривые, а также зависимости угла отклонения и угловой скорости от времени. Показана неизохронность нелинейных колебаний маятника.

Ключевые слова: нелинейные колебания, математический маятник, динамика, фазовая плоскость, виды движения, большая амплитуда колебаний, компьютерное моделирование.

Введение

Появление и широкое распространение компьютеров во второй половине XX века привели к революционным изменениям, затронувшим содержание и методический инструментарий теории нелинейных колебаний. Для решения задач, требовавших утонченного и кропотливого математического исследования или же остававшихся вовсе недоступными, в настоящее время используются методы численного моделирования с наглядным и быстрым представлением результатов посредством компьютерной графики. Содержательная часть курса теории колебаний также подверглась изменениям. Аналитические и графические приёмы, не имеющие элементов «нелинейного мышления» [1], перестали использоваться, а иные приобрели гораздо большую ценность. Без них самый полный набор компьютерных результатов может оказаться бессодержательной неосмысленной информацией [2].

Настоящая работа посвящена нелинейным колебаниям, т.е. движениям с большой амплитудой, математического маятника как простейшего осциллятора. Цель исследования состоит в создании интерактивной компьютерной модели, позволяющей рассмотреть и проанализировать все возможные режимы движения маятника.

1. Постановка проблемы

Рассмотрим математический маятник, состоящий из невесомого стержня длины l и груза массы m (рисунок 1), в диссипативной системе. Маятник находится в поле силы тяжести и может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса. Будем описывать его положение с помощью координаты θ, так как в системе присутствует жесткая связь – длина подвеса l. Вклад диссипативных потерь учитываем слагаемым пропорциональным $\dot{\theta}$.

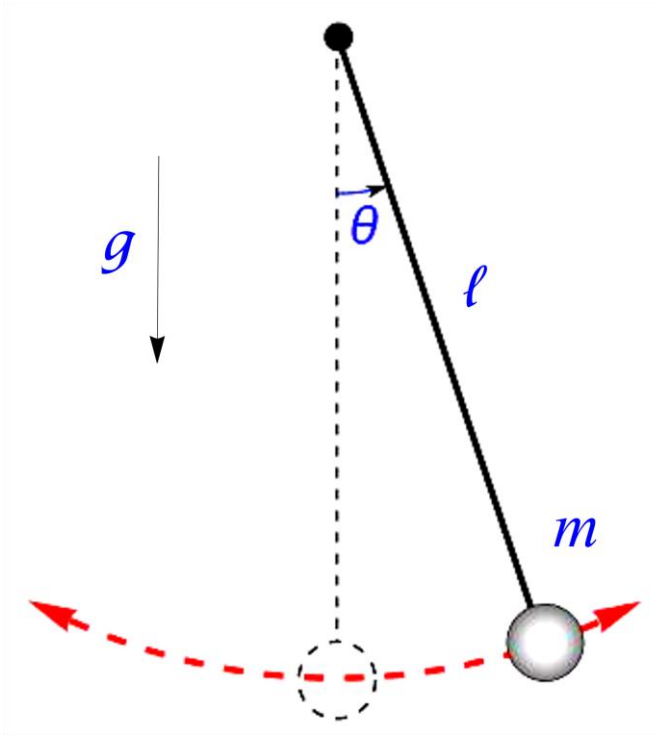


Рис. 1. Математический маятник

Уравнение движения в безразмерных переменных имеет вид:

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + sin\,\theta = 0, \qquad (1)$$

где дифференцирование производится по безразмерному времени:

$\tau = kt$,

$k = \sqrt{g/l}$ – собственная частота колебаний,

γ – коэффициент затухания (диссипации).

Поскольку нелинейное дифференциальное уравнение (1) не имеет общего аналитического решения, то возможны следующие три подхода:

1. Линеаризация уравнения (1), путем разложения функции синуса в ряд в окрестности положения равновесия: $sin\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \cdots$. Удерживая первый член, получим уравнение малых колебаний маятника [3].

2. Качественный анализ движения маятника методом фазовой плоскости [1,4,6].

3. Численный анализ уравнения (1).

Для численного решения и построения фазовых кривых используется пакет Mathematica (версия 12.1).

2. Построение интерактивной модели с использованием Mathematica

Пакет Mathematica – система компьютерной алгебры, широко используемая для научных, инженерных, математических расчётов. Развитием системы занята компания Wolfram Research (официальный сайт компании – www.wolfram.com).

Одной из привлекательных особенностей Mathematica является возможность быстро построить математическую модель явления, изучить ее особенности, получить количественные оценки, построить графики, использовать различные способы визуализации полученных зависимостей и возможность прогнозирования поведения рассматриваемой системы.

Интерактивная модель реализована следующим образом.

В программном модуле (рисунок 2) уравнение движения (1) маятника решается численно на определенном отрезке времени с помощью функции NDSolve в соответствии с начальными условиями, записанными в переменных ang0 и vel0; a[t_] и a1[t_] – массив значений функции текущего значения угла и угловой скорости соответственно, используемые для анимации колеблющегося маятника (функция Graphics), построения фазовой кривой с изображающей точкой, а также графика зависимости угла отклонения от времени. В аргументах функции отображения графиков (ParametricPlot – фазовая плоскость, Plot – зависимость угла отклонения от времени) можем настроить удобный вид отображения данных. Далее, используя функцию Manipulate, имеем возможность изменять (в поле ввода или перемещением бегунка) значения определяющих параметров: начальные угол отклонения и угловая скорость, коэффициент затухания и время. Также имеется возможность просмотра с автоматическим изменением параметров скорости и направления прокрутки анимации – рисунок 3 (интерактивная модель маятника с параметрами: $\theta(0)=2.36, \dot{\theta}(0)=0.75, \gamma=0$).

```
man = Manipulate[Module[{app, a, a1},
        app = NDSolve[{θ''[t] + 2 γ θ'[t] + Sin[θ[t]] == 0, θ[0] == ang0, θ'[0] == vel0}, θ, {t, 0, 30}];
        a[t_] := θ[t] /. First[app];
        a1[t_] := θ'[t] /. First[app];
        d[t_] = Disk[{3 Sin[a[r]], -3 Cos[a[r]]}, 0.215];
        Grid[{{Graphics[{{Thickness[0.023], Point[{r, a[r]}], d[t], Line[{{0, 0}, {3 Sin[a[r]], -3 Cos[a[r]]}}]}},
                                Axes → True, PlotRange → {{-3.4, 3.4}, {3.5, -3.4}}, ImageSize → {500, 500}],
       ParametricPlot[{a[t], a1[t]}, {t, 0, 30},
                                ImageSize → {500, 500}, AspectRatio → .75, PlotRange → All,
                                AxesLabel → {"θ", "θ'"}, Epilog → {Blue, PointSize[.04], Point[{a[r], a1[r]}]}],
       Plot[{a[t]}, {t, 0, 30},
                                PlotRange → {{0, 30}, All}, PlotStyle → {{Thin, Blue}}, ImageSize → {500, 500},
                                FrameLabel → {"τ", "θ"}, Epilog → {Blue, PointSize[.04], Point[{r, a[r]}]}]}]}]],
  {{ang0, π / 6., "initial angle θ(0)"}, 0, 0.95 Pi, Appearance → "Labeled"},
  Delimiter, {{γ, 0, "damping γ"}, 0, 1, Appearance → "Labeled"},
  {{vel0, 0, "velocity θ̇"}, 0, 3, Appearance → "Labeled"},
  {{r, 0, "time,τ"}, 0, 30}, TrackedSymbols :→ {ang0, r}, Initialization :→ Get["PlotLegends`"]]
```

Рис. 2. Программа интерактивной модели

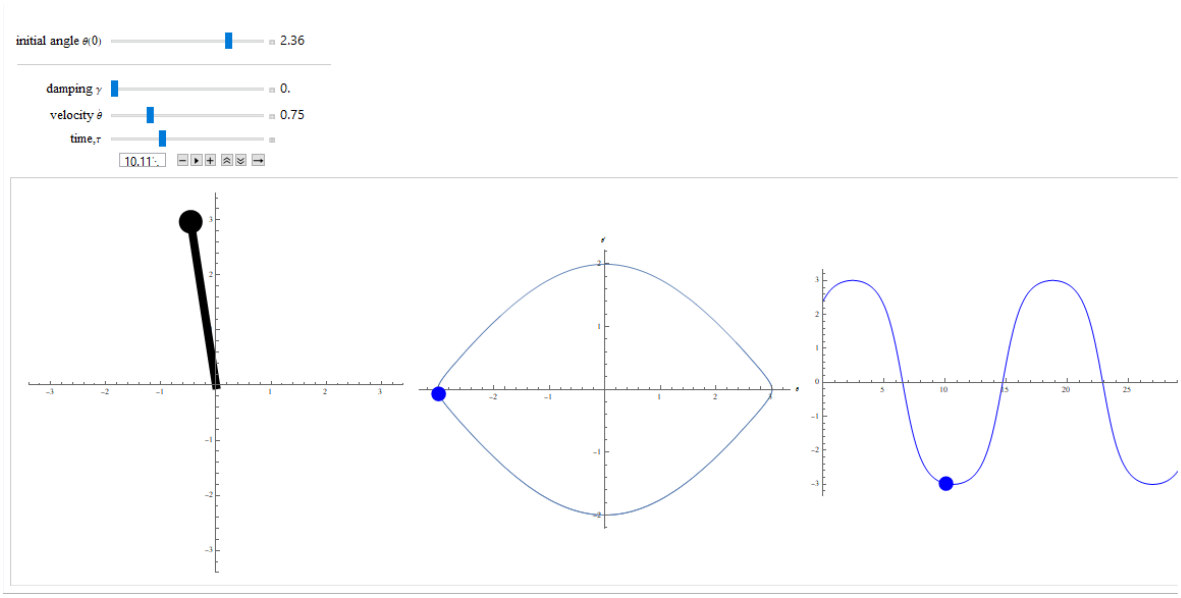


Рис. 3. Интерактивная модель маятника: а) анимация движения, б) фазовая траектория, в) зависимость угла отклонения от времени

Примеры построения графиков в Mathematica приводятся ниже.

3. Консервативный случай

Колебательная система консервативная, если в процессе движения её полная механическая энергия сохраняется с течением времени. В этом случае $\gamma = 0$ и уравнение движения преобразуется к виду:

$$\ddot{\theta} + sin\theta = 0, \qquad (2)$$

Умножим данное уравнение на $\dot{\theta}$ и представим в виде полной производной.

Выражение, стоящее под знаком производной, должно быть константой:

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - cos\theta = E, \qquad (3)$$

$$где\, E = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} + \int_0^{\theta_0} sin(\theta)\, d\theta,$$

$$\theta_0 = \theta(\tau_0),$$

$$\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(\tau_0) \qquad (4)$$

Графики, построенные в Mathematica, приводятся на рисунках 4-5.

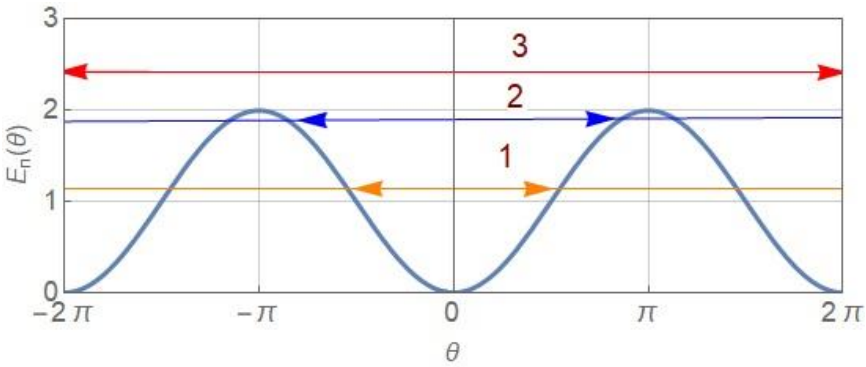


Рис. 4. График зависимости $E_П$ и различные значения полной энергии системы E (1-3)

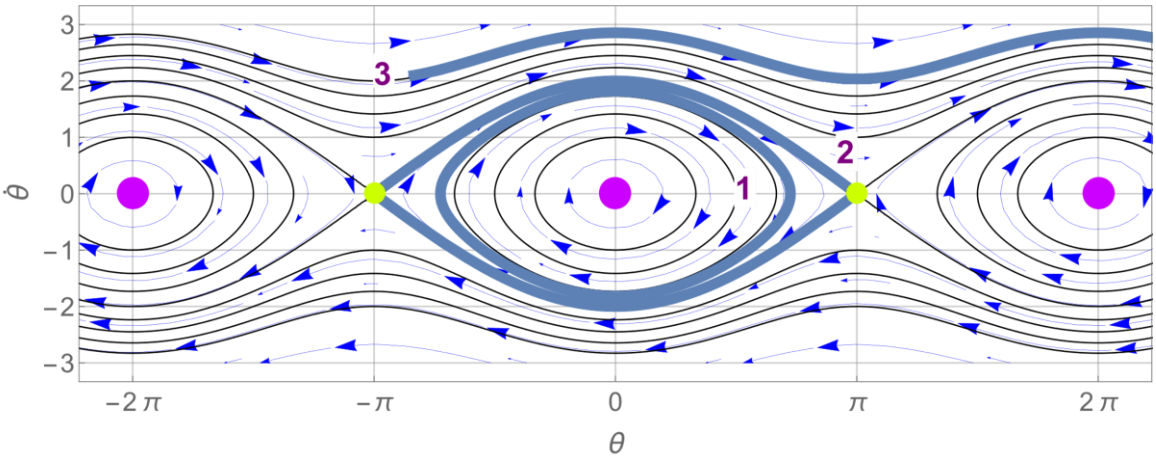


Рис. 5. Фазовый портрет и соответствующие движения маятника (1-3)

То есть уравнение (3) представляет собой закон сохранения полной механической энергии в момент времени τ, где:

$$E_k = \frac{\dot{\theta}^2}{2}, \quad E_П = \int_0^{\theta} sin\theta\, d\theta = 1 - cos\theta.$$

Покажем теперь как, используя уравнение (3), можно построить фазовый портрет системы (рисунки 4-5).

Выразим $\dot{\theta}$ через $E_П$:

$$\dot{\theta} = \sqrt{2[E - E_{\Pi}(\theta)]} \qquad (5)$$

Рассматривая колебательные движения маятника, которые существуют, при различных начальных энергиях E системы получим фазовый портрет.

4. Период колебаний

Воспользуемся подходом [6]. Зададим начальные условия: маятник отклонен от положения равновесия на угол θ_0, угловая скорость равна нулю. Тогда из уравнения (4):

$$E = 1 - cos\theta_0.$$

Обозначим τ_0 временем движения до положения равновесия $\theta = 0$. Из (5) выразим $d\tau$ и проинтегрируем:

$$\int_0^{\tau_0} d\tau = \tau_0 = -\int_{\theta_0}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}.$$

Тогда период будет:

$$T = 4\tau_0 = 4\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}. \qquad (6)$$

Получили, что период зависит от амплитуды колебаний (неизохронность) и определяется функцией потенциальной энергии.

Интеграл в формуле (6) не выражается через элементарные функции, поэтому рассчитывается численно (функция NIntegrate). Построим (функция Plot) график $T(\theta_0)$ с помощью следующей программы (рисунки 6-7).

```
period[θ0 _] := 4 NIntegrate[1/Sqrt[2 (Cos[θ] - Cos[θ0])], {θ, 0, (1 - 10^-8) θ0}]
                 квадратурное инте…

plT = Show[Plot[period[θ0], {θ0, 10^-3, .9999 π},
      пока…  график функции
                    Frame → True, FrameTicksStyle → 23,
                    рамка   истина  стиль делений на обрамлении
                    FrameTicks → {{{2 π, 3 π, 4 π, 5 π, 6 π}, None},
                    деления на обрамлении                ни одного/отсутствует
                          {{0, π/6, π/3, π/2, 2 π/3, 5 π/6, π}, None}},
                                                          ни одного/отсутствует
                    PlotStyle → Thickness[.01205], GridLines → Automatic,
                    стиль графика  толщина         линии координа…  автоматический
                    FrameLabel → {Style["θ0", 20], Style["T(θ0)", 20]}],
                    пометка для обра…  стиль       стиль
          Plot[2 Pi, {θ0, 10^-3, .9999 π}, PlotStyle → Directive[{Dashed, Black}]]]
          график…  число пи                стиль графика  директива  штрихов…  чёрный
```

Рис. 6. Программа для построения графика зависимости T(θ_0)

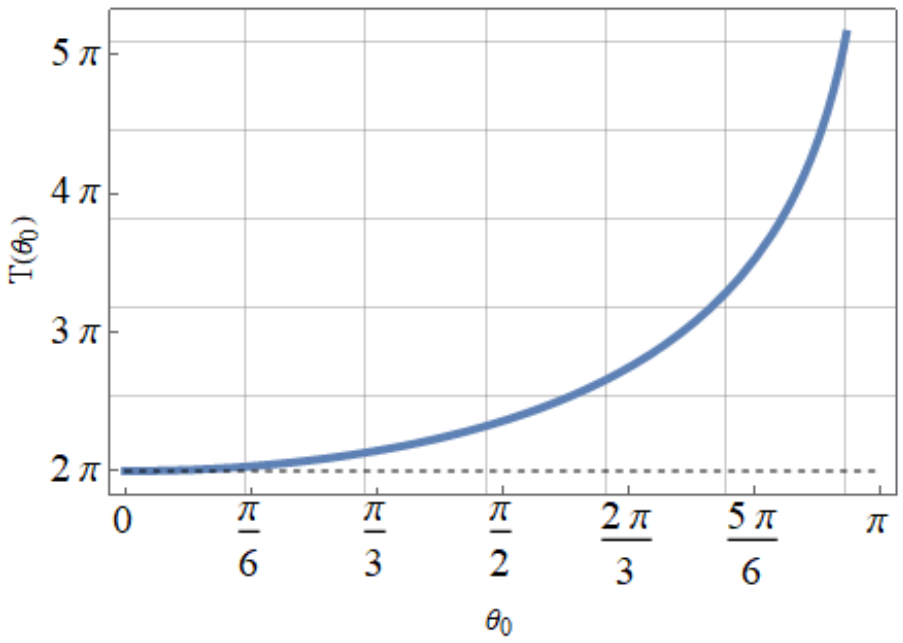


Рис. 7. График зависимости T(θ_0)

5. Виды движения

1. Либрационное движение. Если полная энергия маятника меньше, чем высота потенциального барьера, то он совершает колебания между максимальными отклонениями. При малых амплитудах ($\theta \ll \pi / 2$) колебания почти синусоидальные, а фазовая траектория почти не отличается от эллипса. При больших амплитудах маятник проводит значительное время в окрестности точек изменения направления движения на противоположное (положения наибольшего отклонения маятника), поэтому период колебаний будет возрастать с увеличением амплитуды.

По полученным графикам (рисунки 8-9) видно, что функции положения маятника и его угловой скорости от времени уже не являются гармоническими, период колебаний стал больше, а фазовая кривая отличается от эллипса.

2. Лимитационное движение. Если полная энергия маятника равна высоте потенциального барьера, движение происходит по сепаратрисе. Она разделяет фазовую плоскость на области, соответствующие разным видам движения. Скорость маятника уменьшается до нуля при приближении его к перевернутому положению ($\theta = \pi$).

На графике (рисунки 10-11) $\theta(\tau)$ образовались горизонтальные плато, указывающие на замедление маятника по мере достижения наибольшего отклонения. Размер этих плато и период колебаний будут тем больше, чем ближе полная энергия к максимальному значению потенциальной. На фазовой плоскости вплотную приблизились к кривой сепаратрисы.

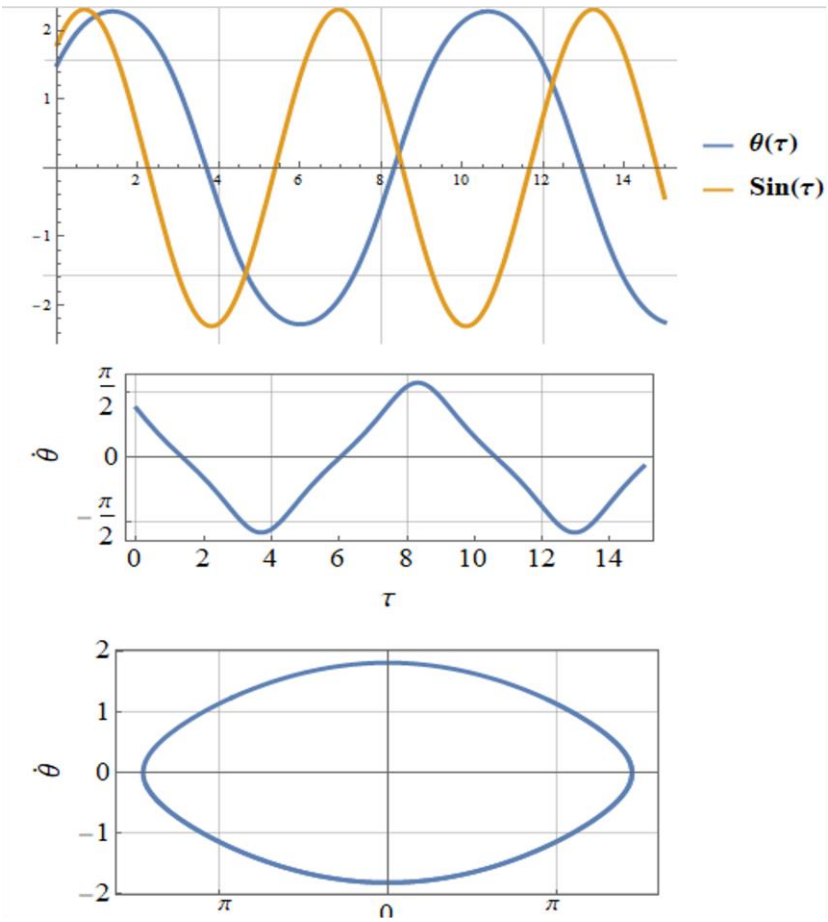
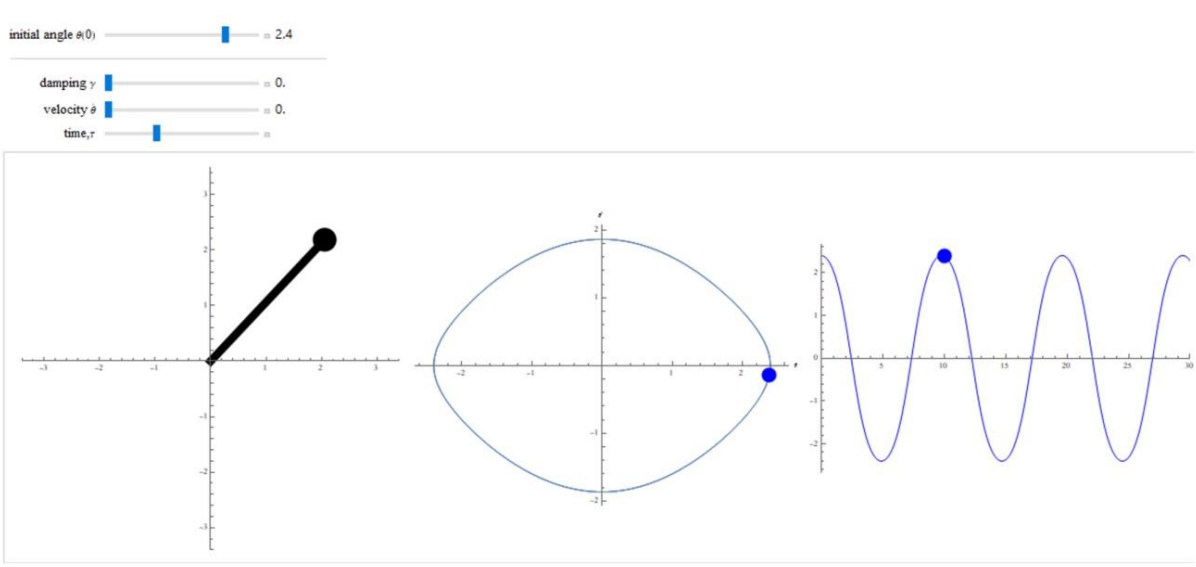


Рис. 8. Зависимости угла, угловой скорости от времени и фазовая плоскость, характерные для либрационного движения (параметры: $\theta(0) = 1.5, \dot{\theta}(0) = 1.2, \gamma = 0$)



а) б) в)

Рис. 9. Интерактивная модель маятника в режиме либрационного движения: а) анимация движения, б) фазовая траектория, в) зависимость угла отклонения от времени (параметры: $\theta(0) = 2.4, \dot{\theta}(0) = 0, \gamma = 0$)

```
Y0 = .01; (*initial angle*) YVel0 = 1.9998;(*initial velocity*)
t = 15(*time interval*);

sol = Flatten[NDSolve[{θ''[τ] == - Sin[θ[τ]], θ[0] == Y0, θ'[0] == YVel0}, θ, {τ, 0, 2 t}], 1];
Plot[θ[τ] /. sol, {τ, 0, 22.8}, PlotRange → All, ImageSize → 800,
    FrameTicks → {{{-Pi, -Pi / 2, 0, Pi / 2, Pi}, None}, {{0, 4, 8, 12, 16, 20}, None}},
    PlotStyle → Thickness[0.008], GridLines → {{0, 4, 8, 12, 16, 20}, {-Pi / 2, 0, Pi / 2}},
    FrameLabel → {Style["τ", 35], Style["θ", 35]}] (*angle vs time*)
Plot[θ'[τ] /. sol, {τ, 0, 22.8}, PlotRange → All, ImageSize → 800, PlotStyle → Thickness[0.008],
    FrameTicks → {{{-Pi, -Pi / 2, 0, Pi / 2, Pi}, None}, {{0, 4, 8, 12, 16, 20}, None}},
    GridLines → {{0, 4, 8, 12, 16, 20}, {-Pi / 2, 0, Pi / 2}},
    FrameLabel → {Style["τ", 35], Style["θ̇", 35]}] (*velocity vs time*)
plSepar = ParametricPlot[Evaluate[{θ[τ], θ'[τ]} /. sol],
  {τ, 0, 2 t}, ImageSize → 800, AspectRatio → .5, PlotRange → All,
  FrameLabel → {Style["θ", 35], Style["θ̇", 35]}, PlotStyle → Thickness[0.008],
  FrameTicks → {{{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}, None}, {{-Pi, -Pi / 2, 0, Pi / 2, Pi}, None}},
  GridLines → {{-Pi / 2, 0, Pi / 2}, {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}}] (*phase plane*)
```

Рис. 10. Программа Mathematica для движения вблизи сепаратрисы

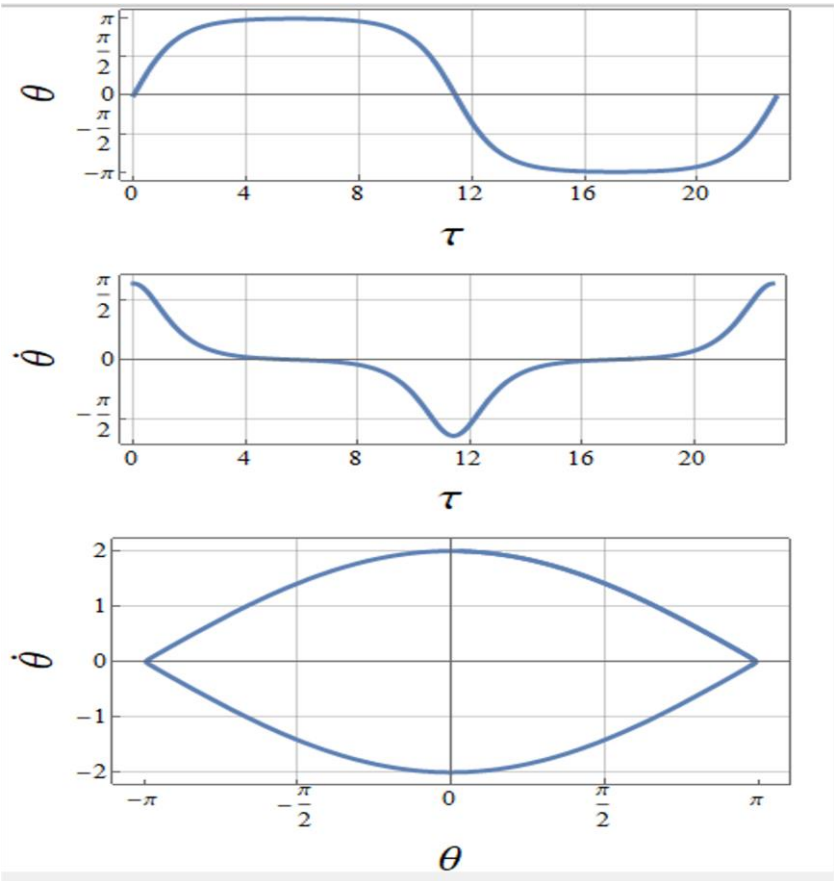
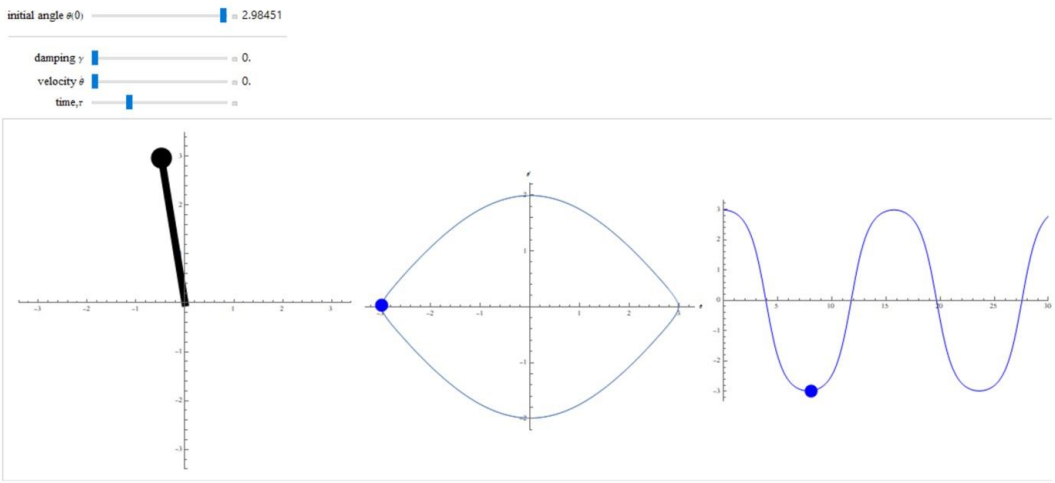


Рис. 11. Зависимости угла, угловой скорости от времени и фазовая плоскость, характерные для движения вблизи сепаратрисы (параметры: $\theta(0) = 0.01, \dot{\theta}(0) = 1.99, \gamma = 0$)

Интерактивная модель маятника в режиме близком к лимитационному движению приведена на рисунке 12.



а) б) в)

Рис. 12. Интерактивная модель маятника в режиме близком к лимитационному движению: а) анимация движения, б) фазовая траектория, в) зависимость угла отклонения от времени (параметры: $\theta(0) = 2.98, \dot{\theta}(0) = 0, \gamma = 0$)

3. Ротационное движение. В зависимости угла от времени произошли качественные изменения, исчезла периодичность и график начинает выглядеть в виде прямой (рисунок 13). На графике $\dot{\theta}(\tau)$ пропали плато. А фазовая кривая представляет собой уходящую в бесконечность волнообразную кривую.

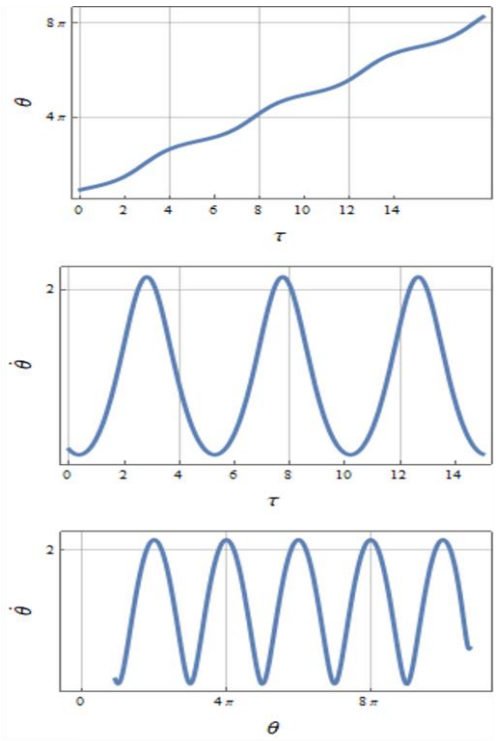
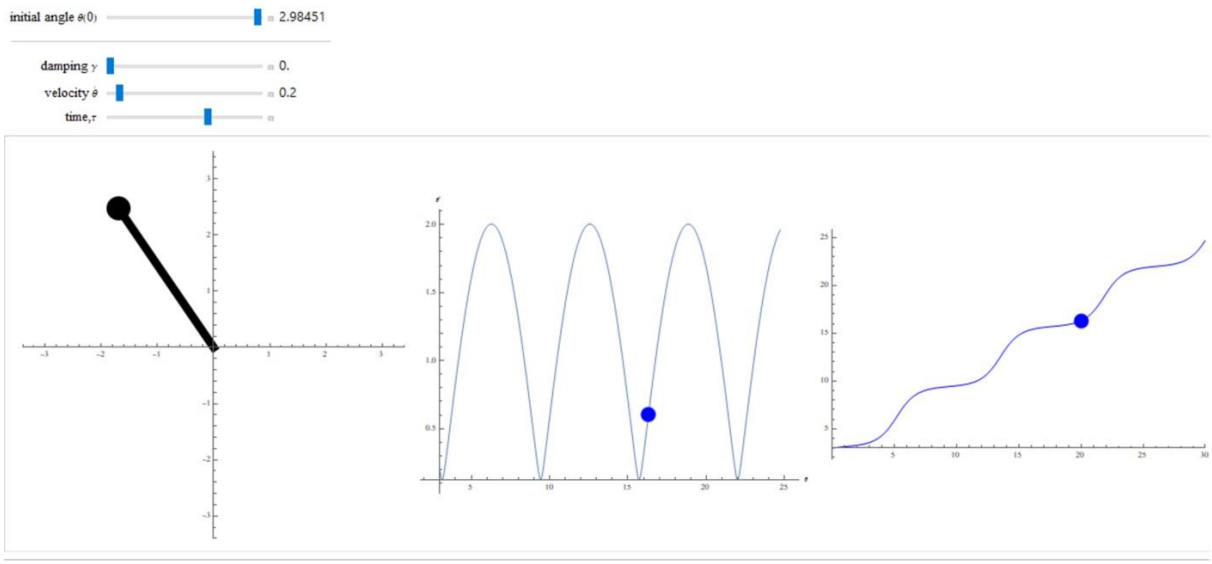


Рис. 13. Зависимости угла, угловой скорости от времени и фазовая плоскость, характерные для ротационного движения (параметры: $\theta(0) = 2.9, \dot{\theta}(0) = 2.0, \gamma = 0$)

Если полная энергия маятника превышает потенциальный барьер, то он оказывается в перевернутом положении с ненулевой угловой скоростью, что приведет к вращению (рисунок 14). С увеличением E плато, характерные для движения вблизи сепаратрисы, уменьшаются.



а) б) в)

Рис. 14. Интерактивная модель маятника в режиме ротационного движения: а) анимация движения, б) фазовая траектория, в) зависимость угла отклонения от времени (параметры: $\theta(0) = 2.98, \dot{\theta}(0) = 0.20, \gamma = 0$)

6. Неконсервативный случай

Рассмотрим влияние диссипации на динамику нелинейного осциллятора. За счет неё происходит уменьшение полной механической энергии маятника и наблюдаются затухающие колебательные процессы.

Проиллюстрируем свойства нелинейного маятника в системе с вязким трением на рисунке 15, на котором представлены фазовые портреты маятника (1) при одинаковых начальных условиях и переменном коэффициенте γ.

Величина параметра γ влияет лишь на характер затухания – он либо осцилляторный для достаточно малых γ (на рисунке 15 представлен черной линией), либо апериодический в противном случае (рисунок 15 – красной линией, синей обозначено критическое значение).

Приведенные на рисунках 16-18 графики качественно и количественно описывают поведение нелинейного осциллятора при изменении диссипативного фактора и начальных условий.

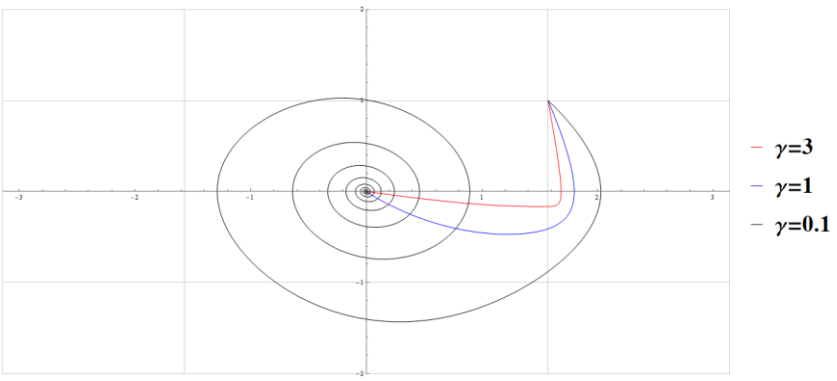
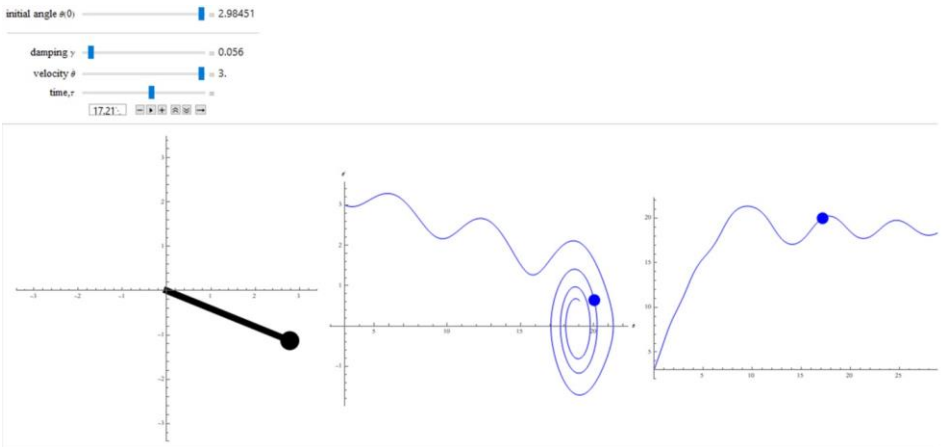
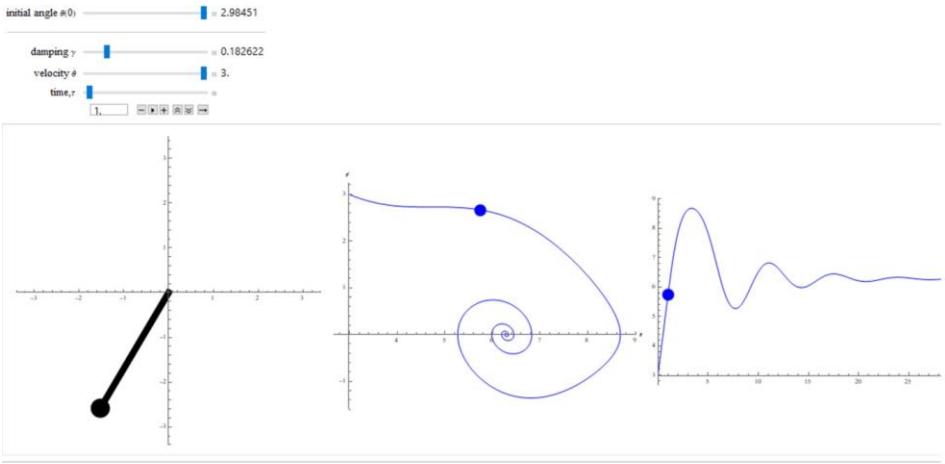


Рис. 15. Фазовый портрет в диссипативном случае



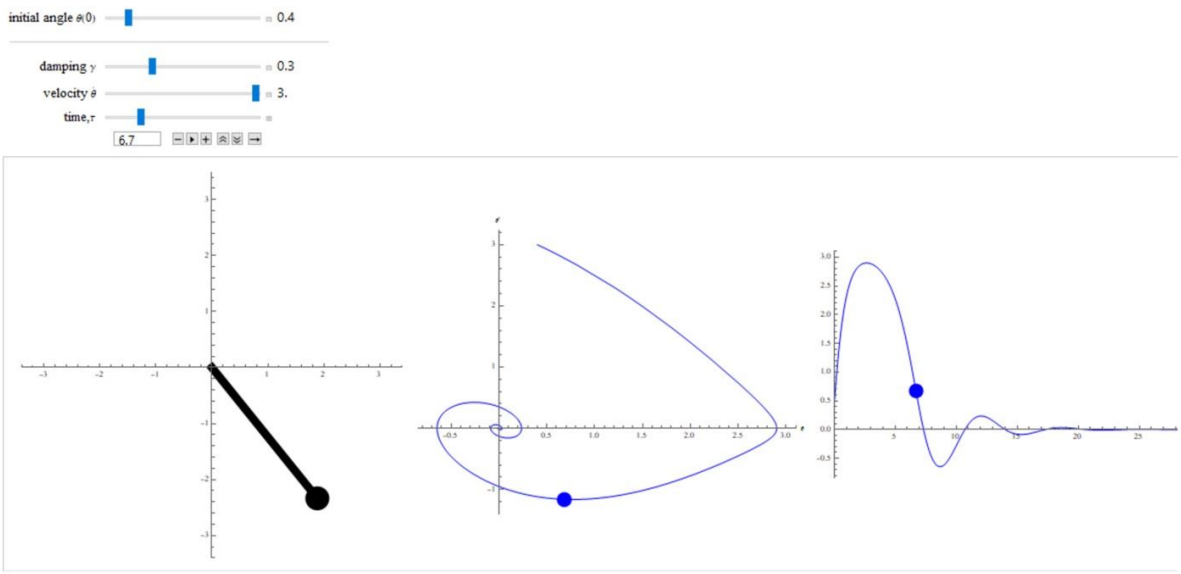
а) б) в)

Рис. 16. Интерактивная модель при различных начальных условиях и коэффициенте затухания: а) анимация движения, б) фазовая траектория, в) зависимость угла отклонения от времени (параметры: $\theta(0) = 2.98, \dot{\theta}(0) = 3.00, \gamma = 0.05$)



а) б) в)

Рис. 17. Интерактивная модель при различных начальных условиях и коэффициенте затухания: а) анимация движения, б) фазовая траектория, в) зависимость угла отклонения от времени (параметры: $\theta(0) = 2.98, \dot{\theta}(0) = 3.00, \gamma = 0.18$)



а) б) в)

Рис. 18. Интерактивная модель при различных начальных условиях и коэффициенте затухания: а) анимация движения, б) фазовая траектория, в) зависимость угла отклонения от времени (параметры: $\theta(0) = 0.40, \dot{\theta}(0) = 3.00, \gamma = 0.30$)

Заключение

Разработана интерактивная компьютерная модель математического маятника, содержащая: анимацию движения, фазовую траекторию, зависимость угла отклонения от времени. С её помощью можно исследовать динамику маятника, изменяя параметры системы: начальные условия, коэффициент затухания. Пользуясь численными решениями, полученными в Mathematica, проведена классификация движения и рассмотрены три режима колебаний маятника, выявили определяющую роль начальных условий. Показана неизохронность нелинейных колебаний маятника. Построены фазовые траектории маятника с учетом диссипативных факторов.

Материалы статьи были доложены на конференции «Студенческая научная весна – 2022», проведенной кафедрой ФН3 Теоретическая механика.

Список литературы

[1]. Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов. Том 4. Лекции по колебаниям. М.: Изд. АН СССР, 1955. 512 с.

[2]. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания: учебное пособие для вузов. М.: Издательство физико-математической литературы, 2002. 292 с.

[3]. Дронг В.И. и др. Курс теоретической механики: учебник для вузов; ред. К.С. Колесников, В.В. Дубинин. 5-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 580 с.

[4]. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Режим доступа: https://scask.ru/e_book_atk.php (дата обращения 16.03.2022).

[5]. Некоркин В.И. Лекции по основам теории колебаний: Учебное пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. 233 с.

[6]. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: в 2-х томах. Т. II. Динамика., 6-е изд., перераб. и доп., М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 640 с.