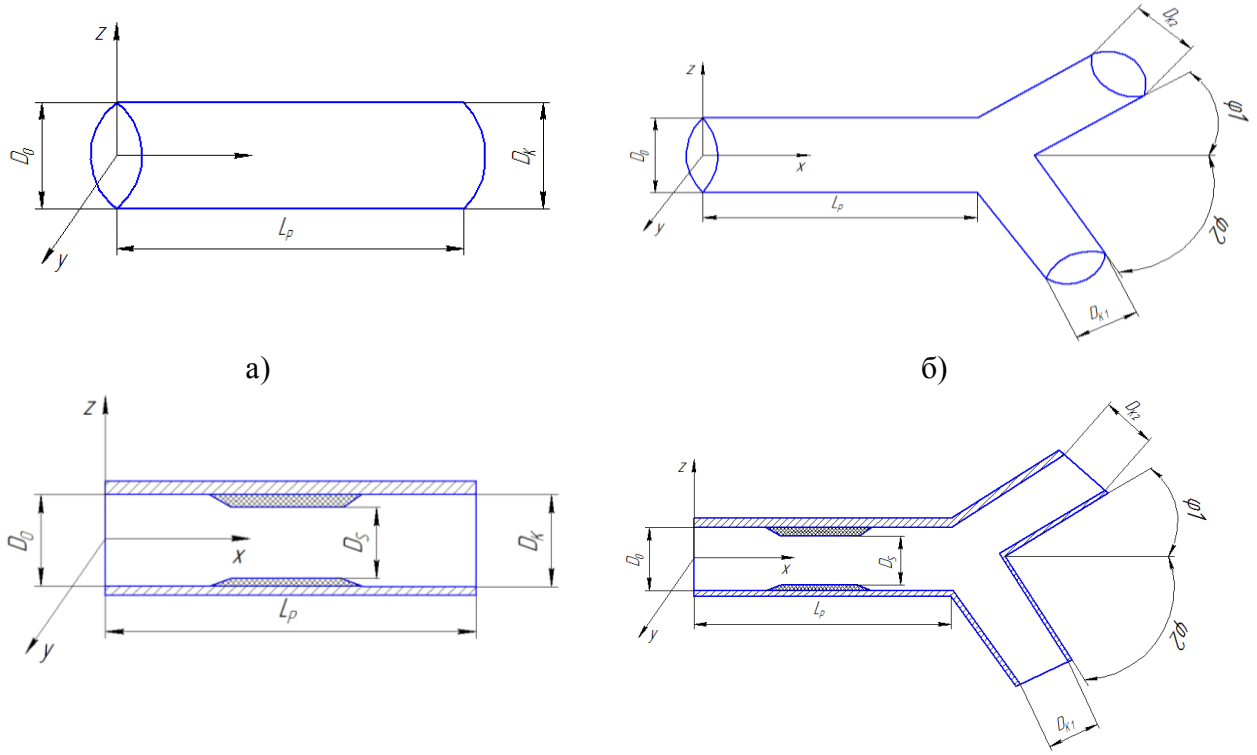
электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»

Численное моделирование коронарного кровотока

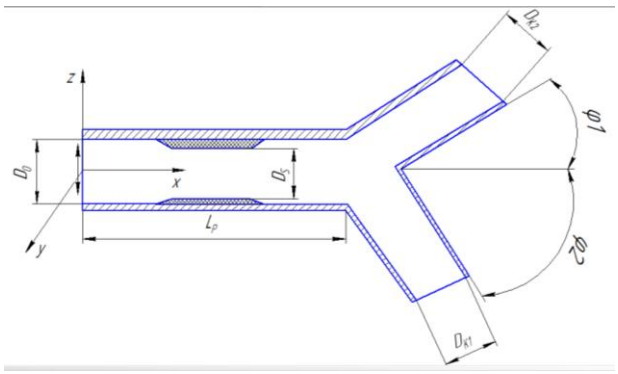
Зарецкий Алексей Петрович,
a.p.zaretskiy@gmail.com
МГТУ им.Н.Э.Баумана

В современной кардиологической практике одной из основных проблем является невозможность экспериментального определения состояния коронарного сосуда при различных его поражениях, в том числе и при наиболее распространенном заболевании - стенозе. В связи с этим необходимым является введение количественного критерия реального распределения потока в сосуде от теоретического (Пуазейлевского распределения потока).

При моделировании коронарных сосудов можно выделить следующие типовые конфигурации, представленные на Рисунке 1.



а) б) в) г)



д)

Рисунок 1 – Модели сосудов: а)простейшая цилиндрическая; б)с бифуркацией; в)с учётом стеноза; г)с учётом бифуркации и стеноза; д)с учётом бифуркации, стеноза и пульсации стенок. D_0 – диаметр сосуда в начале сосуда, L_P – длина участка с Пуазейлевским распределением скоростей, $D_{K,K1,K2}$ – диаметры на конце участка, D_S – диаметр на участке со стенозом φ1,2 – бифуркационные углы.

Рассмотрим конфигурацию сосуда 1а. Данную конфигурацию сосуда можно промоделировать осесимметричным каналом переменного радиуса с твердыми стенками. [3] Кровь считается ньютоновской жидкостью. Радиус канала — известная функция продольной координаты $r = f(x)$, длина канала — L. Представленный метод позволяет не проводить дополнительные итерации на каждом шаге по времени для определения граничного условия для вихря скорости на твердой поверхности.

Рассмотрим стабилизированное течение в круглой цилиндрической трубе, ось которой совпадает с осью x. Компоненты скорости вдоль осей x, y, и z обозначим через u, v и w. Кинематическую вязкость обозначим через v, давление — P. Стабилизированным течением называют такое стационарное течение, при котором скорость потока и профиль скорости не зависят от продольной координаты. Если направление движения совпадает с осью x , то проекции скорости на оси z и y равны нулю, а проекция на ось x будет зависеть только от y и z . Такое движение имеет место в цилиндрической трубе на значительном расстоянии от входа. В общем случае $u = u(x, y, z)$, $w = v = 0$, $p = p(x, y, z)$. Из уравнения неразрывности следует $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, поэтому получаем $u = u(y, z)$ — условие стабилизированного движения.

Уравнение Навье — Стокса в проекциях на оси имеет вид:

$$\begin{cases} \upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Исходя из биомеханических условий реальной задачи, $\frac{\partial p}{\partial x} = const$, тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

Перейдем к цилиндрической системе координат: $x = x$, $y = r\cos\phi$, $z = r\sin\phi$, тогда уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3)$$

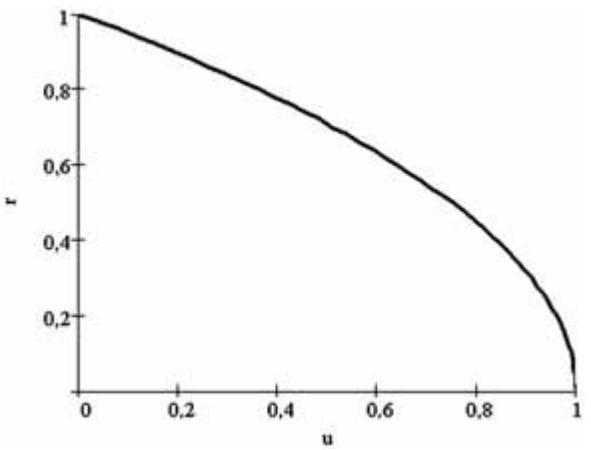


Рисунок 2 - Безразмерный профиль Пуазейля

Таким образом, после нормировки коэффициентов и решением метода Лапласа, получаем выражения для:

потока – $Q = \frac{\pi}{8\mu}\frac{\Delta p}{l}\left(\frac{d}{2}\right)^4$, (4)

средней скорости потока - $u_{\text{ср}} = \frac{\Delta p}{8\mu l}\frac{d^2}{4}$, (5)

где l – длина исследуемого участка.

Рассмотрим влияние учёта упругости сосуда на его гидродинамические показатели. Как правило, сосуд рассматривается как толстостенный цилиндр из ортотропного гиперупругого материала, подверженный начальным продольным и окружным деформациям. На жидкость воздействует периодически изменяющийся градиент давления. Рассмотрим решение данной задачи. Результирующая система нелинейных дифференциальных уравнений раскладывается в ряд по последовательности ортонормированных функций радиальной координаты. Частные производные по продольной координате приближаются центральными разностями второго порядка точности. Полученная задача Коши решается методом Рунге — Кутта или Адамса при известных начальных и конечных условиях. Достоверность результатов проверяется на модели движения вязкой жидкости в деформируемом сосуде. Рассматривается достаточно длинный (по отношению к диаметру) участок прямой трубки с круговым сечением и жесткими стенками. Трубка заполнена вязкой несжимаемой ньютоновской жидкостью, подверженной периодически изменяемому градиенту давления.

Исходя из заданных условий, уравнение Навье-Стокса примет следующий вид:

$$\frac{\partial w}{\partial P} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\alpha^2 a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial w}{\partial \eta}\right), \quad (6)$$

примем $\frac{\partial P}{\partial x} = Ae^{it}$, где A = const, тогда $w(\eta,t) = w_1(\eta)e^{it}$, после чего можно записать:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial w_1}{\partial \eta} - i\alpha^2 a^2 w_1 = A\alpha^2 a^2 \quad (7)$$

после интегрирования получаем:

$$w = Re\left\{\frac{A}{i}\left(1 - \frac{J_0(\alpha i^{3/2}\eta)}{J_0(\alpha i^{3/2})}\right)e^{it}\right\}, \quad (8)$$

где Re{} – действительная часть выражения, J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Для приложенного градиента давления при A = 1 и значения параметра Уомерсли α=3,34 точное решение, вычисляемое по формуле, представлено на Рисунке 3.

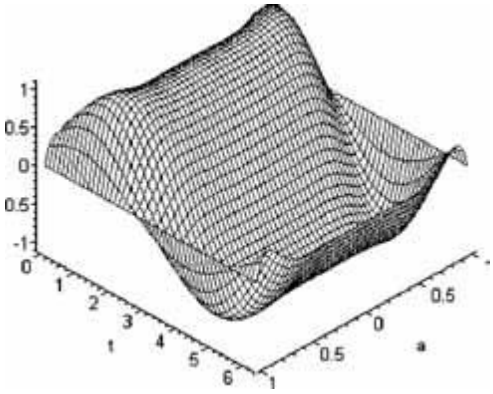


Рисунок 3 - Продольная скорость потока в жесткой трубке как функция времени и радиальной координаты, вычисленная аналитическим методом

Используемый метод (комбинирование разложения Галеркина по радиусу с приближением производных по продольной координате x конечными разностями) позволил существенно сократить размерность системы и вычислительные затраты, так как для получения необходимой точности результата достаточно 4–6 слагаемых ряда. С ростом N повышается точность расчетов, но и растет размерность системы уравнений.

Используя коэффициент потерь, возникающий в следствие упругости стенки сосуда, получаем выражение для потока:

$$h = \frac{68}{Re}\ , \ [1] \qquad (9)$$

$$Q_{\text{упр}} = (1-h)\frac{\pi}{8\mu}\frac{\Delta p}{l}\left(\frac{d}{2}\right)^4\ . \qquad (10)$$

На Рисунке 4 представлены графические зависимости потоков от диаметра сосуда без учёта упругости стенок сосуда и с ней, соответственно.

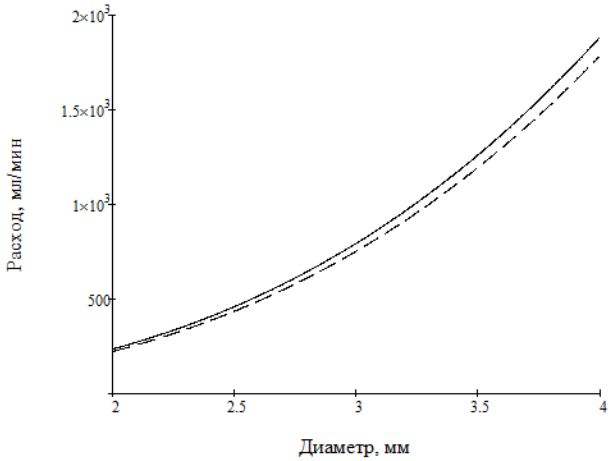


Рисунок 4 – Расход в коронарном сосуде с учётом упругости стенок (пунктирная линия) и без (сплошная). (Re = 1300)

Как видно из графика, учёт упругости стенки коронарного сосуда существенным образом не влияет значение объёмного потока крови (δ_{max} = 5%). Полученные данные можно объяснить незначительным изменением диаметров сосудов (< 3мм) на всей протяжённости, а также малым изменением давления на входе и выходе сосудов. Таким образом, учёт

упругости стенок сосуда существенным образом не влияет на моделирование коронарного кровотока и процессов в нём.

Литература

1. Механика кровообращения: Пер. с англ. / К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер,У. Сид. — М.: Мир, 1981.
2. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов: Пер. с англ. —М.: Мир, 1983.
3. Голядкина А.А.,Кириллова И.В., Щучкина О.А.. Анализ напряжённо-деформированного состояния и гемодинамики коронарных артерий и желудочков сердца человека//Вестник Сам. гос.техн.ун-та, №3, 2011, стр.79-88
4. Воеводин А.Ф., Долбин Г.Е. Метод расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в переменных вихрь — функция тока //Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики.Доклады 3-й Всероссийской научной конференции. — 2003.
5. Kim H. J., Vignon–Clementel I.E., Coogan J. S., Figueroa C.A., Jansen K. E., Taylor C.A. Patient-Specific Modeling of Blood Flow and Pressure in Human Coronary Arteries // Ann.Biomed. Eng., 2010. Vol. 38, no. 10. Pp. 3195–3209