

УДК 531.01/534.112

Вынужденные продольные колебания прямого стержня с сухим трением

07, июль 2012

Сабилов А.Р.

*Студент группы Э8-41,
кафедра «Плазменные энергетические установки»*

*Научный руководитель: Пожалостин А.А.,
д. т. н., профессор кафедры «Теоретическая механика»*

МГТУ им. Н.Э. Баумана
bauman@bmstu.ru

В работе рассмотрены вынужденные продольные колебания прямого стержня с сухим кулоновым трением при различных внешних воздействиях.

Для получения амплитудно-частотной характеристики системы применяется метод собственных функций однородной краевой задачи, который иллюстрируется на примере колебаний однородной консоли.

Кроме этого, продольные колебания стержня заменяются приведенными (эквивалентными) параметрами в виде бесконечной цепочки линейных осцилляторов ($i=1,2,3,\dots$ - номер осциллятора).

Применяя энергетический метод, определяется приведенный коэффициент линейно-вязкого сопротивления для каждого номера i . Отличие от обычного постоянного коэффициента линейного сопротивления состоит в том, что этот коэффициент обратно пропорционален амплитуде вынужденного колебания (отклик системы).

Собственные формы колебаний предполагаются известными. Известно, что система функций обладает полнотой. Поэтому каждая функция, удовлетворяющая условиям Коши-Липшица, может быть представлена в виде разложения по собственным формам однородной краевой задачи.

Основные допущения, при которых получено данное решение, состоят в следующем:

1. Сухое трение считается небольшим
2. Колебания считаются малыми
3. Материал стержня считается изотропным и однородным
4. Деформация поперечных сечений стержня отсутствует и для него предполагается справедлив закон Гука.

Для каждого i -го осциллятора от внешнего воздействия определяется обобщенная сила. Например, в случае сосредоточенной силы используется дельта-функция Дирака.

Дифференциальное уравнение для i -го осциллятора по виду не отличается от уравнения вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы с учетом линейно-вязкого сопротивления.

Для амплитуды и фазы вынужденных колебаний системы при используемом подходе получается аналитическое выражение.

При желании можно это решение уточнить.

Колебательная система изображена на рис. 1.

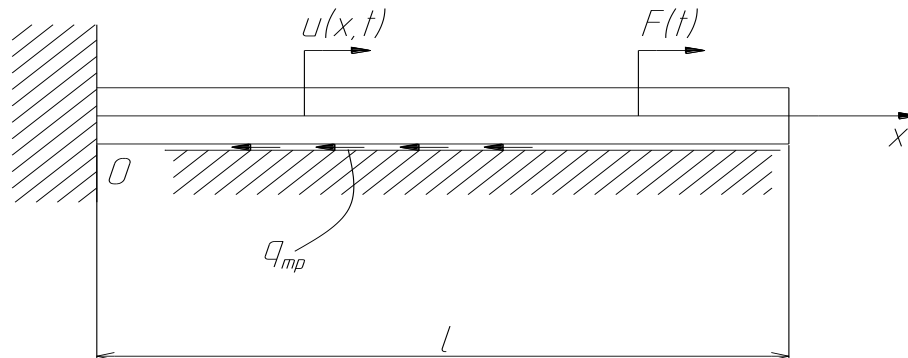


Рис.1

Здесь $u(x, t)$ – перемещение материального сечения стержня, l – его длина, Ox – продольная ось, вынуждающая сила $F(t) = F_0 \cos(pt)$, F_0 – амплитуда силы; p – частота, μ_0 – погонная масса стержня, EF_0 – жесткость в продольном направлении.

На стержень действует кулоновская сила сухого трения. Интенсивность этих сил постоянна и равна $q_{тр} = P\delta/l$, P – вес балки, δ – коэффициент трения первого рода.

Определим на первом этапе собственные функции этой однородной краевой задачи без трения. Дифференциальное уравнение продольных колебаний имеет вид:

$$EF_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Граничные условия: $u(0, t) = 0$, $N(l, t) = 0$ – продольная внутренняя сила. Так как $N = EF_0 \frac{\partial u}{\partial x}$, то второе граничное условие – $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$. Решение этой краевой задачи ищем по методу Фурье в виде:

$$u = X(x)S(t), \quad (2)$$

где $X(x)$ – искомая собственная функция – форма собственного колебания, $S(t)$ – временной множитель. Тогда для функции $X(x)$ имеем уравнение:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (3)$$

где $\lambda^2 = \mu_0 \omega^2 / EF_0$ – собственное значение краевой задачи и уравнение для $S(t)$:

$$\ddot{S} + \omega^2 S = 0 \quad (4)$$

Решение уравнения (3) имеет вид:

$$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) \quad (5)$$

Константы C_1, C_2 определяются из граничных условий:

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X' = \frac{\partial X}{\partial x} \quad (6)$$

Подставим (5) в (6), получим:

$$C_1 = 0, \quad \lambda C_2 \cos(\lambda l) = 0 \quad (7)$$

Система несвободная, поэтому $\lambda \neq 0$ и трансцендентное уравнение ($C_2 \neq 0$) будет:

$$\cos(\lambda l) = 0 \quad (8)$$

Последнее имеет бесконечное множество решений:

$$\lambda_i l = \frac{(2i - 1)}{2} \pi, \quad i = 1, 2, \dots$$

Итак, собственная форма $X_i(x)$ – i -го тона колебаний имеет вид:

$$X_i(x) = \sin(\lambda_i x) = \sin \left[\frac{(2i - 1)}{2} \frac{\pi}{l} x \right], \quad i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Формула $X_i(x)$ обладает условием ортогональности, то есть:

$$\int_0^l \mu_0 X_i(x) X_j(x) dx = 0, \quad i \neq j \quad (10)$$

Построим для искомой колебательной системы приведенную (эквивалентную) систему в виде бесконечной системы осцилляторов (рис.2).

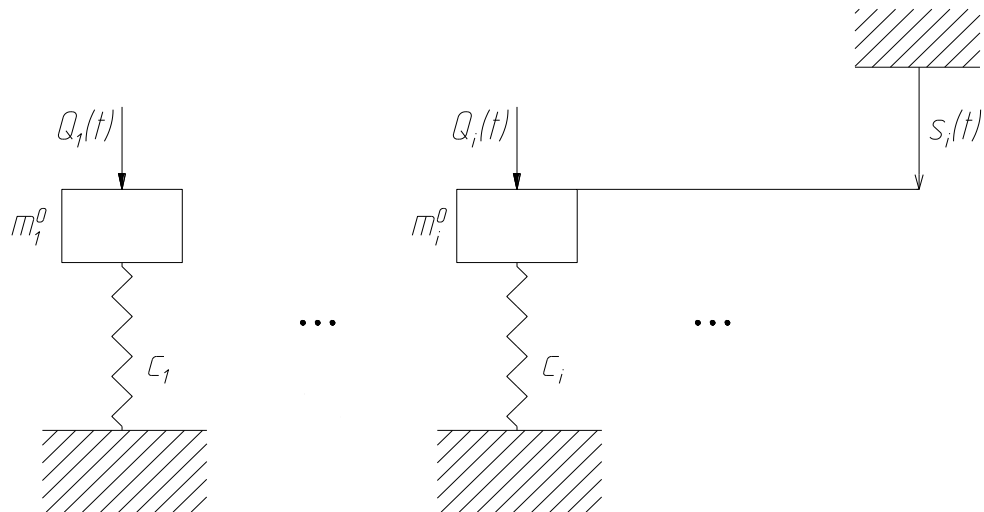


Рис.2

Сравнивая кинетическую и потенциальную энергии системы, постулируем равенство собственных частот исходной системы и системы осцилляторов. Тогда будем иметь:

$$m_i^0 = \int_0^1 f_i^2(x) dx = \frac{\mu_0 l}{2} \quad (11)$$

$$c_i^0 = EF_0 \int_0^1 (f_i')^2 dx = \frac{EF_0}{l} \frac{\pi^2}{8} (2i - 1)^2 \quad (12)$$

где (11) – приведенная масса осциллятора, (12) – приведенная жесткость.

Таким образом, перемещение i -го осциллятора равно перемещению того сечения стержня, которое имеет форму, равную 1.

Разложим силу сухого трения в ряд по X_i :

$$\frac{P}{l} \delta = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin \left[\frac{\pi x}{2l} (2i - 1) \right]$$

Используя условие ортогональности (10), получим:

$$a_i = \frac{4p\delta}{l}$$

Коэффициент вязкого сопротивления μ_i находим из равенства за период вынужденных колебаний $T = 2\pi/p$ работы сил линейно-вязкого сопротивления для каждого номера i и работы сил сухого трения:

$$\int_0^T \int_0^l \mu_i X_i^2(x) A_i^2 p^2 \sin^2(pt + \alpha) dx dt = 4A_i \int_0^l a_i X_i(x) dx$$

Частное решение для вынужденных колебаний считается равным:

$$u_i(x, t) = A_i X_i(x) \cos(pt + \alpha)$$

Отсюда:

$$\mu_i = \frac{P\delta}{A_i \pi^2 l (2i - 1)p}$$

Дифференциальное уравнение для i-го осциллятора:

$$m_i^0 \ddot{y}_i + \mu_i \dot{y}_i + c_i^0 y_i = Q_i(t), \text{ где } Q_i = \frac{\sum_k \overline{F_k}(t) \delta \overline{r_k}^{(\delta q_i)}}{\delta q_i}$$

В каноническом виде полученное уравнение:

$$\ddot{y}_i + 2n_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = h_i \cos(pt + \alpha) \quad (13)$$

Решение (13):

$$y_i = \frac{h_i}{\sqrt{(\omega_i^2 - p)^2 + 4n_i^2 p^2}} \cos(pt + \alpha - \varepsilon)$$

$$h_i = \frac{2F_0 X_i(x)}{\mu_0 l}$$

Окончательно имеем:

$$A_i = \pm \frac{1}{\left[\frac{\pi^2}{4} \frac{(2i-1)^2}{l^2} \frac{EF_0}{\mu_0} - p^2 \right]^2} \sqrt{4 \left(\frac{F_0 X_i(x)}{\mu_0 l} \right)^2 - \left(\frac{P\delta}{\pi^2 R(2i-1)} \right)^2 \frac{4}{\mu_0^2 l^2}}$$

Литература:

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле, ГИФМЛ, Москва, 1959 г. – с. 439.
2. Шиманский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций, Судпромиз, Ленинград, 1963 г. – 253 с.
3. Колесников К.С. Динамика ракет, Машиностроение, Москва, 2003 г. – с. 519.