

электронный журнал

МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК

Издатель: ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»

Оценка параметров ориентации космического аппарата с использованием фильтра Калмана

Студент,
кафедра «Системы автоматического управления»: Д.И. Галкин

Научный руководитель: А.А. Карпунин,
к.т.н., доцент кафедры «Системы автоматического управления»

УДК 519.711.2

МГТУ им. Н.Э. Баумана
iu1@bmstu.ru

1. Введение

Ниже приведено описание используемых систем координат:

а) **ОСК:** центр данной системы координат (СК) расположен в центр масс КА; ось Y_O этой системы лежит в плоскости орбиты и направлена от центра Земли к центру масс спутника; ось X_O расположена в плоскости орбиты и направлена в сторону полета; ось Z_O перпендикулярна плоскости орбиты и ее направление таково, что образуется правая система координат.

б) **ССК:** центр данной СК расположен в центр масс КА; ось X_C этой системы направляется по оси продольной симметрии КА; ось Y_C лежит в вертикальной плоскости симметрии; ось Z_C дополняет первые две оси до правой СК.

в) **ИСК:** центр данной СК лежит в центре масс Земли; ось X_H этой системы направлена в точку весеннего равноденствия; ось Z_H направлена по оси вращения Земли; ось Y_H дополняет первые две оси до правой СК.

2. Математическая модель углового движения КА

2.1. Динамика КА

Динамику вращательных движений КА относительно центра масс, если полагать, что аппарат можно представить абсолютно твердым телом, будем описывать динамическим уравнением Эйлера в связанных осях:

$$\bar{M} = \frac{d\bar{H}}{dt} + \bar{\omega}^{иск} \times \bar{H}, \quad (1)$$

где

$\bar{H} = J\bar{\omega}^{иск}$ – вектор кинетического момента космического аппарата;

J – тензор инерции КА;

$\vec{\omega}^{иск}$ – вектор угловой скорости ССК относительно ИСК.

\vec{M} – главный момент внешних сил, равный сумме управляющего ($M_{упр}$) и возмущающего ($M_{возм}$) моментов.

С учетом всего вышесказанного уравнение (1) перепишется в следующем виде:

$$\frac{d\vec{\omega}^{иск}}{dt} = J^{-1} \left(\vec{M}_{упр} + \vec{M}_{возм} - \vec{\omega}^{иск} \times J \vec{\omega}^{иск} \right).$$

2.1.1. Управляющий момент

Управляющий момент, развиваемый УДМ, будем представлять в следующем виде:

$$M_{упр}^i = F_i(\sigma_i) \cdot M_i^{max},$$

где

$F_i(\sigma_i)_{i=x, y, z}$ – закон управления маховиками, представленный на рис. 1;

$\sigma_i = k_i^1 \cdot \varphi + k_i^2 \cdot \omega_i^{иск}$ $_{i=x, y, z}$ $_{\varphi=\gamma, \psi, \vartheta}$ – управляющий сигнал;

k_i^1, k_i^2 $_{i=x, y, z}$ – коэффициенты сигналов управления УДМ;

M_i^{max} $_{i=x, y, z}$ – управляющий момент, который дает маховик при его текущем кинетическом моменте (моментная характеристика используемых маховиков приведена на рис. 2).

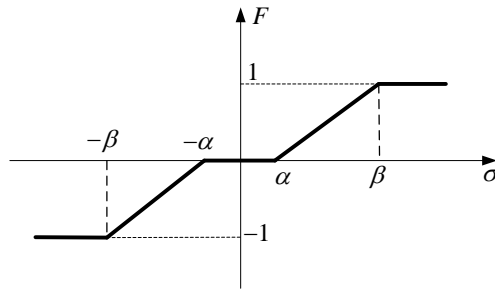


Рис. 1. Линейный закон управления УДМ

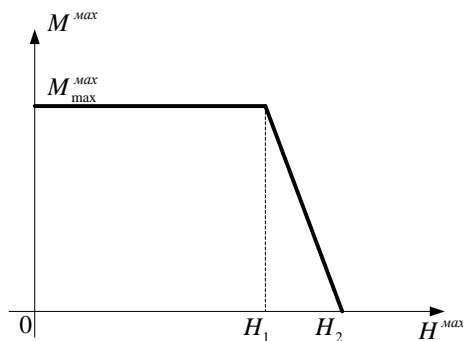


Рис. 2. Моментная характеристика УДМ

2.1.2. Возмущающий момент

В качестве возмущающего момента будем рассматривать только гравитационный момент, который вычисляется по следующей формуле:

$$\bar{M}_{\text{грав}} = \frac{3\mu}{(R+H)^3} ([\bar{\eta} \times J \bar{\eta}]),$$

где

H – высота орбиты;

R – радиус Земли;

μ – гравитационная постоянная для Земли, равная $398600,448 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2}$;

J – тензор инерции КА;

$\bar{\eta}$ – единичный вектор направления от центра Земли, записанный в ССК.

2.2. Кинематика КА

Угловое положение КА будем описывать с помощью кватерниона поворота из ОСК в ССК, матрично-дифференциальное уравнение для которого записывается следующим образом:

$$\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} \Omega \bar{q},$$

где

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z^{\text{ОСК}} & -\omega_y^{\text{ОСК}} & \omega_x^{\text{ОСК}} \\ -\omega_z^{\text{ОСК}} & 0 & \omega_x^{\text{ОСК}} & \omega_y^{\text{ОСК}} \\ \omega_y^{\text{ОСК}} & -\omega_x^{\text{ОСК}} & 0 & \omega_z^{\text{ОСК}} \\ -\omega_x^{\text{ОСК}} & -\omega_y^{\text{ОСК}} & -\omega_z^{\text{ОСК}} & 0 \end{pmatrix};$$

$\bar{q} = (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3)^T$ – кватернион перехода из ОСК в ССК;

q_0 – скалярная часть кватерниона;

$(q_1 \quad q_2 \quad q_3)$ – векторная часть кватерниона.

Зная кватернион поворота, можно найти матрицу перехода от ОСК к ССК:

$$A = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_0) & 2(q_1q_3 - q_2q_0) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_0) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_0) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_0) & 2(q_2q_3 - q_1q_0) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_0^2 \end{pmatrix}.$$

Через эту матрицу легко находятся угловые скорости КА в ОСК:

$$\begin{pmatrix} \omega_x^{\text{ОСК}} \\ \omega_y^{\text{ОСК}} \\ \omega_z^{\text{ОСК}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x^{\text{ИСК}} \\ \omega_y^{\text{ИСК}} \\ \omega_z^{\text{ИСК}} \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega \end{pmatrix},$$

где

Ω – орбитальная угловая скорость КА.

3. Фильтр Калмана

В качестве оцениваемого вектора состояния выберем угловую скорость КА относительно ИСК и векторную часть кватерниона (скалярный компонент может быть найден из условия равенства единице суммы квадратов компонентов кватерниона):

$$x(t) = [q^{\text{ОСК}}(t) \quad \omega^{\text{ИСК}}(t)]_{1 \times 6}^T.$$

Далее запишем краткий алгоритм работы фильтра Калмана (далее априори оценку будем обозначать с верхним индексом «-», а апостериори оценку с верхним индексом «+»).

Наша система описывается уравнением, общий вид которого выглядит следующим образом:

$$\dot{x} = f(x, t).$$

Для работы фильтра Калмана требуется линеаризованная модель. Поэтому сначала мы находим матрицу частных производных по формуле (2) и далее уже определяем переходную матрицу состояния по формуле (3).

$$F_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{i, j=1 \div 6}; \quad (2)$$

$$\Phi_k \approx I + F(x_k^+, t_k) \cdot \Delta T, \quad (3)$$

где

I – единичная матрица размерности 6×6 ;

ΔT – шаг интегрирования.

На следующем шаге определяются априори оценки вектора состояния и ковариационной матрицы ошибки вектора состояния (матрица P) по формулам (4) и (5) соответственно.

$$\hat{x}_k^- = \Phi_{k-1} \cdot \hat{x}_{k-1}^+; \quad (4)$$

$$P_k^- = \Phi_{k-1} \cdot P_{k-1}^+ \cdot \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}, \quad (5)$$

где

Q_{k-1} – ковариационная матрица модели движения на предыдущем шаге.

Следующим шагом после нахождения априори значений данных величин является нахождение их апостериори оценок. Эта оценка находится по следующим выражениям:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + \bar{K}_k \cdot [z_k - H \cdot \hat{x}_k^-];$$

$$P_k^+ = (I - \bar{K}_k \cdot H_k) \cdot P_k^-,$$

где

\bar{K}_k – матрица коэффициентов обратной связи на шаге k , определяемая по формуле

$$\bar{K}_k = P_k^- \cdot H_k^T \cdot [H_k \cdot P_k^- \cdot H_k^T + R_k]^{-1};$$

z_k – вектор измерений на k -ом шаге;

H_k – матрица чувствительности;

I – единичная матрица размерности 6×6 ;

R_k – ковариационная матрица шумов измерений на k -ом шаге.

При этом модель измерений в нашем случае представляет собой векторную часть кватерниона, которая находится как сумма истинного значения векторной части кватерниона и белого шума определенной амплитуды:

$$z_k = q_k + v_k.$$

Матрица чувствительности при этом имеет следующий вид:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Результаты моделирования

Результаты моделирования представлены на рис. 3 и 4. При этом матрицы R и Q принимались как постоянные величины. Параметры моделирования представлены ниже:

- Тензор инерции: $J = \text{diag}(50, 70, 80)$.
- Высота орбиты: $H = 500$ км.
- Параметры закона управления: $\alpha = 0,005^\circ$, $\beta = 0,8^\circ$.
- Параметры для линейного управляющего момента маховиков:
 $k^1 = 2$; $k^2 = 2$ с.
- Начальные условия для движения МКА:
 $\omega^{\text{оск}} = (0,02 \quad 0,05 \quad -0,02)^T$, град/с;
 $(\gamma \quad \psi \quad \vartheta)^T = (0,6 \quad -0,4 \quad 0,2)^T$, град.
- Параметры шума звездного датчика (максимальная амплитуда белого шума):
 $\sigma_q = 30''$.
- Ошибки в задании начального вектора состояния для фильтра Калмана:
 $\Delta\alpha = 0,15^\circ$ – по определению ориентации, $\Delta\omega = 0,1\%$ – по определению угловой скорости. Это максимальные ошибки в задании начального вектора состояния.
- Частота опроса датчиков (шаг моделирования):
 $f = 10$ Гц.
- Время моделирования:
 $T = 30$ с.

По результатам моделирования можно сделать вывод, что точность оценки угловых скоростей и углов равны соответственно $10^{-3}\%$ и $5 \cdot 10^{-3}\%$.

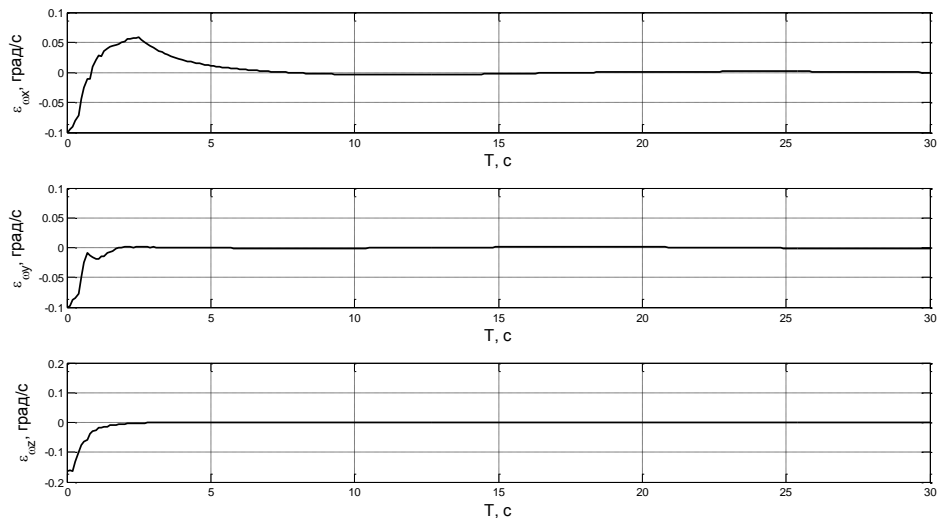


Рис. 3. Ошибки оценки фильтром Калмана угловых скоростей

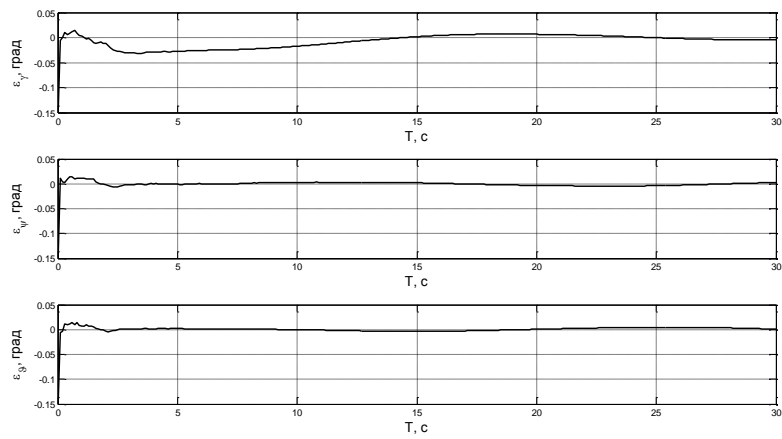


Рис. 4. Ошибки оценки фильтром Калмана углов

Литература

1. Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. Алгоритм оценки параметров ориентации малого космического аппарата с использованием фильтра Калмана. – М., 2009. – 32 с. (Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН).
2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
3. Консультационный центр MatLab компании Softline. – URL: <http://matlab.exponenta.ru>. Дата обращения: 07.11.2011.
4. Амелькин Н.И. Динамика твердого тела. – М.: МФТИ, 2000. – 80 с.
5. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1975. – 248 с.