электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС 77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Математическая модель осесимметричного вихревого движения

77-30569/318125

02, февраль 2012

Аникин А. Ю., Бояринцева Т. Е., Сидняев Н. И.

УДК 519.63

МГТУ им. Н.Э. Баумана
anikin83@inbox.ru
t.bojare@mail.ru
sidnyaev@yandex.ru

Введение

В природе и технике часто возникают вращательные движения жидкости, при которых происходит перемещение среды от периферии к центру с последующим истечением её вдоль оси [1]. Такое течение может существовать длительно, не меняя своих вращательных характеристик, например, при вытекании жидкости из резервуара или в атмосферных вихрях [2-4]. Этот тип движения считается вихревым.

Обширные исследования вихревых движений, начиная с конца 50-х годов, выполнены М.А. Гольдштиком. Рассмотрены теоретические вопросы, связанные с вращением потока в трубе [2-5], формированием закрученной струи на выходе из завихрителя [4-6], эффектом Ранка [3], течением в основном объеме вихревой камеры [3-5], определением радиуса вихря [1-3], движением частиц в вихревой камере и вращающимися слоями [1-5]. В экспериментальной работе [3,4] измерены профили скорости и давления в вихревой камере. Авторами выдвинуты, теоретически обоснованы и экспериментально опробованы несколько оригинальных идей по использованию вихревых камер для удержания плазмы, в качестве ядерных реакторов, центробежно-барботажных аппаратов, вихревых мельниц. Тангенциальные скорости рассчитывались по профилю давления на торцевой стенке. Исследователи пришли к выводу, что дозвуковой завихритель более эффективен, чем сверхзвуковой. В дальнейшем аэродинамика при больших скоростях исследовалась авторами [1-7], причем в [3-5] измерялись профили скорости в объеме камеры. Основываясь на законе сохранения момента количества движения, в настоящее время получено выражение для тангенциальной скорости и теоретически рассчитана эффективность циклона. Исследования показывают, что изменение тангенциальной скорости в пограничном слое носит колебательный характер, что соответствует эксперименту. Устройства, в которых реализуются подобные вихревые движения, имеют разные названия – циклоны, вихревые камеры и т.п. (см. рис. 1).

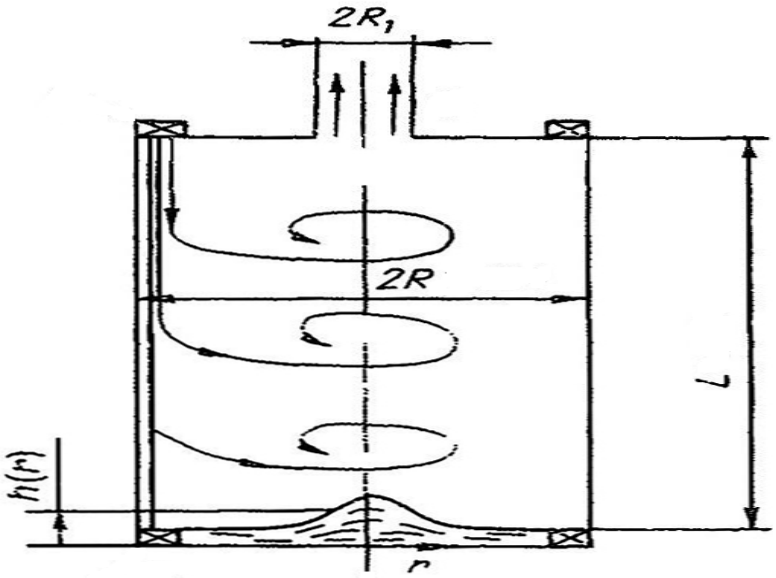

Рис. 1. Схема вихревой камеры

Общим для них является радиальные перемещения вращающейся жидкости, вследствие чего тангенциальная скорость с приближением к оси вращения возрастает до максимума, а затем падает до нуля у самой оси. Термин «вихревая камера» был введён при моделировании атмосферных вихрей в лабораторных условиях. В вихревой камере среда вводится равномерно по краю, а выходит через отверстие в центре. Соответственно, выделяются две области течения – центральная (в зоне выходного отверстия) и периферийная.

В центральной области скорость осевого течения значительно превышает радиальную скорость. Поэтому характеристикой степени закрутки потока в центральной области может служить отношение $\frac{v_1}{w_1}$. Чем больше витков совершит поток при продвижении вдоль струи на один её диаметр, тем больше он закручен. Величину $S_v = v_1 / w$ будем называть степенью закрутки потока в центральной области.

В периферийной области ($r > R_1$) осевая компонента скорости меняется как по радиусу, так и по высоте камеры, следовательно, она не может служить характеристикой течения. Характерным движением в периферийной области является спиральное движение в плоскости, перпендикулярной оси камеры (см. рис. 2).

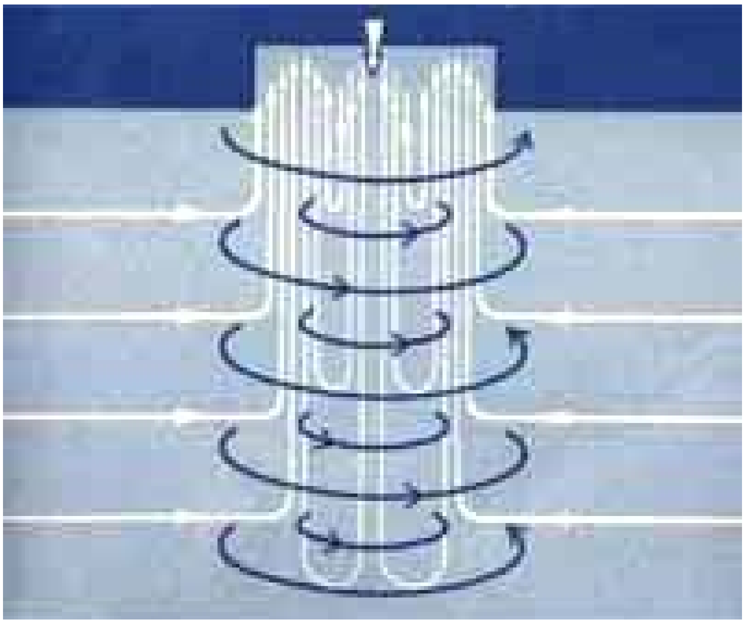

Рис. 2. Структура вихревого течения

Математические модели вихревого движения.

Ввиду сложности вихревого движения созданы три группы моделей: интегральные, теоретические с тангенциальной скоростью, зависящей только от радиуса; модели течения с тангенциальной скоростью, зависящей как от радиуса, так и от осевой координаты.

В интегральных моделях структура течения рассматривается приближённо. Следовательно, эти модели не могут дать результаты, совпадающие с экспериментом в деталях [3-6]. Основным их преимуществом является то, что определён комплекс геометрических параметров, который оказывает существенное влияние на процессы в центре вихревых камер.

В моделях с тангенциальной скоростью, зависящей как от радиуса, так и от осевой координаты, предпринимались попытки решить уравнение движения и неразрывности с минимальным количеством упрощений. Так, например, в работе [7, 8] использовали такую модель применительно к вихревым штормам (торнадо). В настоящей работе рассматривается осесимметричное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости. Уравнения Навье – Стокса и неразрывности при пренебрежении массовыми силами имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{v^2}{r}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{uv}{r}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]; \qquad (2)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r}+v\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right);\quad (3)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\ .\quad (4)$$

Теоретическому анализу предшествовали эксперименты [3-5] со стоком воды из центрального отверстия высокого вращающегося цилиндра. Как показали результаты исследований, по центру цилиндра образуется конусообразная воздушная воронка. Исходя их этих наблюдений в работах [7, 8] решение ищется виде конических функций. Граничные условия задаются на оси и на бесконечности, при этом сохраняется свободная константа, в зависимости от которой в [7] приведены графики скоростей и давлений.

Общая трудность интегрированного подхода состоит в том, что не все граничные условия известны. В таких случаях, целесообразно идти на упрощение уравнений движения, но при этом получать решения без дополнительных предположений об их возможном виде.

Одной из таких упрощённых моделей является модель, при которой тангенциальная скорость зависит только от радиуса, а по высоте камеры не меняется, то есть $v=v(r)$. Эта модель достаточно реалистична, так как во многих экспериментальных работах [3-6] показано, что профиль тангенциальной скорости по высоте камеры в основном её объёме практически постоянен. Дополнительные упрощения, вводимые в такую осесимметричную модель $v=v(r)$, позволили проанализировать отдельные стороны формирования течения в вихревой камере и подойти к полному решению задачи в такой постановке.

Уравнения осесимметричного движения

Рассмотрим осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в вихревой камере при наличии тангенциальной скорости, зависящей только от радиуса. Поскольку в торцевых пограничных слоях тангенциальная скорость зависит от осевой координаты, учесть влияние пограничного слоя торцевых крышек в такой модели нельзя. Поэтому будем решать задачу вне пограничного слоя торцевых крышек. На боковой стенке скорость равна нулю, а в местах ввода потока, в отверстиях или щелях имеет отличное от нуля значение. Так как в осесимметричной модели отразить это не возможно, то предполагается рассматривать течение в области $0<r<R_2$, где сформировавшийся поток не зависит от конструкции входа и имеет начальное значение компонент скорости при

$$r=R_2,\ u=u_2,\ w=0, v=v_2.$$

Физическим аналогом модели, представленной на рис.1 и 2, является камера радиусом R_2, у которой цилиндрическая стенка – труба, вращающаяся с угловой скоростью $\omega = \dfrac{v_2}{R_2}$; через неё подаётся газ расходом $Q = 2\pi R_2 L u_2$.

При $v = v(r)$ из уравнения

$$u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]$$

следует, что радиальная скорость также зависит от радиуса, то есть $u = u(r)$, а из уравнения неразрывности

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

– осевая скорость линейна по, поэтому $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$. Тогда уравнения (1) - (4) примут вид

$$u\frac{du}{dr} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} + \frac{d(ru)}{dr}\right); \tag{5}$$

$$\frac{u}{r}\frac{d(rv)}{dr} = \nu\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr}\right); \tag{6}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right); \tag{7}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\ . \tag{8}$$

На нижней торцевой крышке нет осевого движения жидкости, поэтому при

$$z = 0, w = 0\ . \tag{9}$$

Через центральное отверстие радиусом R_1 верхней торцевой крышки жидкость выходит из камеры, поэтому

$$z = L\ ;\quad R_1 < r < R_2\ ;\quad w = 0\ .$$

Из условия осевой симметрии задачи вытекает, что на оси камеры $u = v = 0$ при $r = 0$.

Граничные условия

Система уравнений (5) – (8) представлена уравнениями второго порядка для компонент скорости u, v, w и первого порядка для давления p. Чтобы найти из уравнений старшие производные в любой точке, необходимо знать в этой точке значения функций и младшей производной. Отсюда следует, что для определения указанных величин, должны быть заданы восемь граничных условий. Но так как неизвестные функции w и p зависят от двух переменных, то граничные условия для них в общем случае не могут быть выражены константами, а должны зависеть от одной координаты, например, $r = R_b$ $w = w_b(z)$ $p = p_b(z)$, где R_b - радиус ограничивающей поверхности. В частности, когда неизвестная функция, например w, линейна по z, эта зависимость может быть выражена двумя постоянными граничными условиями: при $r = R_{b1}, z = z_1, w = w_1$ и $r = R_{b2}, z = z_2, w = w_2$.

Априори у нас нет известных зависимостей функции p и w от осевой координаты z или радиуса r. Поэтому граничных условий в виде констант должно быть не менее десяти. Для задания дополнительных граничных условии необходимо иметь четкие физические основания, и они должны в максимальной степени описывать обстановку рассматриваемого течения жидкости. Например, в нашей задаче осталось неопределенным давление. Для обеспечения движения жидкости в вихревой камере с заданными скоростями на нее должен воздействовать определенный перепад давления, нижний уровень которого необходимо задать на выходе из камеры. Это давление внешней среды, например, $p_{вн} = 0$ не может быть задано по всему выходному сечению камеры, так как оно изменяется по радиусу. По-видимому, такое условие можно было бы поставить на выходе из камеры на бесконечности, где скорость движения стремится к нулю. Но в этом случае должны быть изменения тангенциальной скорости по z, что противоречит модели $v \equiv v(r)$.

Трудность в постановке граничных условий характерна для многих работ, в том числе [1, 2, 7, 8]. С целью ее преодоления принимают какие-либо гипотезы или решают задачу при произвольных граничных условиях или произвольных величинах констант интегрирования. Чтобы получить решения, соответствующие действительности, граничные условия должны максимально отвечать условиям задачи.

Редукция к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Поскольку первое слагаемое в уравнении (8) не зависит от z, после интегрирования (8) по z результат может быть записан в виде

$$w = \psi_1(r) + z\psi_2(r) \ . \tag{10}$$

Но $\psi_1(r) = 0$ в соответствии с граничным условием (9). Так как u и v зависят только от r, то при дифференцировании (5) по z получаем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = 0 \tag{11}$$

При подстановке (10) в уравнение (7) производную от давления можно записать так:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = A \cdot z \, , \tag{12}$$

где A может зависеть только от r. Тогда после дифференцирования (12) по r с учётом (11) получаем $\frac{\partial A}{\partial r} = 0$, то есть $A = const$.

После подстановки (12) в (7) находим

$$u\frac{d\psi_2}{dr} + \psi_2^2 - \nu\left(\frac{d^2\psi_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi_2}{dr}\right) = A, \tag{13}$$

где согласно (12)

$$A = -\frac{1}{\rho z}\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}.$$

Перейдём к безразмерным переменным

$$\varphi = \frac{vr}{v_1 R_1}; \quad f = \frac{ur}{u_1 R_1}; \quad \overline{p} = \frac{p}{0{,}5\rho u_1^2}; \quad y = \left(\frac{r}{R_1}\right)^2 . \tag{14}$$

Тогда из уравнения неразрывности (8) с учётом (9) получаем

$$w = \left(2\nu F_1 / R_1^2\right) z f' = w_{cp} f' z / L \ , \tag{15}$$

где $F_1 = -u_1 R_1 / \nu = Q / 2\pi L \nu$ - радиальное число Рейнольдса;

$$f' = \frac{df}{dy}; \ w_{cp} = Q / \pi R_1^2 \ .$$

Из сопоставления (15) с (10) следует $\psi_2 = (2\nu F_1 / R_1) f'$. После подстановки ψ_2 в (13) и перехода к новым переменным (14) имеем

$$f''' = \frac{F_1}{2y}\left[(f')^2 - f''(f + 2/F_1) - C \right], \tag{16}$$

где

$$C = \frac{A\left(R_1^2/2\nu\right)^2}{F_1^2}. \tag{17}$$

Уравнение (6) после подстановки новых переменных (14) примет вид

$$\varphi'' = -\frac{F_1 f \varphi'}{2y}. \tag{18}$$

Уравнение (5) в новых переменных можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} = \left(\frac{f}{y}\right)^2 - \frac{2ff'}{y} - \frac{4f''}{F_1} + K_1^2\left(\frac{\varphi}{y}\right)^2,$$

где $K_1 = \dfrac{v_1}{u_1}$ – параметр крутки потока на границе выходного отверстия; $\overline{p} = 2p(y)/\rho u_1^2$ – радиальная составляющая давления, зависящая только от радиальной координаты.

С учётом того, что

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{f^2}{y}\right) = -\left(\frac{f}{y}\right)^2 + \frac{2ff'}{y},$$

это уравнение можно частично проинтегрировать. Задавая в некоторой точке $y=a$ граничные условия $p(a) = p_a$, $f(a) = f_a$, $f'(a) = f'_a$ находим

$$p = \overline{p}_a - \left(\frac{f^2}{y} - \frac{f_a^2}{a}\right) - \frac{4}{F_1}(f' - f'_a) + K_1^2\int_a^y \frac{\varphi^2}{y^2}dy\ . \tag{19}$$

Полностью профиль давления, зависящий как от радиальной, так и от осевой координаты, можно определить интегрированием выражения (12). После приведения его к скоростному напору $\frac{1}{2}\rho u_1^2$ получаем

$$\overline{p}(r,z) = -\frac{AL^2}{u_1^2}\zeta^2 + \overline{p}\ , \tag{20}$$

где $\zeta = \dfrac{z}{L}$; $\overline{p} = \overline{p}(y,0)$ - давление при $\zeta = 0$, которое определяется уравнением (19).

Задача свелась к системе обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Уравнения (16) - (19), с учётом (14), (15) и (20) определяют поля скоростей и давлений в вихревой камере. В уравнения для скоростей (16) - (18) давление явно не входит. Однако на профили скоростей оно оказывает влияние через константу A согласно (19).

В качестве примера расчета на рис. 3 представлен график зависимости безразмерного давления $\overline{p} = \dfrac{p}{\rho g R}$ от безразмерной координаты $\overline{r} = \dfrac{r}{R} \in [0,1]$.

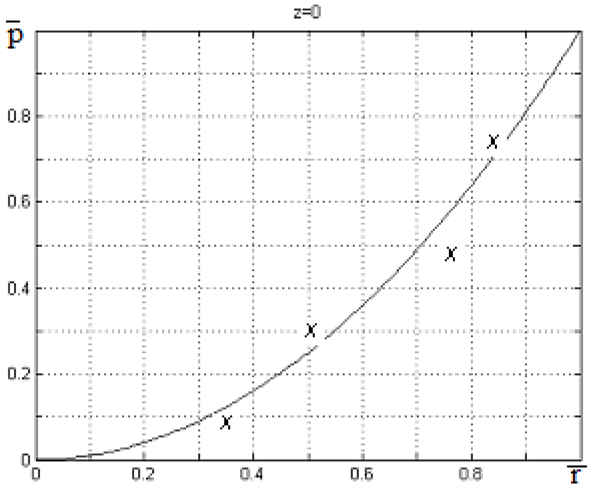

Рис. 3. Зависимость относительного давления от безразмерного радиуса трубки тока (x – экспериментальные точки).

Результаты предварительных исследований на рис.3 показывают, что радиальное перемещение вращающегося потока с приближением к оси камеры приводит к увеличению тангенциальной скорости вращения, которая достигает максимума на оси. Это явление приводит к падению давления на оси, т.е. статическое давление, начиная с периферии, монотонно понижается и в центре становится отрицательным (по сравнению с атмосферным).

Заключение

В общем случае решение дифференциальных уравнений совместно с граничными условиями должно полностью определить задачу, а для уравнений Навье - Стокса – течение жидкости. Поэтому точно полученные решения должны иметь определенный вид. Если же искомые функции задаются в другом виде, то решения уравнений не соответствуют задаче. По этой причине в [2, 6, 7] получены несколько решений, а при некоторых значениях чисел Рейнольдса они отсутствуют. В действительности эти результаты не являются решениями рассматриваемых задач. Они соответствуют отвлеченным моделям, которые описывают заданные функции. В таких задачах целесообразно идти на упрощение уравнений движения, но при этом получать решения без дополнительных предположений об их возможном виде. Одной из таких упрощенных моделей является модель течения в вихревой камере, при которой тангенциальная скорость зависит только от радиуса, а по высоте камеры не изменяется, т.е. $v \equiv v(r)$.

В экспериментальных работах [2-5] показано, что профили тангенциальной скорости по высоте камеры в основном ее объеме практически постоянны. Существенное изменение профилей v происходит в пограничном слое торцов, толщина которого 1-2 мм [3-4]. Поэтому в основном объеме вихревой камеры можно рассматривать течение с тангенциальной скоростью, зависящей только от радиуса. Такой подход осуществлен в работах [1-2]. Некоторыми авторами [3-7] и в представленной модели вводятся дополнительные упрощения, например, задается профиль радиальной скорости.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М., Наука, 1986. – 736 с.
2. Пуанкаре А. Теория Вихрей. - Ижевск.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика. 2000. – 162 с.
3. Гольдштик М.А., Леонтьев А.К., Палеев И.И. Аэродинамика вихревой камеры// Теплоэнергетика. 1961. №2. С. 40-45.
4. Иванов Ю.В., Канцельсон Б.Д., Павлов В.А. Аэродинамика вихревой камеры.//Вопросы аэродинамики и теплоотдачи в котельно-топочных процессах. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. С. 100-114.
5. Ляховский Д.Н. Исследование аэродинамики циклонной камеры// Вопросы аэродинамики и теплоотдачи в котельно-топочных процессах. М.; Л.: Госэнергоиздат. 1958. С. 114-150.
6. Рудницкий В.А. О коэффициенте сохранения скорости в расчётах циклонно-вихревых камер// Эффективность энергетических процессов: Межвузовский сб. – Владивосток, 1976. Вып. 1. С. 12-16.
7. Long R.R. Vortex motion in a viscous fluid // J. Meteorol. 1958. Vol. 15. P. 108.
8. Long R.R. A vortex an infinite viscous fluid // J. Fluid Mech. 1961. Vol. 11. N 4. P. 611 – 624.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS 77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Mathematical model of axially symmetric vortex motion

77-30569/318125

02, February 2012

Anikin A.Yu., Boyarinceva T.E., Sidnyaev N. I.

Bauman Moscow State Technical University

anikin83@inbox.ru

t.bojare@mail.ru

sidnyaev@yandex.ru

This article deals with the structure of vortex motion in enclosed volumes. Mathematical model was proposed and boundary conditions of vortex motion based on Helmholtz's theorem were formulated. The theory of vortex motion in the field of mass centrifugal forces was introduced. Developed mathematical model and formulated boundary conditions allowed to study the main features of motion, which appeared in vertex devices and to determine the influence of enclosure's parameters on flow regime.

Publications with keywords: velocity, viscosity, mathematical model, parameters, vortex, equations, flow, boundary conditions

Publications with words: velocity, viscosity, mathematical model, parameters, vortex, equations, flow, boundary conditions

Reference

1. Landau L.D., Lifshits E.M., Theoretical physics. Vol. 6. Hydrodynamics, Moscow, Nauka, 1986, 736 p.
2. Puankare A., Vortex theory, Izhevsk, NITs «Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika", 2000, 162 p.
3. Gol'dshtik M.A., Leont'ev A.K., Paleev I.I., Aerodynamics of a vortex chamber, Teploenergetika 2 (1961) 40-45.
4. Ivanov Iu.V., Kantsel'son B.D., Pavlov V.A., Aerodynamics of a vortex chamber, Questions of aerodynamics and heat transfer in the boiler flue processes, Moscow, Leningrad, Gosenergoizdat, 1958, pp. 100-114.
5. Liakhovskii D.N., Investigation of the aerodynamics of cyclone chambers, Questions of aerodynamics and heat transfer in the boiler flue processes, Moscow - Leningrad, Gosenergoizdat, 1958, pp. 114-150.

6. Rudnitskii V.A, About the coefficient of conservation of the velocity in the calculation of cyclone-vortex chambers, in: Interuniversity Collection on Efficiency of energy processes, Vladivostok, Iss. 1, 1976, pp. 12-16.
7. Long R.R., Vortex motion in a viscous fluid, J. Meteorol. 15 (1958) 108-115.
8. Long R.R., A vortex an infinite viscous fluid, J. Fluid Mech. 11 (4) (1961) 611 – 624.