Особенности проектирования упругой компенсирующей муфты

Часть 2. Расчёт упругого элемента при наличии угловой несоосности валов

Е.О. Билецкий¹, А.М. Гуськов¹, О.А. Ряховский², Е.П. Фирсов¹

Аннотация: Рассматривается плоское напряжённое состояние диска пальцевой муфты при несоосном расположении валов. В результате расчёта были построены поля распределений напряжений и перемещений в диске пальцевых муфт для дисков с четырьмя, шестью и восемью отверстиями. Расчет проведен методом конечных элементов при наличии угловой несоосности при провороте ведущего вала на полный оборот. Учтено, что при наличии угловой несоосности в зависимости от угла поворота возникает изгибающий момент, приводящий к появлению крутящего момента на ведущем валу даже при отсутствии рабочей нагрузки. Построены графики изменения изгибающих моментов относительно поперечных осей неподвижной системы отсчета.

Ключевые слова: передачи, муфта, несоосность, компенсирующая муфта, прочность, метод конечных элементов.

Расчёт напряжённого состояния диска пальцевой муфты при несоосном расположении ведущего и ведомого вала

В первой части был произведён расчет плосконапряжённого состояния диска пальцевой муфты. В этой статье мы продолжим исследовать напряженное состояние диска пальцевой муфты, учитывая эффекты, связанные с поворотом ведомого вала относительно ведущего при наличии угловой несоосности валов.

Для расчёта были выбраны диски с внутренним диаметром Ø50 мм с четырьмя отверстиями и Ø140 мм с восемью отверстиями (рис.1). Толщина пластин была принята

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра «Прикладная механика»

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра «Основы конструирования и детали машин»

равной 1 мм. Материал дисков – сталь (коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, модуль упругости первого рода $E = 2 \times 10^{11}$).

Отличие данной задачи от задачи, рассмотренной в первой части состоит в том, что при повороте ведущего вала, из-за угловой несоосности двух валов – угол ψ (рис. 2), – , нарушается симметрия, так как положение отверстий относительно плоскости, в которой лежат оси обоих валов меняется.



Рис 1. Геометрические характеристики дисков пальцевой муфты

При этом оба торца вращаются в разных плоскостях. Именно эта особенность задачи является наиболее интересной и трудоемкой при проведении расчетов в программном комплексе ANSYS [3, 4, 5].

Геометрические соотношения

Рассмотрим геометрические зависимости между положениями точек на контурах отверстий ведущего и ведомого валов при повороте ведомого вала на угол α и ведомого – на угол β (рис. 2).



Рис. 2 Угловое смещение валов в плоскости, проходящей через оси обоих валов

Введем следующие обозначения: оси координат, связанные с ведущим валом обозначим через $\{x, y, z\}$ с ведомым валом – через $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$. В начальном положении оси $\{y, z\}, \{\tilde{y}, \tilde{z}\}$ расположим в плоскости осей валов. Причем, оси z, \tilde{z} образуют угол несоосности ψ (рис. 3). При этом ось z направлена по внешней нормаль к торцу ведущего вала, а ось \tilde{z} – против внешней нормали к торцу ведомого вала.

При повороте ведущего вала на угол α оси z, \tilde{z} сохранят свое положение в пространстве, а оси $\{x, y\}, \{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ займут новые положения. При этом ведомый вал повернется на угол β . На протяжении всего исследования деформациями валов пренебрегаем, то есть, рассматриваем их как абсолютно твердые тела. Используем следующие обозначения (рис. 3)

$$\{x, y, z\} \xrightarrow{\alpha} \{x', y', z\}, \quad \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\} \xrightarrow{\beta} \{\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}\}$$

Используем также следующие обозначения для ортов связанных осей

$$\{x, y, z; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \xrightarrow{\alpha} \{x', y', z', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}, \quad \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; \tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}\} \xrightarrow{\beta} \{\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}'; \tilde{\mathbf{i}}', \tilde{\mathbf{j}}', \tilde{\mathbf{k}}'\}$$
(1)

Соответствующие орты связаны преобразованиями поворота



Рис. 3. Поворот ведущего вала на угол а

Для численного решения этой задачи удобнее всего перевести все перемещения в систему координат, связанную с ведущим валом. В таком случае, в ANSYS и Workbench (эти две программы в дальнейшем будут использованы для решения задачи расчета напряженного состояния диска пальцевой муфты) нет необходимости задавать перемещения для всех четырёх или восьми отверстий упругого элемента, а можно ограничится двумя или четырьмя из них (связанных с ведомым валом).

Рассмотри контур отверстия, связанного с ведущим валом. Положение произвольной точки A контура отверстия, связанного с ведущим валом определяется зависимостью (рис 4). Расстояние от центра пластины до центра одного из отверстий обозначим как L, радиус отверстия – C. Рассмотрим отверстие, центр которого находится на оси x'. Положение центра отверстие определяется вектором

$$\mathbf{r} = L \mathbf{i}' \tag{3}$$



Рис. 4 Геометрические характеристики контура отверстия, связанного с ведущим валом

Положение произвольной точки контура определим полярным углом φ , отсчитываемым от оси x' (рис. 4) и вектором \mathbf{r}_{α}

$$\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{r} + C\cos(\varphi)\mathbf{i} + C\sin(\varphi)\mathbf{j}$$
(4)

Тогда, с учетом (2), (3), (4), координаты вектора **r** в неподвижной (начальной) системе координат, связанной с ведущим валом, вычисляются как

$$x_{\alpha} = (L + C\cos(\varphi))\cos(\alpha) - C\sin(\varphi)\sin(\alpha)$$

$$y_{\alpha} = (L + C\cos(\varphi))\sin(\alpha) - C\sin(\varphi)\cos(\alpha)$$

$$z_{\alpha} = 0$$
(5)

Установим зависимость между ортами систем координат ведомого и ведущего валов (рис. 5) в начальном положении

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{i} \\ \tilde{\mathbf{j}} = \cos(\psi) \, \mathbf{j} - \sin(\psi) \, \mathbf{k} \\ \tilde{\mathbf{k}} = \sin(\psi) \, \mathbf{j} - \cos(\psi) \, \mathbf{k} \end{cases}$$
(6)



Рис. 5 Положение ведущего и ведомого валов при угловой несоосности

Рассмотри отверстие диска, находящегося в плоскости торца ведомого вала, центр которого в начальном положении находится на оси \tilde{y} (рис. 5).

Составим уравнения положения точек контура отверстия, связанного с ведомым валом (рис. 6). Аналогично соотношению (4) получим



Рис. 6 Поворот отверстия диска, связанного с ведомым валом

$$\mathbf{r}_{\beta} = \left(L + C\cos\left(\tilde{\varphi}\right)\right)\tilde{\mathbf{j}}' - C\sin\left(\tilde{\varphi}\right)\tilde{\mathbf{i}}' \tag{7}$$

Считаем, что деформации пластины в своей плоскости малы (принцип начальных размеров соблюдается). Тогда, угол между векторами \mathbf{i}' и $\tilde{\mathbf{j}}'$ не изменяется, то есть

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' = 0 \tag{8}$$

Используя соотношения (2), получим выражение, связывающее углы поворота ведущего и ведомого вала в зависимости от угла меду осями двух валов

$$tg(\beta) = tg(\alpha)\cos(\psi)$$
(9)

Найденные соотношения позволяют вычислить положение контура отверстия в плоскости ведомого вала в системе координат $\{x, y, z\}$, аналогично зависимостям (5) (рис. 6):

$$\begin{aligned} x_{\beta} &= -\left(L + C\cos(\tilde{\varphi})\right)\sin(\beta) - C\sin(\tilde{\varphi})\cos(\beta) \\ y_{\beta} &= \left(L + C\cos(\tilde{\varphi})\right)\cos(\beta)\cos(\psi) - C\sin(\tilde{\varphi})\sin(\beta)\cos(\psi) \\ z_{\beta} &= -\left(L + C\cos(\tilde{\varphi})\right)\cos(\beta)\sin(\psi) - C\sin(\tilde{\varphi})\sin(\beta)\sin(\psi) \end{aligned}$$
(10)

Зависимости (5), (9), (10) позволяют вводить расчет кинематические условия, накладываемые на контуры отверстий при проведении анализа методом конечных элементов.

Расчет диска пальцевой муфты с использованием метода конечных элементов

В расчетах в программном комплексе ANSYS для моделирования напряженнодеформированного состояния пластин использовался конечный элемент SHELL 63 [3]. В процессе расчета модель разбивалась на 8 областей, в каждой из них выбирался определенный масштаб сетки. Возле концентраторов напряжений сетка принудительно сгущалась для повышения точности расчёта (рис. 7, 8).



Рис. 7. Фрагмент конечно-элементной сетки вблизи отверстия упругого диска с четырьмя отверстиями



Рис. 8. Фрагмент конечно-элементной сетки вблизи отверстия упругого диска с восемью отверстиями

Помимо этого проводились проверочные расчеты моментов с использованием других программ SolidWorks и Workbench; в SolidWorks создавалась трехмерная модель диска, которая потом загружалась в Workbench [4, 5].

Следует заметить, что при наличии несоосности, даже при нулевом моменте сопротивления $M_{\beta} = 0$ для проворачивания ведущего вала необходимо прикладывать переменный по углу поворота α крутящий момент M_{α}^{0} . При этом возникают переменные изгибающие моменты $M_{\chi}^{0}, M_{\chi}^{0}$.

Для того чтобы учесть крутящий момент, действующий на упругий элемент, следует учесть, что расстояния между отверстиями меняются (см. Часть 1 настоящей работы). Положим, что на самом деле угол поворота ведомого вала получает некоторое дополнительное приращение $\Delta\beta$, вызванное деформацией упругого элемента в своей плоскости.. Заметим, что соотношение (8), а так же (9) верны с точностью до малых третьего порядка относительно $\Delta\beta$. При приложении момента к ведущему валу M_{α} , который необходим для преодоления момента сопротивления M_{β} на ведомом валу, можно вычислить угол $\Delta\beta$. Однако, распределение поверхностных сил по контурам отверстий заранее неизвестно. Поэтому, учитывая линейность задачи, практически удобнее поступать следующим образом: задаёмся в расчетах малым значением $\Delta\beta'$, например, положив его равным одному градусу [1, 2]. Это позволяет определить поле перемещений на контурах ведомого вала в соответствии с (10) как

$$u_{x} = x_{\beta}|_{\beta \leftarrow \beta + \Delta \beta'} - x_{\beta}$$

$$u_{y} = y_{\beta}|_{\beta \leftarrow \beta + \Delta \beta'} - y_{\beta}$$

$$u_{z} = z_{\beta}|_{\beta \leftarrow \beta + \Delta \beta'} - z_{\beta}$$
(11)

Далее вычисляется момент на ведомом валу M'_{β} . При расчетах рассматривались только равновесные конфигурации. Тогда между моментом на входном валу M_{α} (по направлению вращения) и моментом на выходном валу M_{β} (против направления вращения) должно выполняться условие равновесия упругого элемента

$$M_{\alpha}\cos(\psi) = M_{\beta} + M_{\nu}\sin(\psi) \tag{12}$$

Если угол несоосности равен нулю ($\psi = 0$), то уравнение (12) сводится к равенству моментов на ведущем и ведомом валах. При произвольном задании угла $\Delta\beta'$ для фиксированного значения угла поворота ведущего вала α уравнение (12) служит для вычисления реакции дополнительной связи на выходном валу $M_{\beta}'(\alpha, \Delta\beta')$. Интересно отметить, что даже при отсутствии крутящего момента на выходном валу ($M_{\beta} = 0$) и наличии угловой погрешности ($\psi \neq 0$) для удержания муфты необходимо приложить крутящий момент M_{α} на ведущем валу, если упругий элемент деформируется таким образом, что изгибающий момент относительно поперечной оси, лежащей в плоскости передачи, не равен нулю ($M_y \neq 0$). То есть, для проворачивания ведущего вала без нагрузки на выходном валу необходимо прикладывать периодически изменяющийся по углу α крутящий момент M_{α} . Поэтому при реальных расчетах всегда приходиться делать два расчета для двух значений $\Delta\beta'$ и $\Delta\beta''$. Значение угла $\Delta\beta^0$, которое соответствует нулевому моменту на выходном валу, будет определяться как

$$\Delta\beta^{0} = \frac{\Delta\beta' M_{\beta}^{\ \prime\prime} - \Delta\beta'' M_{\beta}^{\ \prime}}{M_{\beta}^{\ \prime\prime} - M_{\beta}^{\ \prime}}$$
(13)

Соответственно, для заданного момента M_{β} необходимый угол $\Delta\beta$ вычисляется следующим образом

$$\Delta\beta = \Delta\beta^{0} + \frac{\Delta\beta'' - \Delta\beta'}{M_{\beta}'' - M_{\beta}'}M_{\beta}$$
(14)

Очевидно, что если задавать движение контуров отверстий в двух некомпланарных плоскостях при выполнении условия $\Delta\beta = 0$, то из уравнения (14) следует, что для этого необходимо прикладывать дополнительный крутящий момент на выходном валу. В соответствии с зависимостью (14) происходит пересчет крутящего и изгибающих моментов на ведущем валу

$$M_{\alpha} = \frac{M_{\alpha}^{"} - M_{\alpha}^{'}}{M_{\beta}^{"} - M_{\beta}^{'}} M_{\beta}, \quad M_{x} = \frac{M_{x}^{"} - M_{x}^{'}}{M_{\beta}^{"} - M_{\beta}^{'}} M_{\beta}, \quad M_{y} = \frac{M_{y}^{"} - M_{y}^{'}}{M_{\beta}^{"} - M_{\beta}^{'}} M_{\beta}$$
(15)

По результатам расчетов строятся графики зависимости изгибающих и крутящего моментов от угла поворота ведущего вала α и угла между осями валов ψ . Угол ψ принимали равным {1°,3°,6°}, α изменялся от 0 до 180°.

На рисунках 9, 10 приведены графики изменения изгибающего момента M_y и крутящего момента на входном валу для диска с четырьмя отверстиями. Графики имеют подобный вид для трех углов несоосности (фактически значения изменяются пропорционально углу ψ для изгибающих моментов).



Рис. 9 Графики изгибающих моментов M_y , [для диска с четырьмя отверстиями;

$$\Delta\beta = 0$$

Значения изгибающего момента на два порядка меньше значений крутящего момента. Учитывая уравнение равновесия (12), малость угла несоосности, можно заметить, что моменты на ведущем и ведомом валах практически совпадают, то есть график $M_{\beta}(\alpha)$ повторяет график $M_{\alpha}(\alpha)$ на рис. 10. Следует заметить, что эти графики приведены для одного из двух необходимых расчетов при угле искажения в плоскости упругого элемента равным нулю – $\Delta\beta = 0$. Именно этим фактом объясняется знакопеременность крутящего момента.



Рис. 10 Графики крутящих моментов M_{α} , [для диска с четырьмя отверстиями;

 $\Delta\beta = 0$

Аналогичный вид имеют графики для компенсирующей муфты, в которой используются диски с восемью отверстиями – рис. 11, 12. Учитывая, что размеры диска с восемью отверстиями отличаются от таковых для диска четырьмя отверстиями, значения моментов при одной и той же связи – $\Delta\beta = 0$, – существенно больше.

Расчеты показывают, что характер полученных зависимостей не меняется и при других значениях угла искажения, а именно, при $\Delta\beta = 1^{\circ}$. То есть сохраняется та же периодичность по углу α при связи $\Delta\beta = const$. Если воспользоваться преобразованиями (13), (14), (15) то можно перестроить подобные графики для любого закона момента на ведомом валу в зависимости от угла поворота. В частности, приведем зависимости $M_y(\alpha)$ для случая постоянного момента сопротивления на ведомом валу – рис. 13, 14, – для значения угла несоосности $\psi = 1^{\circ}$. Учитывая практическую пропорциональность изгибающих моментов углу ψ , можно рассчитать их значения для других углов.



Рис. 11 Графики изгибающих моментов M_y , [для диска с восемью отверстиями;

 $\Delta\beta = 0$



Рис. 12 Графики крутящих моментов M_{α} , [$\int для диска с восемью отверстиями; <math>\Delta \beta = 0$



Рис. 13 Перестроенные графики изгибающего момента (б) при постоянном значении крутящего момента (а) для диска с четырьмя отверстиями



Рис. 14 Перестроенные графики изгибающего момента (б) при постоянном значении крутящего момента (а) для диска с восемью отверстиями

Характер деформирования упругих элементов показан на рисунках 15, 16. Подобного рода визуализация является необходимой для того, чтобы убедиться, что отверстия, связанные с различными валами, действительно находятся в двух некомпланарных плоскостях.



Рис. 15 Диск с четырьмя отверстиями в деформированном состоянии



Рис. 16 Диск с восемью отверстиями в деформированном состоянии

Выводы

Приведенные расчеты показывают, что упругая компенсирующая муфта с упругими элементами в виде перфорированных пластин позволяют передавать крутящий момент практически без искажения при малых углах несоосности. В то же время, появление изгибающих моментов с периодичностью поворота ведущего вала (рис. 13, 14) свидетельствует о переменной жесткости на изгиб. При вибрациях наличие периодически изменяющейся жесткости может послужить причиной возбуждения параметрических колебаний. Подобные исследования необходимо проводить в зависимости от уровня вибраций и механизмов диссипации энергии в каждом конкретном случае.

Работа выполнена в рамках реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства, выполняемого с участием российского высшего учебного заведения, "Разработка и производство отечественных насосных агрегатов нового класса для транспорта нефти (импортозамещающие технологии)" шифр заявки 2010-218-01-245".

Список литературы

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. /Ред. В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1981. – Т.4. Вибрационные процессы и машины / Под ред. Э.Э. Лавендела. 1981, 509 с.

2. Расчеты на прочность в машиностроении / Пономарев СД, Бидерман ВЛ, Лихарев КК, Макушин ВМ, Малинин НН, Феодосьев ВИ, М.: МАШГИЗ, 1985. С. 123-127.

3. Справочное руководство программного комплекса ANSYS

4. Справочное руководство программного комплекса WorkBench

5. Справочное руководство программного комплекса SolidWorks

6. Сайт фирмы KTR// http://www.ktr.com/ru/home.htm каталог муфт фирмы KTR. URL http://www.ktr.com/root/img/pool/pdf/produktkataloge/us/us_gesamt/KTRcorp_Catalog.pdf (дата обращения 24.12.2010)