электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл № ФС77-51038.

УДК 517.977.1
01.01.02

Синтез ограниченного управления для системы осцилляторов

 # 08, август 2012

Федоров А. К.

Студент, 3 курс,
кафедра «Защита информации»,
лаборатория механики управляемых систем,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Научный руководитель: Овсеевич А.И.
д.ф.-м.н., в.н.с. лаборатории механики управляемых систем
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
bauman@bmstu.ru

Введение. Одной из основных задач в математической теории управления является построение синтеза для различных типов колебательных систем. Классическим достижением теории управления является аналитическое решение задачи о быстрейшем успокоении линейного осциллятора [1, 2]. В данной работе рассмотрена следующая по сложности задача успокоения двух и более линейных осцилляторов, связанных общим ограниченным управлением (продолжение работы [3]). В этом случае трудно рассчитывать на аналитическое построение оптимального синтеза, и даже нахождение численного решения — непростая задача.

Поэтому ищется неоптимальное управление по обратной связи, приводящее систему в состояние равновесия. Полученное управление не совсем лишено признаков оптимальности: отношение времени приведения в нуль с помощью этого управления к минимально возможному близко к 1, если начальная энергия системы достаточно велика.

В настоящей работе рассматривается задача о быстрейшем успокоении системы N линейных осцилляторов

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = y_i, \\ &\dot{y}_i = -\omega_i^2 x_i + u, \quad |u| \le 1, \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{1}$$

с особым вниманием к случаю $N = 2$. Мы предполагаем, что нет никаких резонансов, т.е. нетривиальных соотношений между частотами вида

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \omega_i = 0, \quad 0 \ne m = (m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{Z}^N \tag{2}$$

где m — целочисленный вектор. При $N = 2$ это означает, что отношение частот иррационально.

Механической моделью для (1) служит система из N маятников, подвешенных к тележке рис.1 G, передвигающейся с ускорением u (рис. 1).

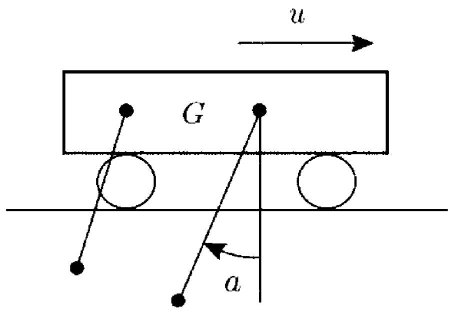

Рис. 1. Механическая модель системы

Задача оптимального быстродействия. Предположим, что нам необходимо перевести систему (1) в терминальную точку за кратчайшее время. Это частный случай задачи быстродействия для линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad |u| \leq 1,$$

где матрица A и вектор B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -\omega_1^2 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -\omega_N^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Как известно, решение линейной задачи быстродействия полностью сводится к краевой задаче принципа максимума Понтрягина, отвечающей гамильтониану

$$h(x,p) = (Ax,p) + (Bu,p) - 1,$$

где круглые скобки обозначают скалярное произведение. Задача имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu, \quad \dot{p} = -A^* p, \\ &u = \operatorname{sign}(B^* p), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = h(x,p) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, приходится иметь дело с нелинейной краевой задачей $(4N)$-го порядка. Она сводится к решению системы $2N+1$ трансцендентных уравнений для составного $(2N+1)$-мерного вектора, что не просто до такой степени, что более разумно подумать о приближенных методах.

Предлагаемый метод. В данной работе предлагается метод построения квазиоптимального синтеза управления системой (1), основанный на сочетании трех стратегий управления. Первоначально, на большом времени и при больших энергиях, используется управление, основанное на известной [4, 5] асимптотической теории областей достижимости линейных систем. Найденное управление применимо и при малых энергиях, но его квазиоптимальные свойства при этом теряются. Кроме того, это управление действует на систему как сухое трение, поэтому в некоторых состояниях не дает возможности двигаться вовсе, т.е. возникают зоны застоя; чем больше верхняя граница для управления, тем больше эти зоны. По мере уменьшения энергии, используется аналогичное управление с уменьшенной верхней границей. Тем самым достигается некоторое уменьшение зоны застоя.

На последнем, третьем этапе используется общий подход к построению локального синтеза, основанный на методе общей функции Ляпунова [6, 7]. Этот метод работает в достаточно малой окрестности нуля. Для того чтобы попасть в эту окрестность нужно, чтобы она содержала внутри себя зоны застоя предшествующего управления. Достигнутое на втором этапе управления уменьшение зоны застоя оказывается для этого достаточным.

Управление системой при больших энергиях. Геометрическая интерпретация принципа максимума состоит в том, что импульс (вектор сопряженных переменных) p в точке x представляет собой внутреннюю нормаль к области достижимости $D(T(x))$. Здесь $T(x)$ — время достижения нуля исходя из x, а $D(T)$ — множество точек, достижимых из нуля за время T. Мы хотим использовать в качестве импульсов нормали к приближенной области достижимости. Это возможно сделать благодаря асимптотической теории областей достижимости линейных систем, развитой в [4].

Один из основных результатов [5], примененный к нашей системе, состоит в следующем: пусть импульс p записан в виде $p = (p_i)$, где $p_i = (\xi_i, \eta_i)$; ξ_i — переменная, двойственная к x_i; η_i — переменная, двойственная к y_i. И пусть

$$z_i = \sqrt{\eta_i^2 + \omega_i^{-2}\xi_i^2}.$$

Тогда опорная функция H области достижимости $D(T)$ имеет асимптотику вида

$$H_T(p) = T \oint \left| \sum_{i=1}^{N} z_i \cos\varphi_i \right| d\varphi + o(T), \tag{3}$$

где введено обозначение:

$$\oint f(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(x)\, dx_1 \dots dx_N.$$

Ключевым для справедливости формулы (3) является условие отсутствия резонансов (2). Опорная функция любого подмножества определяется по формуле

$$\mathcal{H}_\Omega(\xi) = \sup_{x\in\Omega}(\xi, x).$$

Идея приближенного метода построения синтеза управления состоит в том, чтобы использовать в качестве приближения к области достижимости $D(T)$ множество, где опорная функция выпуклого компакта задается главным членом асимптотики (3):

$$H(z) = \oint \left| \sum_{i=1}^{N} z_i \cos\varphi_i \right| d\varphi.$$

Если фазовый вектор лежит на границе, то справедливо следующее уравнение для опорной функции:

$$T^{-1}x = \frac{\partial H(p)}{\partial p}. \tag{4}$$

Предлагаемое «квазиоптимальное» управление задается следующей формулой:

$$u(x) = -\operatorname{sign}(B^* p(x)).$$

Эффективное вычисление управления. Заметим, что предыдущее обсуждение касается системы из произвольного количества N осцилляторов, связанных общим управлением. Случай $N = 2$, однако, является выделенным, поскольку только в этом случае можем эффективно решать уравнение (4). В координатной форме оно имеет вид:

$$T^{-1}(x_i, y_i) = z_i^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial z_i}\right) \left(\frac{\xi_i}{\omega_i^2}, \eta_i\right).$$

Определим энергетический вектор

$$e_i = \sqrt{\omega_i^2 x_i^2 + y_i^2}$$

и получим в качестве следствия уравнения (4) следующее соотношение:

$$T^{-1} e_i = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z_i},$$

имеющее [5] единственное решение, при этом правую часть можно рассматривать как некоторую функцию g, процедура вычисления которой фактически описана выше. Считая g_i известной, получим окончательную форму:

$$(\xi_i,\, \eta_i) = \frac{z_i}{T g_i}(\omega_i^2 x_i,\, y_i).$$

Управление в таком случае имеет вид:

$$u(x) = -\operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^{N} g_i^{-1} z_i y_i\right).$$

При $N = 1$ управление имеет вид сухого трения; в дальнейшем используется управление

$$u_U(x) = U u(x), \quad |U| \le 1.$$

Теорема 1. Производные от опорной функции H по параметру z, т.е. интегралы

$$\frac{\partial H}{\partial z_1} = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{k \sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}, \quad k = -\frac{z_1}{z_2}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_2} = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi, \tag{6}$$

рассматриваемые как (многозначные) мероморфные функции от k, переходят друг в друга, поскольку при замене $z_1 \to z_2$ происходит замена параметров $k \to k^{-1}$. Их можно интерпретировать как интегралы от мероморфной дифференциальной формы

$$\alpha = \frac{(1 - k^2 x^2)\, dx}{y}$$

на эллиптической кривой

$$E = \{y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)\},$$

взятые по некоторым замкнутым путям γ_i, где γ_1 соединяет $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, а γ_2 соединяет $(-k^{-1}, 0)$ и $(k^{-1}, 0)$. Форма α неголоморфна: имеет полюс 2-го порядка на бесконечности, так что это дифференциал второго рода.

Тогда сама опорная функция имеет вид

$$H = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(z_2^2 - z_1^2)\, d\varphi}{\sqrt{z_2^2 - z_1^2 \cos^2 \varphi}}, \quad |z_1| \le |z_2|$$

и выражается через период *голоморфной* формы $\dfrac{dx}{y}$ на кривой E.

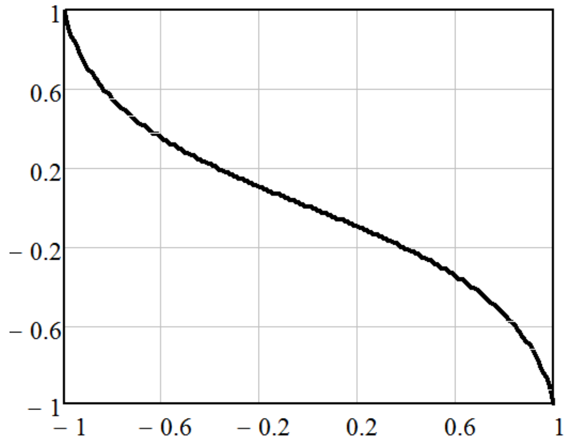

Рис. 2. График функции k — отношение интеграла (6) к интегралу (5)

Ключевое равенство, служащее для определения квазиоптимального управления, имеет вид уравнения для k:

$$\frac{e_2}{e_1} = \int\limits_{\gamma_2} \alpha \Bigg/ \int\limits_{\gamma_1} \alpha,$$

рис.2 график полученной функции представлен на рис. 2.

Синтез вблизи терминальной точки. Идея нашего подхода к построению локального синтеза восходит к [7]. Она использует предварительное приведение системы (1) к некоторому каноническому виду при помощи преобразований

$$A \mapsto A + BC, \quad u \mapsto u - Cx, \quad A \mapsto D^{-1}AD, \quad B \mapsto D^{-1}B, \tag{7}$$

соответствующих добавлению линейной обратной связи и замене координат (калибровке). Сформулируем результат в виде леммы.

Лемма 1. С помощью преобразований (7) система (1) приводится к виду

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & -2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -2N+1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица линейной обратной связи имеет вид

$$C = (c_1 \quad 0 \quad \ldots \quad c_N \quad 0), \quad c_k = (-1)^{N+1}\omega_k^{2N}\prod_{i\neq k}(\omega_i^2 - \omega_k^2)^{-1}.$$

Калибровочная матрица D переводит стандартный базис исходного пространства в базис

$$\mathfrak{e}_i = \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}(A+BC)^{i-1}B, \quad i = 1, \ldots, 2N,$$

и имеет следующий вид. Определим 2×2 матрицы

$$d_{ij} = (-1)^{j-1}\lambda_i^{j-1}\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{(2j-1)!} \\ \dfrac{1}{(2(j-1))!} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_k = \sum_{i\neq k}\omega_i^2.$$

Тогда D является $N\times N$ матрицей (d_{ij}) из 2×2 блоков d_{ij}.

Следуя [6], введем матричную функцию времени, связанную с системой:

$$\delta(T) = \mathrm{diag}(T^1, T^2, \dots, T^{2N})^{-1}.$$

В дальнейшем параметр T станет функцией фазового вектора. Введем матрицы

$$\begin{aligned} &\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}_{ij}), \quad \mathfrak{q}_{ij} = \textstyle\int_0^1 x^{i+j-2}(1-x)dx = [(i+j)(i+j-1)]^{-1}, \\ &\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}^{-1}, \quad \mathfrak{C} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}^*\mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{M} = \mathrm{diag}(1, 2, \dots, 2N) \end{aligned} \tag{8}$$

и управление по обратной связи формулой

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{C}\delta(T(\mathfrak{x}))\mathfrak{x}, \tag{9}$$

где функция T задана неявно уравнением

$$\big(\mathfrak{Q}\delta(T)\mathfrak{x},\ \delta(T)\mathfrak{x}\big) = \kappa^2, \tag{10}$$

значение константы из правой части будет определено позднее.

Теорема 2. Верны следующие утверждения:

a) матрица $\mathfrak{Q}$ из (8) задает общую квадратичную функцию Ляпунова для матриц $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ и $-\mathfrak{M}$;

b) уравнение (10) однозначно определяет функцию T;

c) управление (9) ограничено:

$$|\mathfrak{u}| \le \frac{\kappa}{2}\sqrt{\mathfrak{Q}_{11}};$$

d) управление (9) переводит систему в нуль за время T.

Теорема 3. Матрица $\mathfrak{Q}$ является целочисленной и четной.

Явный вид матрицы $\mathfrak{Q}$ в случае $N = 4$:

$$\begin{pmatrix} 20 & -180 & 420 & -280 \\ -180 & 2220 & -5880 & 4200 \\ 420 & -5880 & 16800 & -12600 \\ -280 & 4200 & -12600 & 9800 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем явный вид уравнения (10):

$$\begin{aligned} T^8 - 20\mathfrak{x}_1^2T^6 + 360\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2T^5 - (2220\mathfrak{x}_2^2 + 840\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3)T^4 + (11760\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 560\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4)T^3 - \\ - (8400\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4 + 16800\mathfrak{x}_3^2)T^2 + 25200\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4T - 9800\mathfrak{x}_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Обозначим точную границу для модуля управления (9):

$$\frac{\kappa}{2}\sqrt{\mathfrak{Q}_{11}} = \kappa\sqrt{5},$$

где κ — константа из (10). Для того чтобы управление было ограничено величиной $1/2$, нужно, чтобы

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Именно такая граница для управления используется на втором и третьем этапе. Для построения локального синтеза, согласующегося с предыдущим управлением необходимо рассмотреть инвариантную область системы.

Теорема 4. Существует инвариантная область для системы (1) вида

$$G_\Theta = \{\mathfrak{x}\colon T(\mathfrak{x}) \leq \Theta\} = \{\mathfrak{x}\colon (\mathfrak{Q}\delta(\Theta)\mathfrak{x},\ \delta(\Theta)\mathfrak{x}) \leq 1\}\,, \tag{11}$$

которая удовлетворяет условиям:

a) область содержит зону застоя предшествующего управления;

b) область содержится в полосе $|Cx| \leq 1/2$, что позволяет на последнем этапе применять управление, ограниченное по модулю величиной $1/2$.

Выводы. Таким образом, построено квазиоптимальное управление, сочетающее в себе три этапа. С использованием асимптотической теории областей достижимости найдено и вычислено первоначальное управление (теорема 1). По мере уменьшения энергии используется аналогичное управление с уменьшенной верхней границей, параметр U определяется теоремой 4. Результаты, сформулированные в лемме 1, теоремах 2 и 3, дают возможность точного приведения системы в терминальную точку.

Ограничения на объем статьи не дают возможности приведения детального доказательства утверждений.

Благодарности. А.К. Федоров выражает глубокую признательность научному руководителю А.И. Овсеевичу за поддержку, помощь и постоянное внимание к работе. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-08-00435 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» № 14.B37.21.0225.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.

2. Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.

3. Федоров А.К. Исследование множества достижимости системы двух осцилляторов // Студенческий научный вестник. 2011. Т. XI, ч. I. С. 190–192.

4. Гончарова Е.В., Овсеевич А.И. Асимптотика множеств достижимости линейных динамических систем с импульсным управлением // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 46–54.

5. Ovseevich A.I. Singularities of Attainable Sets // Russ. J. Math. Phys. 1998. V. 5, No. 3. P. 389–398.

6. Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // ДАН. 2010. Т. 434, № 3. С. 1–5.

7. Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Матем. Сб. 1979. Т. 109 (151), № 4. С. 582–606.