электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 629.19

Разработка универсального алгоритма определения траектории попадания в Луну для случая центральной траектории подлёта к Луне

 # 05, май 2012

Е.С. Гордиенко(1), В.В. Ивашкин(2)

Студент(1), д. ф.-м.н.,профессор(2),
кафедра «Динамика и управление полётом ракет и космических аппаратов»

Научный руководитель: В.В. Ивашкин,
д. ф.-м.н., профессор кафедры «Динамика и управление полётом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н. Э. Баумана, ведущий научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша

МГТУ им. Н.Э. Баумана
gordienko.evgenyy@gmail.com
jaksonschool@mail.ru

В последние годы задача полёта на Луну вновь приобрела актуальность. Особый интерес учёных направлен на изучение приполярных районов Луны. Их ценность подтверждена недавними научными результатами, согласно которым на полюсах Луны имеются районы с относительно высоким содержанием воды в реголите (несколько процентов по массе) и которые также обладают хорошими условиями по освещенности Солнцем и радиосвязи с Землей. Важным элементом разработки лунного КА является баллистическое проектирование КА, определение его траектории полёта к Луне.

В данной работе представлены результаты первого этапа анализа: исследуется задача попадания космического аппарата (КА) в Луну с низкой промежуточной околокруговой орбиты искусственного спутника Земли с помощью прямого перелёта. Исследуется возможность разработки универсального приближенного алгоритма определения траектории попадания в Луну, его использование в качестве первого приближения для решения точной краевой задачи получения центральной траектории попадания в Луну. Модель перелёта от Земли к Луне показана на рис.1. Построенный алгоритм определения траектории соответствует лекциям Ивашкина В.В. на кафедре СМ-3 за 2011 год [1]. Использовались также работы [2, 3].

Рис.1. Модель перелёта от Земли к Луне.

1. Расчёт траектории в модели точечной сферы действия Луны. Алгоритм первого приближения.

В начале полёта задаемся временем подлёта к Луне t_f. По этому времени определяем соответствующее юлианское время $T_f = \frac{JD-2451545}{36525}$. По нему находим положение Луны на момент подлёта КА к её поверхности: $\bar{R}_M=\{X_M(t_f); Y_M(t_f); Z_M(t_f)\}$. Таким образом, определяем прямое восхождение α_M и склонение δ_M Луны в точке встречи: $\sin(\alpha_M)=\frac{Y_M}{\sqrt{X_M{}^2+Y_M{}^2}}$, $\cos(\alpha_M)=\frac{X_M}{\sqrt{X_M{}^2+Y_M{}^2}}$ и $\sin(\delta_M)=\frac{Z_M}{R_M}$. Промежуточная орбита задаётся высотой H_0 и наклонением i_0, зависящим от космодрома запуска. Задаётся большая полуось a_1 орбиты перелёта к Луне T_1. Это определяет скорость отлёта к Луне V_1, фокальный параметр p_1 орбиты T_1, её эксцентриситет e_1. Далее определяем аргумент широты конечной точки u_f, а затем – аргумент широты начальной точки u_0, время перелёта $(t_f - t_1)$ и момент прохождения перигея τ. Отсюда определяется начальное время t_0 и кинематические параметры КА $\bar{r}_1$, $\bar{V}_1$ при отлёте к Луне. Начальный вектор состояния: положение КА $\bar{r}_1=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ и его скорость $\bar{V}_1=\{V_{x1};V_{y1};V_{z1}\}$ вычисляются в геоцентрической, геоэкваториальной невращающейся системе координат (СК1). Тем самым, полностью определяем начальный вектор состояния КА при отлёте к Луне в приближенной модели точечной сферы действия Луны.

Результаты.

На данном этапе расчётов был принят момент подлёта t_f: *19 часов 12 минут 00.0 секунд 5 сентября 2011 года*, ему соответствует юлианское время $T_f \cong 0.116777549$ *столетий*; тогда $\bar{R}_M=(-25308.473; -354141.368; -147339.658)$ *км* $R_M=384402.917$ *км*; $\alpha_M=265.9132^0$, $\delta_M\cong-22.5379^0$.

Для переходной орбиты принято $H_0=350$ *км*, $i_0=51.6^0$ (Байконур), тогда $\Omega_1\cong 126.7887^0$, $a_1=220000$ *км* (близко к орбите минимальной энергии), $u_f\cong209.291^0$, $\omega_1\cong34.397^0$, $p_1=13250.5092$ *км*, $e_1=0.969418$, $V_1\cong10.80166$ *км/с*, импульс скорости разгона $DV_1\cong3.10066$ *км/с*. Время отлёта от Земли: t_1: *7 часов 57 минут 33.696 секунды 2 сентября 2011 года*, время перелёта t_f-t_1=*3.46836 суток*.

Начальные данные полёта к Луне: $r_1=6728.136$ *км*; $\bar{r}_1=\{-277.053; 6035.122; 2961.14\}$ *км*; $\bar{V}_1 \cong\{-7.49310;-3.42616;6.98503\}$ *км/с*.

2. Методика «точного» расчёта траектории.

а) Модель и уравнения движения КА.

Формула (1) показывает, что уточнённый расчёт траектории производится интегрированием уравнений движения КА с учётом притяжения Земли и её сжатия, притяжения Луны и притяжения Солнца в геоцентрической геоэкваториальной невращающейся системе координат СК1.

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{\mu_E}{r^3}\bar{r} + \sum_{i=1}^{2}\mu_i\left(\frac{\bar{r}_i-\bar{r}}{|\bar{r}_i-\bar{r}|^3} - \frac{\bar{r}_i}{\bar{r}_i^3}\right) + a_E, \qquad (1)$$

где $\bar{r}$-геоцентрический радиус-вектор КА;

μ_E-гравитационный параметр Земли;

μ_i и r_i – гравитационные параметры и радиус-векторы возмущающих небесных тел (Луна, Солнце);

i=1 соответствует возмущениям от притяжения Луны, а i=2 – от притяжения Солнца;

a_E – возмущение из-за сжатия Земли.

При этом координаты Луны определяем по аналитическим формулам [4], для определения координат Солнца на данном этапе использована приближённая модель движения Солнца в плоскости эклиптики по круговой орбите с радиусом, равным 1 а.е.

Для построения движения КА в реальной силовой модели и учёта возмущений разработан алгоритм и построена программа интегрирования уравнений движения КА. Определение траектории в рамках такой, достаточно точной, модели проводилось в два этапа.

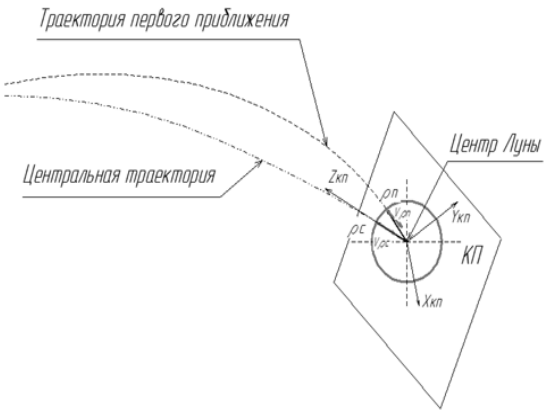
На первом этапе за исходные начальные данные движения КА $t_1, \bar{r}_1, \bar{V}_1$ берутся данные, полученные в приближенной модели точечной сферы действия Луны (п.1). Траектория считается до поверхности Луны интегрированием дифференциальных уравнений движения методом Рунге-Кутта четвёртого порядка с постоянным шагом. В итоге для любой «точной» даты подлёта к Луне траектория на первой же итерации интегрирования устойчиво попадает в диск Луны.

На втором этапе решается задача получения центральной «точной» траектории попадания в Луну. Для этого производится варьирование двух независимых начальных параметров Ω и ω, позволяющих менять составляющие вектора состояния КА в начале и у Луны. При этом решение краевой задачи получения центральной траектории было рассмотрено в двух вариантах: проектированием на Картинную Плоскость (КП) вектора селеноцентрической скорости и вектора прицельной дальности при подлёте к Луне.

б) Решение краевой задачи проектированием вектора селеноцентрической скорости на первую Картинную Плоскость (КП).

Рассмотрим методику перехода от траектории первого приближения к центральной траектории. В данном случае картинная плоскость - это плоскость, перпендикулярная радиус-вектору $\bar{\rho}$ в точке пересечения траектории перелёта с поверхностью Луны. В точке пересечения траектории (для заданных Ω, ω) получаем вектор состояния: $\bar{\rho}=\{x_\rho;\ y_\rho;\ z_\rho\}$ и $\bar{V}_\rho=\{V_{x\rho};\ V_{y\rho};\ V_{z\rho}\}$ - радиус-вектор и вектор скорости в селеноцентрической системе координат, начало которой лежит в центре масс Луны, оси параллельны исходной геоцентрической СК (СК2).

Введём следующим образом правую систему координат СК3 (формула 2), привязанную к первой Картинной Плоскости (КП), показанную на рис.2:



$$\overline{z^o_{кп}} = \frac{\bar{\rho}}{\rho}$$

$$\overline{x^o_{кп}} = \frac{\overline{z^o} \times \overline{z^o_{кп}}}{|\overline{z^o} \times \overline{z^o_{кп}}|} \qquad (2)$$

$$\overline{y^o_{кп}} = [\overline{z^o_{кп}} \times \overline{x^o_{кп}}],$$

где $\overline{z^o}=\langle 0|0|1\rangle$ - орт в СК2.

Рис.2. Модель построения СК3.

Проектируем скорость $\bar{V}_\rho$ на оси СК3 (формула 3):

$$\overline{V}_{xкп} = (\overline{V}_\rho, \overline{x^o_{кп}}); \ \overline{V}_{xкп} = \overline{V}_\rho * \cos(\overline{V}_\rho, \overline{x^o_{кп}});$$
$$\overline{V}_{yкп} = (\overline{V}_\rho, \overline{y^o_{кп}}); \ \overline{V}_{yкп} = \overline{V}_\rho * \cos(\overline{V}_\rho, \overline{y^o_{кп}}); \qquad (3)$$
$$\overline{V}_{zкп} = (\overline{V}_\rho, \overline{z^o_{кп}}); \ \overline{V}_{zкп} = \overline{V}_\rho * \cos(\overline{V}_\rho, \overline{z^o_{кп}}).$$

Давая частные вариации начальным переменным Ω_0 и ω_0, определяем матрицу влияния $A=\begin{bmatrix} \frac{\delta\overline{V}_{xкп}}{\delta W} & \frac{\delta\overline{V}_{xкп}}{\delta\omega} \\ \frac{\delta\overline{V}_{yкп}}{\delta W} & \frac{\delta\overline{V}_{yкп}}{\delta\omega} \end{bmatrix}$. Делаем итерации: $\begin{pmatrix}\delta W \\ \delta\omega\end{pmatrix}_{i+1} = -A^{-1} * \begin{pmatrix}\overline{V}_{xкп} \\ \overline{V}_{yкп}\end{pmatrix}$.

Для центральной траектории $V_{xкп}=V_{yкп}=0$. Поэтому процесс заканчивается, когда $|V_{xкп}|\leq\varepsilon$ $|V_{yкп}|\leq\varepsilon$, где ε=1 мм/с. После первой итерации получаем: $\delta\Omega$=0.0766921 град; $\delta\omega$=-0.0165129 град. Продолжаем итерации до выполнения указанного выше условия.

Метод показал хорошую сходимость. Уже после третьей итерации выполняется условие $V_{xкп}\cong V_{yкп}\cong 0$ с точностью 1 мм/с. При этом окончательно значения первого приближения Ω и ω изменились на $\Delta\Omega_\Sigma$=0.079409535 град и $\Delta\omega_\Sigma$=-0.017287098 град и обеспечили точность по селеноцентрической скорости подлёта $\varepsilon_v=\sqrt{V^2_{xкп}+V^2_{yкп}}$; ε_v=0.707 мм/с.

в) Решение краевой задачи проектированием вектора прицельной дальности при подлёте к Луне на вторую Картинную Плоскость (КП).

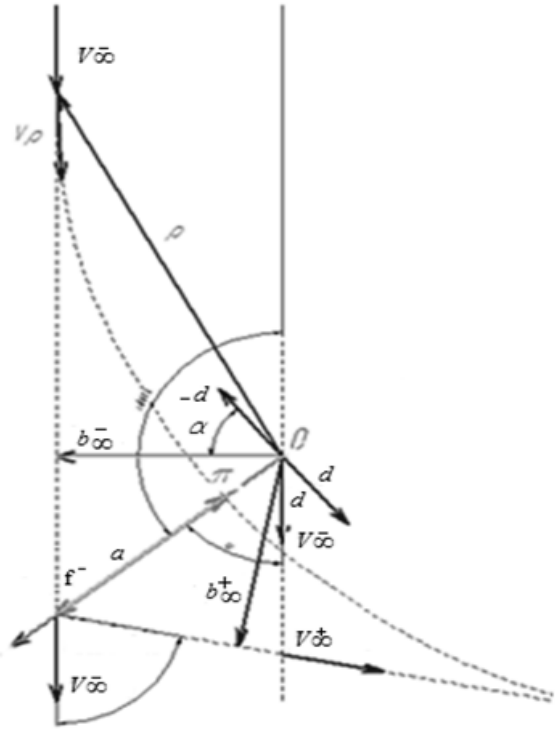


Рис.3. Селеноцентрическая орбита подлёта КА к Луне.

В данном случае систему координат СК4 привязываем к следующей КП: ось OZ (по орту $\bar{k}$) направлена по V_∞^- вектору скорости на бесконечности при подлёте; оси OX и OY (орты $\bar{\imath}$ и $\bar{\jmath}$), лежат в КП, перпендикулярно орту $\bar{k}$ (формула 4):

$$\bar{k}=-\frac{\overline{V_\infty^-}}{V_\infty};$$
$$\bar{\imath}=\frac{-\bar{r}_M-Z_E\bar{k}}{|-\bar{r}_M-Z_E\bar{k}|}; \qquad (4)$$
$$\bar{\jmath}=[\bar{k}\ x\bar{\imath}].$$

Мера центральности здесь определяется вектором прицельной дальности при подлёте, изображённой на рис.3, $\overline{b^-}=\frac{1}{f^2}(c^2\bar{f}-\frac{\mu_M\bar{d}}{\sqrt{h}})$. Этот вектор лежит в плоскости селеноцентрической орбиты, он проходит через центр Луны перпендикулярно вектору скорости подлёта на бесконечности $\overline{V_\infty}^- = \frac{\sqrt{h}}{f^2}(\mu_M\bar{f}+\sqrt{h}d)$, здесь c – константа площадей, h – константа энергии, f – интеграл Лапласа, $\bar{d}=[\bar{c}\ x\ \bar{f}]$, как показано на рис.3.

В итерациях сводим к нулю (с точностью $\varepsilon \leq 1$ м) проекции вектора прицельной дальности при подлёте $\overline{b^{-}}$: $b_x = (\bar{b}, \bar{\imath})$; $b_x = \bar{b} * cos(\bar{b}, \bar{\imath})$; $b_y = (\bar{b}, \bar{\jmath})$; $b_y = \bar{b} * cos(\bar{b}, \bar{\jmath})$.

В конце первой итерации получаем: $\delta\Omega$=0.079381138 град; $\delta\omega$ = - 0.017280163 град. Продолжаем таким образом итерации до достижения следующих условий: $|b_x| \leq \varepsilon |b_y| \leq \varepsilon$ с точностью ε<1 м.

Метод показал очень хорошую сходимость. Уже после второй итерации выполняется условие $b_{хкп} \cong b_{укп} \cong 0$ с ошибкой, меньшей заданной: $\varepsilon_{b2} = \sqrt{b_{хкп}^2 + b_{укп}^2}$; ε_{b2}=80.8085 мм. При этом окончательно значения первого приближения Ω и ω изменились после третьей итерации на $\Delta\Omega_{\Sigma}$=0.079409482 град и $\Delta\omega_{\Sigma}$=-0.017287265 град и обеспечили точность по прицельной дальности при подлёте $\varepsilon_{b3} = \sqrt{b_{хкп}^2 + b_{укп}^2}$; ε_{b3}=4.243 мм. Сравнительные результаты исследования двух методов представлены в Таблице 1.

Таблица 1. Сравнение двух методов решения краевой задачи

	Решение краевой задачи первым методом			
Величина сравнения	Vx, мм/с	Vy, мм/с	Bx, мм	By, мм
III итерация	-0,1	-0,7	-420	-1067
суммарные приращения	$\Delta\Omega_{\Sigma}$, град	0.079409535	$\Delta\omega_{\Sigma}$, град	-0.017287098
	Решение краевой задачи вторым методом			
Величина сравнения	Vx, мм/с	Vy, мм/с	Bx, мм	By, мм
III итерация	-0.001	-0.002	-3	-3
суммарные приращения	$\Delta\Omega_{\Sigma}$, град	0.079409482	$\Delta\omega_{\Sigma}$, град	-0.017287265

На рис. 4 приведена траектория перелета от Земли к Луне в проекции на плоскость XY.

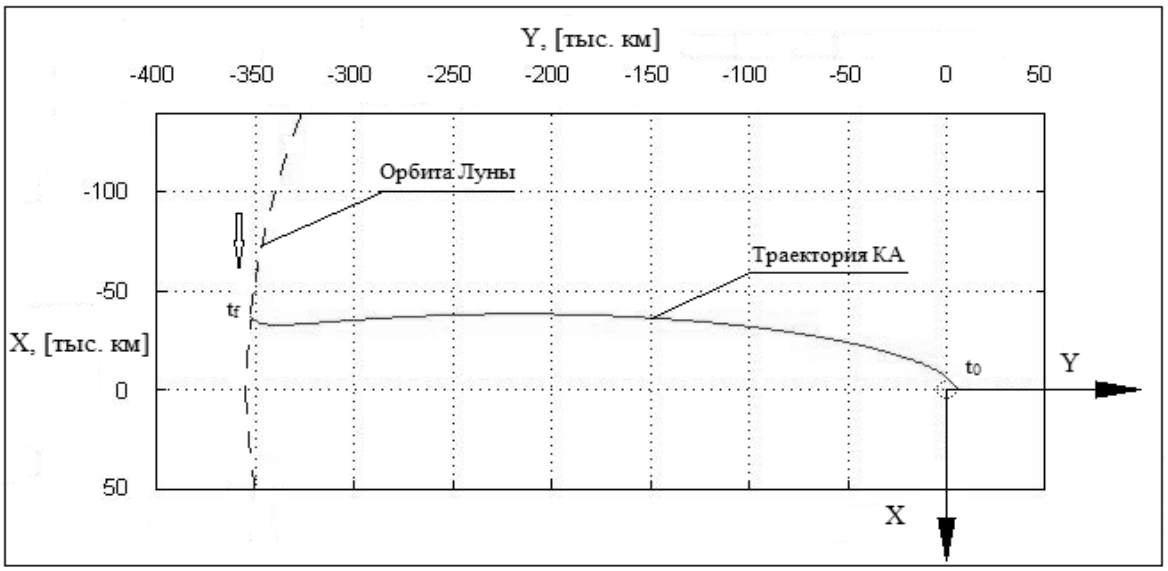


Рис.4. Центральная траектория полёта к Луне с промежуточной орбиты у Земли в проекции на плоскость XY

На рис. 5 приведена траектория перелета от Земли к Луне в проекции на плоскость ZX.

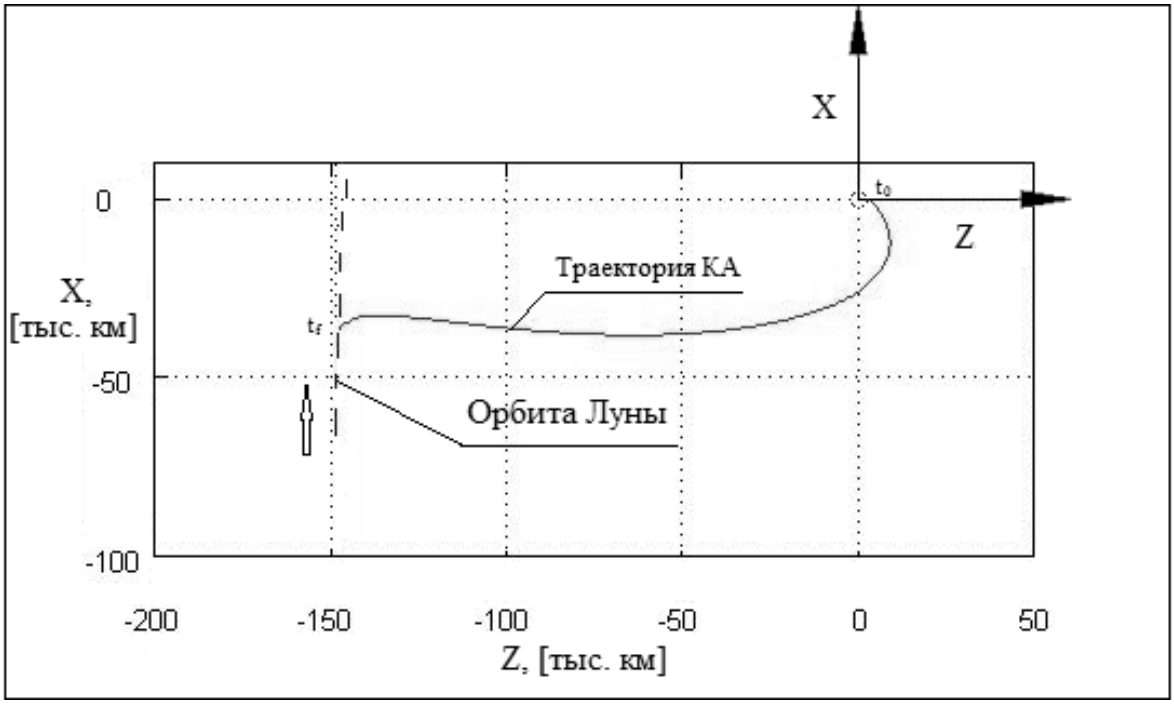


Рис.5. Центральная траектория полёта к Луне с промежуточной орбиты у Земли в проекции на плоскость XZ

3. Выводы:

1. Построен эффективный алгоритм расчёта траектории полёта от промежуточной околокруговой орбиты ИСЗ к Луне с попаданием в неё по центральной орбите, т.е. при скорости подлёта, ортогональной к поверхности Луны.

2. Разработаны два метода решения краевой задачи – по компонентам селеноцентрической скорости подлёта к поверхности Луны и по компонентам вектора прицельной дальности при подлёте к ЕСЗ.

3. Показано, что оба метода дают хорошую сходимость, однако, второй метод (по прицельной дальности) является существенно более эффективным, т.е. требует меньше итераций и даёт более высокую точность, по сравнению с первым методом (по вектору селеноцентрической скорости) при том же числе итераций.

4. Работа будет продолжена для получения траектории перелёта на орбиту ИСЛ.

Литература

1. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1975. 392 с.
2. В.А. Егоров Пространственная задача достижения Луны. М.: «Наука», 1965г. 224 с.
3. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: «Наука», 1990. 448 с.
4. Oliver Montenbruck, Thomas Pfleger Astronomy on the Personal Computer. Springer-Verlag, 2002. 320 p.

77-51038/467776