

О точных решениях одного частного случая уравнений теории нелинейного пограничного слоя

77-30569/348389

04, апрель 2012

Романов А. С., Семиколонов А. В.

УДК 519.624

МГТУ им. Н.Э. Баумана

rolmal@bk.ru

avsemik@mail.ru

Применение в технике жидкостей сложного состава приводит к необходимости рассматривать жидкости со сложными механическими свойствами. Такие жидкости могут проявлять свойства упругости, пластичности, памяти, зависимости кажущейся вязкости от интенсивности скорости их деформирования и много других свойств, отличающих их от обычной ньютоновской жидкости. Для описания механических свойств чисто вязких жидкостей (то есть без предельного напряжения сдвига, наличие которого определяет свойство пластичности) широко применяется степенная модель Оствальда – де Вилия, которая в случае простого сдвигового течения записывается в виде

$$\tau = k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y},$$

где τ - касательное напряжение, y - поперечная координата, u - скорость (в случае простого сдвига $u(y)$), $k = \text{const} > 0$ - постоянная консистенции, $n = \text{const} > 0$ - индекс течения, $n = 1$ соответствует ньютоновской жидкости.

Если $0 < n < 1$, то жидкость называется псевдопластической, так как ее «кажущаяся вязкость» $\eta = k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1}$ убывает с увеличением скорости деформации.

Если $n > 1$, то кажущаяся вязкость возрастает с увеличением скорости деформации. Это свойство экспериментально зафиксировано у некоторых полимерных растворов и называется «дилатансией». Соответствующие жидкости называются дилатантными.

Известны многочисленные примеры применения реологического закона Оствальда – де Вилия к теории пограничного слоя. В частности, при описании пограничного слоя на полубесконечной пластине (задача Блазиуса), слоя смешения спутных потоков несмешивающихся жидкостей и других. Во всех рассматриваемых случаях задача является автомодельной.

Если в качестве зависимой переменной выбрать функцию $f(\xi)$, пропорциональную

функции тока: $\Psi = Vx \left[\frac{n(n+1)}{Re_x} \right]^{1/(n+1)} f(\xi)$, и независимую переменную $\xi = \frac{y}{x} \left[\frac{Re_x}{n(n+1)} \right]^{1/(n+1)}$,

то в конечном итоге, указанный класс задач теории пограничного слоя сводится к исследованию обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения

$$f''' \cdot |f'|^{n-1} + f'' \cdot f = 0. \quad (1)$$

(Здесь $Re_x = \frac{\rho x^n V^{2-n}}{k}$ - обобщенное число Рейнольдса, x - продольная координата, ρ - плотность жидкости, V - характерная скорость, в случае задачи Блазиуса она равна скорости набегающего потока.) То есть, уравнение (1) описывает целый класс автомодельных течений теории нелинейного пограничного слоя.

Для качественного исследования уравнения (1) сведем его к уравнению первого порядка. Перепишем это уравнение в инвариантных переменных (вид этих «инвариантных» переменных был получен методами группового исследования в [1])

$$q = \frac{f'}{|f|^{n+1}}, \quad p = \frac{f''}{|f|^{2n-1}}. \quad (2)$$

Уравнение (1) в переменных (2) переписывается в виде

$$|p|^{n-1} \cdot \left[\frac{dp}{dq} - p \frac{(2n-1) \cdot |p|^{1-n} + 3q}{(n+1)q^2 \operatorname{sgn}(f) - (2n-1) \cdot p} \right] = 0 \quad (3)$$

Следует отметить, что уравнение (3) при $n > 1$ всегда имеет в качестве решения алгебраический корень $p = 0$. Этому корню соответствует однородное течение жидкости с $f'' = 0$. Анализ второго сомножителя, то есть уравнения

$$\frac{dp}{dq} - p \frac{(2n-1) \cdot |p|^{1-n} + 3q}{(n+1)q^2 \operatorname{sgn}(f) - (2n-1) \cdot p} = 0 \quad (4)$$

позволяет установить, что здесь также возможно особое решение $p = 0$, но лишь при $1 < n < 2$.

Таким образом, исследование выбранного класса решений уравнения нелинейного пограничного слоя сводится к исследованию поведения интегральных кривых уравнения (4). Для качественного представления решений уравнения (4) удобно использовать двулистную фазовую плоскость с координатами (p, q) , один из листов которой соответствует положительным значениям функции f , а другой – отрицательным. При этом достаточно исследовать поведение интегральных кривых на одном листе фазовой плоскости, тогда на другом их ход можно указать в силу симметрии. Мы ограничимся случаем $\operatorname{sgn}(f) > 0$.

Поведение интегральных кривых для конечных значений p, q подробно исследовано в [1], [2]. Из результатов качественного анализа следует, что проблема существования множества решений или их отсутствия может быть связана именно с переходом с одного листа фазовой плоскости на другой, когда значения функции f проходят через ноль. Поэтому представляет интерес получение асимптотических представлений для сепаратрис семейств интегральных кривых при $|p|, |q| \rightarrow \infty$.

Анализ показывает существование двух сепаратрис при $q \rightarrow -\infty, p \rightarrow 0$. Соответствующее асимптотическое представление следует искать в виде зависимости

$$p = a \cdot (-q)^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{1-n} < 0, \quad |a| = \frac{2}{n-1},$$

что подтверждается непосредственной проверкой.

Для доказательства существования двух других сепаратрис при $p \rightarrow \infty$ удобно перейти к новым переменным $p, q \mapsto t, z$, $z = \frac{1}{p}$, $t = \frac{q}{\sqrt{|p|}}$. В новых переменных уравнение (4) записывается в виде

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2z}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)|z|^{\frac{2n-1}{2}} + 3t}{2 \operatorname{sgn}(z) - t^2 + t|z|^{\frac{2n-1}{2}}} \quad (5)$$

Нетрудно показать, что уравнение (5) имеет две интегральные кривые, являющиеся сепаратрисами семейств интегральных кривых и входящих в точку на прямой $z=0$ при $|t|=2$, соответствующее асимптотическое представление которых в переменных (p, q) имеет вид $p = \frac{q^2}{2}$.

Для исследования поведения интегральных кривых вблизи бесконечно удаленной точки, в областях, не примыкающих к оси $p=0$ и не лежащих между найденными выше сепаратрисами, будем предполагать, что выполнены сильные неравенства

$$q \gg \frac{p^2}{4} \quad \text{и} \quad 3q \gg (2n-1)|p|^{1-n}.$$

Тогда уравнение (4) асимптотически эквивалентно уравнению

$$\frac{dp}{dq} = \frac{3p}{(n+1)q} \quad (6)$$

Уравнение (6) позволяет определить асимптотический вид указанных интегральных кривых

$$p = a|q|^\alpha, \quad \alpha = \frac{3}{n+1}$$

с произвольной постоянной a , $|a| < \infty$. Для дальнейшего следует отметить, что показатель $\alpha > 1$ при $1 < n < 2$ и $\alpha < 1$ при $n > 2$.

Для подтверждения полученных качественных результатов относительно вида интегральных кривых желательно указать «простой» пример, решение которого можно получить аналитически. Такая возможность имеется при $n = 2$, так как уравнение (1) сводится линейному уравнению (в пределах листа)

$$f''' + f \cdot \operatorname{sgn}(f'') = 0. \quad (7)$$

А именно, рассмотрим конкретную задачу о смешении двух спутных потоков одинаковой жидкости, один из которых вначале был неподвижным. Для решения уравнения (7) это означает выполнение условия $f = 0$ при $\xi = 0$, а также граничных условий

$$f' = 0, \quad f'' = 0 \text{ при } \xi \rightarrow +\infty \text{ и } f' = 1, \quad f'' = 0 \text{ при } \xi \rightarrow -\infty \quad (8)$$

Как показывает анализ сформулированной краевой задачи, основанный на аналитическом решении уравнения (7), выполнение граничных условий (8) возможно только при $\xi \rightarrow \xi_+ > 0$ и $\xi \rightarrow \xi_- < 0$, где $\xi_- > -\infty$ и $\xi_+ < +\infty$. После проведения расчетов был получен окончательный вид решения уравнения (7), удовлетворяющий указанным условиям:

$$f = C_1 e^{-\xi} + C_2 e^{\frac{\xi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \varphi\right),$$

где $C_1 = -0,01990$, $C_2 = 0,63830$, $\varphi = 6,31438$ для отрезка $\xi_- < \xi < \xi_+$, причём $\xi_- = -1,84981$, $\xi_+ = 1,16693$.

Вне этого отрезка решение должно быть продолжено следующим образом: при $\xi < \xi_-$ $f = -0,37969$ и $f = \xi - 0,18552$ при $\xi > \xi_+$ соответственно.

На рис. 1 изображен вид интегральных кривых, рассчитанных численно по уравнению (4), в проекции на круг (проекция нижней полусферы Пуанкаре на плоскость переменных (p, q)) для $n=2$. Там же указана выделенная кривая, соответствующая приведенному точному решению частной задачи, находящаяся в полном соответствии с качественным анализом.

В рамках построенной модели, для уравнения (1) при $n = 2$ были найдены решения следующей краевой задачи

$$f''' |f''| + f'' \cdot f = 0$$

$$f' = -\lambda^2, \quad \xi = 0, \text{ и } f' = 1, \quad f'' = 0, \quad \xi \rightarrow \xi_+ (\xi_+ > 0).$$

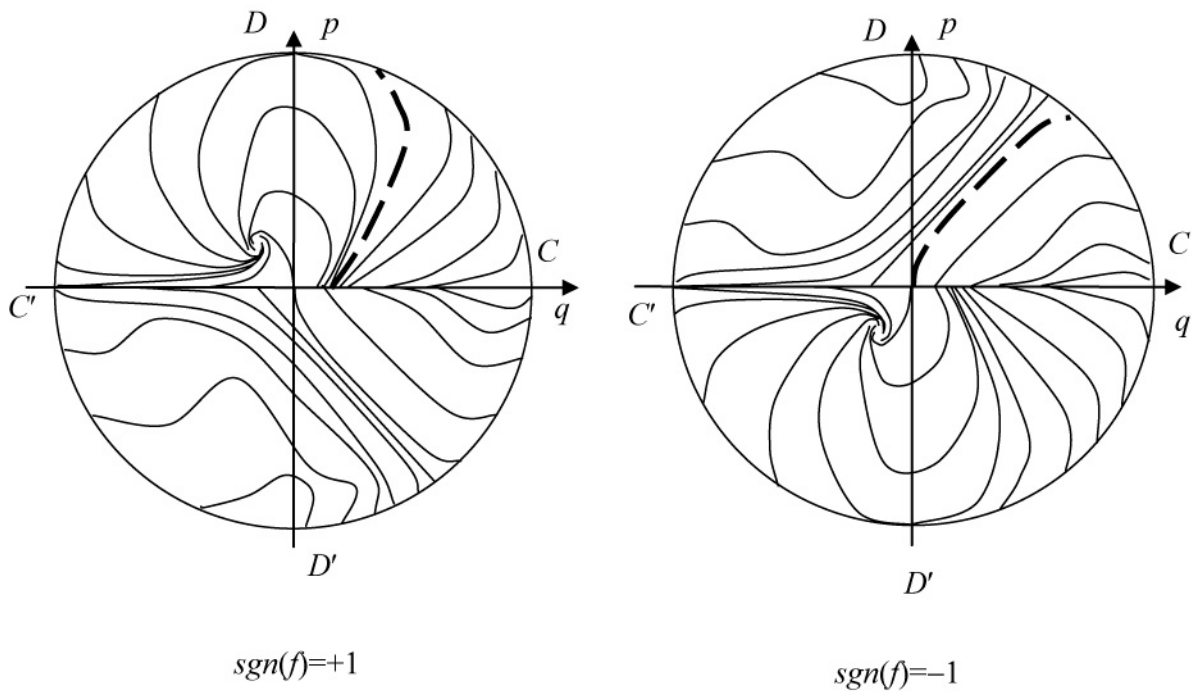


Рис. 1. Качественный вид интегральных кривых в проекции на круг (проекция нижней полу-сферы Пуанкаре на плоскость переменных (p, q)) для рассмотренного случая $n=2$.

Эта краевая задача соответствует задаче Блазиуса с отрицательной скоростью, пропорциональной постоянной λ^2 на поверхности обтекаемой пластины. Известно [3], что решение такой задачи может быть неединственным или не существовать вовсе. В рамках модели дилатантной жидкости анализ возникающей проблемы проводится до конца аналитически.

На самом деле, результаты проведенного исследования свидетельствуют о том, что решения уравнения (1) с такими граничными условиями существуют при $f'' \geq 0$ только если $\lambda < \lambda_{кр} \approx 0,622$. Число решений для одних и тех же граничных условий равно 2.

При этом можно выделить два случая.

1) Для значений $\lambda > \lambda_0 \approx 0,457$ оба решения задачи имеют одинаковый вид

$$f = \begin{cases} C_1 e^{-\xi} + C_2 e^{\frac{\xi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \alpha\right), & 0 \leq \xi \leq \xi_+ \\ f_0 + \xi - \xi_+, & \xi > \xi_+ \end{cases}$$

где $f_0 = C_1 e^{-\xi_+} + C_2 e^{\frac{\xi_+}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi_+ + \alpha\right)$.

Например, при $\lambda = 0,5$:

первое решение имеет вид

$$f_1 \approx \begin{cases} 0,3036 \cdot e^{-\xi} + 0,3852 \cdot e^{\frac{\xi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi - 0,9077\right), & 0 \leq \xi \leq 2,286771 \\ \xi - 1,19425, & \xi > 2,286771 \end{cases},$$

второе решение имеет вид

$$f_2 \approx \begin{cases} 0,0984 \cdot e^{-\xi} + 0,1538 \cdot e^{\frac{\xi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + 3,8359\right), & 0 \leq \xi \leq 4,0369 \\ \xi - 3,0317, & \xi > 4,0369 \end{cases}.$$

Графики решений в первом случае, их первых и вторых производных вблизи точки $\xi = 0$ представлены рис. 2

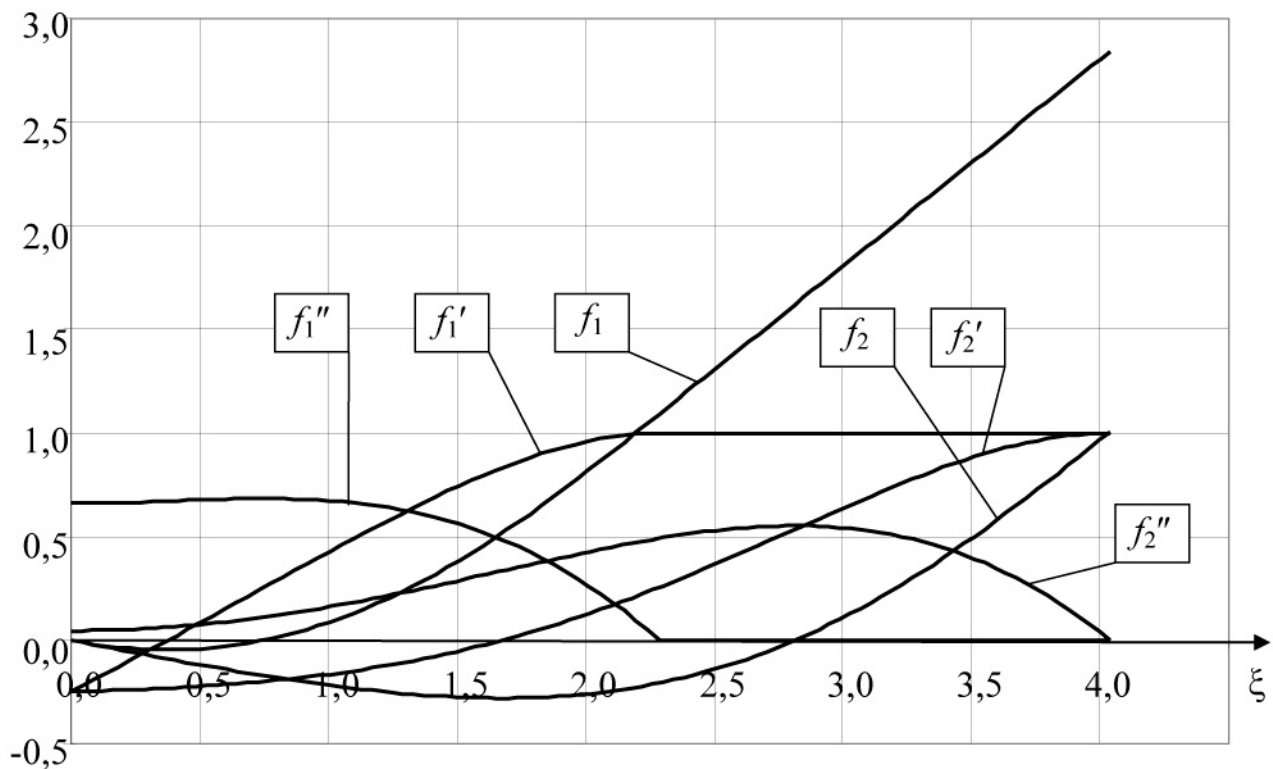


Рис. 2. Графики решений, их первых и вторых производных при $\lambda > \lambda_0 \approx 0,457$

2) Для значений $\lambda < \lambda_0 \approx 0,457$ решения имеют *разный* вид.

Первое решение имеет прежний качественный вид

$$f_1 = \begin{cases} C_1 e^{-\xi} + C_2 e^{\frac{\xi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \alpha\right), & 0 \leq \xi \leq \xi_+ \\ f_0 + \xi - \xi_+, & \xi > \xi_+ \end{cases}$$

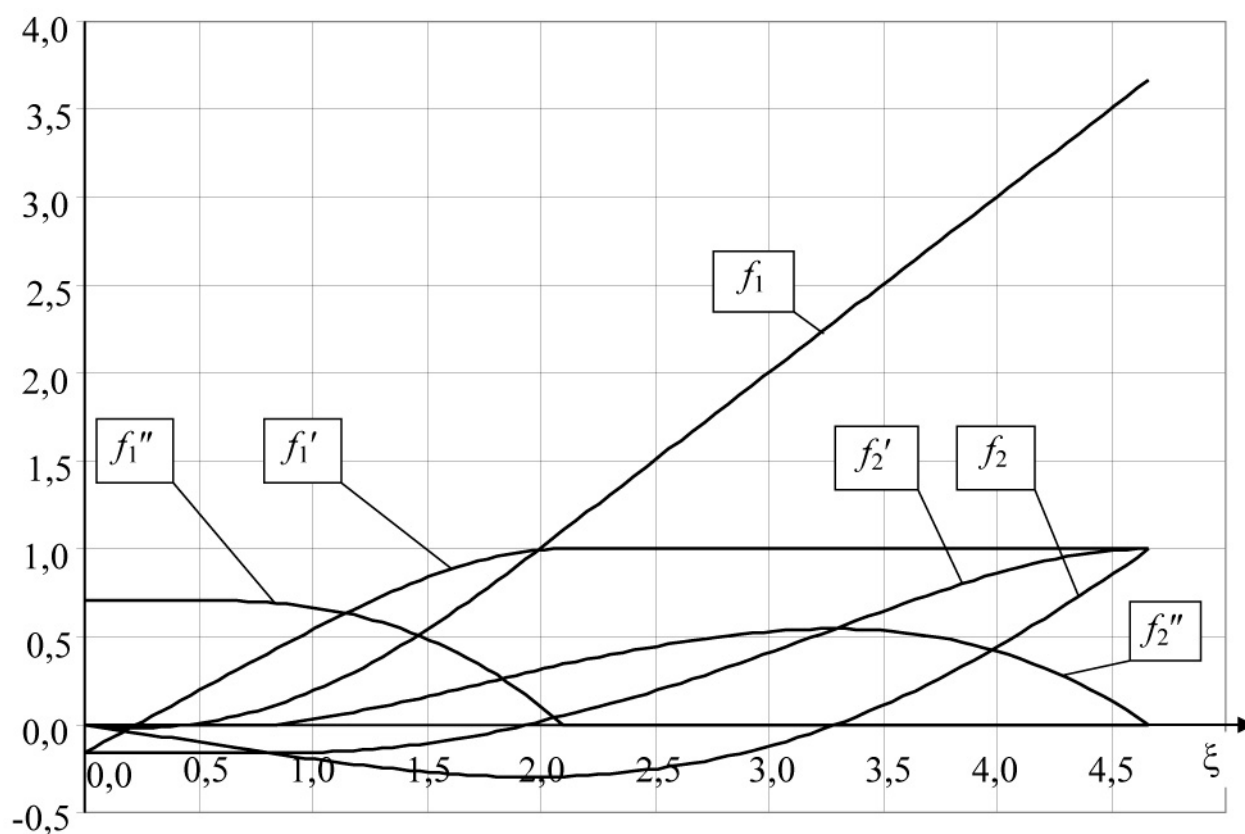


Рис. 3. Графики решений, их первых и вторых производных при $\lambda < \lambda_0 \approx 0,457$.

Второе решение является «составным»

$$f_2 = \begin{cases} -\lambda^2 \xi, & 0 \leq \xi < \xi_0 \\ C_1 e^{-\xi} + C_2 e^{\frac{\xi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \xi + \alpha\right), & \xi_0 \leq \xi \leq \xi_+ \\ f_0 + \xi - \xi_+, & \xi > \xi_+ \end{cases}$$

Например, при $\lambda = 0,4$ первое решение

$$f_1 \approx \begin{cases} 0,2877 \cdot e^{-\xi} - 0,4256 \cdot e^{\frac{\xi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \xi + 2,399224\right), & 0 \leq \xi \leq 2,0999 \\ \xi - 0,9942, & \xi > 2,0999 \end{cases}$$

второе решение

$$f_2 \approx \begin{cases} -0,16 \cdot \xi, & 0 \leq \xi < 1,0561 \\ -0,00861 \cdot e^{-\xi} + 0,11203 \cdot e^{\frac{\xi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \xi + 3,2899\right), & 1,0561 \leq \xi \leq 4,6654 \\ \xi - 3,6657, & \xi > 4,6654 \end{cases}$$

Графики решений во втором случае, их первых и вторых производных вблизи точки $\xi = 0$ представлены на рис. 3

Таким образом, приведенные примеры показывают, что на основе применения модели дилатантной жидкости можно эффективно демонстрировать качественные методы анализа нелинейных процессов переноса, так как имеется одновременная возможность построения аналитических решений.

Литература.

1. Жижин Г.В., Уфимцев А.А. О течениях в плоском ламинарном пограничном слое дилатантных жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. №5. С. 164-167.
2. Павлов К.Б., Шахорин А.П. К вопросу о пространственной локализации ламинарного пограничного слоя в неньютоновской дилатантной жидкости // Изв. АН . МЖГ. 2007. №1. С. 51-57.
3. Черный Г.Г. Пограничный слой на пластине с подвижной поверхностью // Докл: АН СССР, 1973. Т. 213. №4. С. 802-803.

About accurate solutions of one special case of the theory of non-linear boundary layer.

77-30569/348389

04, April 2012

Romanov A.S., Semikolenov A.V.

Bauman Moscow State Technical University

rolmal@bk.ru

avsemik@mail.ru

One of the problems of teaching modern sections of natural sciences and mathematics is the absence of illustrative examples of application of the general theory due to complexity of analytical description of events. At the Physics Department of BMSTU the special course “Non-linear transport processes” has been reading for several years as a part of profession “Applied physics”. This article deals with analytical solution of one specific problem of the non-linear boundary layer theory in the non-Newtonian liquid that confirms the general theory.

Publications with keywords: [boundary layer](#), [sharp analytical solution](#), [non Newtonian fluid](#)

Publications with words: [boundary layer](#), [sharp analytical solution](#), [non Newtonian fluid](#)

References

1. Zhizhin G.V., Ufimtsev A.A. O techeniakh v ploskom laminarnom pogranichnom sloe dilatantnykh zhidkosti [About the flow in a plane laminar boundary layer of dilatant fluids]. *Izv. AN SSSR. Ser. Fluid and gas mechanics*, 1977, no.5, pp. 164-167.
2. Pavlov K.B., Shakhov A.P. K voprosu o prostranstvennoi lokalizatsii laminarnogo pogranichnogo sloia v nen'iutonskoi dilatantnoi zhidkosti [On the question of spatial localization of the laminar boundary layer in the non-Newtonian dilatant fluid]. *Izv. AN SSSR. Ser. Fluid and gas mechanics*, 2007, no. 1, pp. 51-57.
3. Chernyi G.G. Pogranichnyi sloi na plastine s podvizhnoi poverkhnost'iu [The boundary layer on a plate with a moving surface]. *Dokl. AN SSSR*, 1973, vol. 213, no. 4, pp. 802-803.