электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 519.622.2

Оценка эффективности метода bdf при решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

 # 09, сентябрь 2012

Сахаров М.К.

Научный руководитель к.т.н. доцент Маничев В.Б.
МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва, Россия

МГТУ им. Н.Э. Баумана
bauman@bmstu.ru

Введение

Данная работа является продолжением цикла работ посвященных проблемам достоверности и точности решения систем ОДУ в современных CAE подсистемах САПР [1,3,4]. Математическое моделирование процессов и их анализ являются неотъемлемой частью цикла проектирования не только в наукоемких отраслях, но и при производстве продукции массового спроса. В математическом ядре любой CAE подсистемы реализованы различные методы численного интегрирования. Но большинство инженеров проектировщиков не являются специалистами в области численных методов и зачастую не могут оценить адекватность результатов полученных подсистемой. Поэтому, при компьютерном моделировании и анализе разнообразных технических систем и объектов на основе дифференциальных уравнений, предъявляются жесткие требования к эффективности применяемых численных методов.

Постановка задачи

Эффективность численных методов определяется точностью получаемых решений и затратами машинного времени. Рост производительности вычислительной техники, а также развитие «облачных» технологий и технологий удаленного доступа, позволяющих пользователю скромного по вычислительным возможностям персонального компьютера, использовать мощные вычислительные ресурсы современных суперкомпьютеров, выдвигает на первый план именно точность получаемых решений. Не имеет смысла рассматривать эффективность численного метода без учета достоверности выдаваемого им приближенного решения. В CAE-подсистемах должна быть обеспечена полная гарантия достоверности и точности результатов, выдаваемых инженерам-проектировщикам. Конечно, в большинстве случаев, при моделировании реальных технических систем не требуется высокая математическая точность расчетов, но достоверность результатов должна быть соблюдена. Количественно или качественно неверное решение, выданное системой без предупреждения, может привести к неверным расчетам, например, траекторий движения летательных аппаратов и, как следствие, крупным авариям.

Известно, что решение жестких и супержестких систем ОДУ традиционно вызывает затруднения у большинства численных методов. При использовании явных методов, например явного метода Рунге-Кутта, для получения корректного решения необходимо использование очень малого шага, что на порядки увеличивает время вычисления. Адаптивные методы, регулирующие значения шага в процессе решения, также не гарантируют качественно верного решения. Для решения такого рода систем традиционно используются неявные методы, в частности метод BDF (Backward Differntiation Formula).

Метод BDF

Фактически метод BDF это семейство неявных многошаговых методов численного интегрирования, применяемых для решения задач с известными начальными условиями [2]. На практике методы BDF используются в основном для решения жестких систем ОДУ. Рассмотрим такую задачу:

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Общая формула для методов BDF может быть записана следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} \cdot y_{n+1-i} = h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1}) \tag{2}$$

где h - это шаг интегрирования, a_{k-i} – коэффициент, k определяет порядок полинома аппроксимации и соответственно количество интерполируемых точек до t_{n+1}. К примеру:

$$k = 1: \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1}) \tag{3}$$

$$k = 2: \quad y_{n+1} = \frac{4}{3} y_n - \frac{1}{3} y_{n-1} + h \cdot \frac{2}{3} f(t_{n+1}, y_{n+1}) \tag{4}$$

$$k = 3: \quad y_{n+1} = \frac{18}{11} y_n - \frac{9}{11} y_{n-1} + \frac{2}{11} y_{n-2} + h \cdot \frac{6}{11} f(t_{n+1}, y_{n+1}) \tag{5}$$

При $k=1$ получаем неявный метод Эйлера, при $k=2$ - метод BDF-2 и т.д. Отметим что с ростом k область устойчивости метода уменьшается. Так как метод неявный то на каждом шаге интегрирования необходимо решать систему нелинейных уравнений. Обычно для этих целей используется модифицированный метод Ньютона.

Набор тестовых задач

В данной работе набор тестовых задач состоит из 4 систем ОДУ [1]. Эти системы имеют известное асимптотическое или аналитическое решение. Первый тест – классическая задача Ван дер Поля – жесткая система второго порядка. При тестировании использовались два значения параметра жесткости $MU=10^6$ и $MU=10^9$. Второй тест – пример моделирования сверхколебательной электронной схемы – нежесткая система пятого порядка. Тестирование проводилось для часто встречающихся на практике параметров масштабных коэффициентов $kt=1,\ ki=1,\ ku=10^{-2}$, а также для значений параметров $kt=10^{-104},\ ki=1,\ ku=1$, которые создают трудный тест для современных решателей ОДУ. Третий тест – нелинейная жесткая система ОДУ второго порядка имеющая локально неустойчивое решение и составленная по примеру теста Ван дер Поля – тест Скворцова. Тестирование было проведено при параметре жесткости $MU=10^6$. И четвертый тест – нелинейная жесткая система ОДУ второго порядка для моделирования процессов реального лазера – тест Евстифеева. Тестирование сводилось к оценке качественно верного вида решения.

Используемые реализации метода BDF

Метод BDF реализован практически во всех математических средах и библиотеках. Для тестирования был выбран один из лучших на сегодняшний день математических пакетов – Wolfram Mathematica. Данный пакет прикладных программ содержит в себе огромный массив различных алгоритмов. С уверенностью можно сказать, что на сегодняшний день он является лидером в сфере научных и технических вычислений. Система Mathematica, выпускаемая американской компанией Wolfram Research, Inc., имеет высокую скорость и практически не ограниченную точность вычислений.

Однако, нельзя забывать что в сфере инженерных вычислений помимо программных пакетов активно используются подключаемые библиотеки написанные на различных языках программирования и содержащие в себе большое количество разнообразных численных методов. В нашем случае для тестирования была выбрана реализация метода BDF в библиотеке NAG написанной на языке C и разработанной одноименной британской компанией (Numerical Algorithms Group, www.nag.co.uk). В настоящее время библиотеки NAG совместимы практически со всем современными языками программирования высокого уровня, а также доступны для использования в пакетах LabVIEW и MATLAB.

Результаты тестирования

Тестирование проводилось при заданной относительной точности интегрирования 0.001, остальные параметры решателей задавались по умолчанию. Результаты тестирования представлены в сводной таблице 1.

Таблица 1 – Сводная таблица результатов тестирования

Тесты/Решатели ОДУ	Mathematica 8 Метод **BDF**	NAG C Library Функция **nag_ode_ivp_bdf_gen**	
		$TOL=10^{-3}$	$TOL=10^{-9}$
ТЕСТ 1а. Уравнения Ван дер Поля $MU=10^6$	-	+	+
ТЕСТ 1б. Уравнения Ван дер Поля $MU=10^9$	-	-	+
ТЕСТ 2а. Высокодобротный фильтр $kt=1,\ ki=1,\ ku=0.01$	+	-	+
ТЕСТ 2б. Высокодобротный фильтр $kt=10^{-104},\ ku=1,\ ki=1$	+	-	-
ТЕСТ 3. Локально-неустойчивая система ОДУ $MU=10^6$	+	-	+
ТЕСТ 4. Моделирование свечения лазера	+	+	+

Из таблицы видно, что реализация метода BDF в библиотеке NAG при точности по умолчанию справилась лишь с самыми простыми тестами. Другой вариант программы решателя позволил повысить точность до девяти знаков после запятой. В результате, почти все тесты были решены верно. Необходимо отметить, что из пяти выданных неверных результатов при использовании библиотеки NAG, лишь один из них сопровождался диагностическим сообщением.

При тестировании реализации метода BDF в Wolfram Mathematica были получены более качественные результаты – решатель не справился лишь с тестами Ван дер Поля, выдав в обоих случаях диагностическое сообщение. Также необходимо отметить, что проблемными для разных решателей стали совершенно разные тесты, что свидетельствует о принципиальных различиях в реализациях самого метода BDF.

На рисунках 1 – 4 представлены некоторые результаты тестирования.

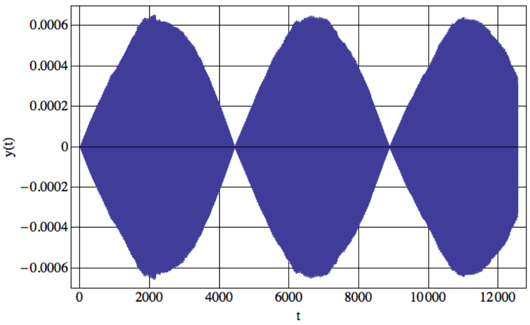

Рис. 1 Решение ТЕСТ 2а полученное с помощью библиотеки NAG при TOL = 10^{-3}

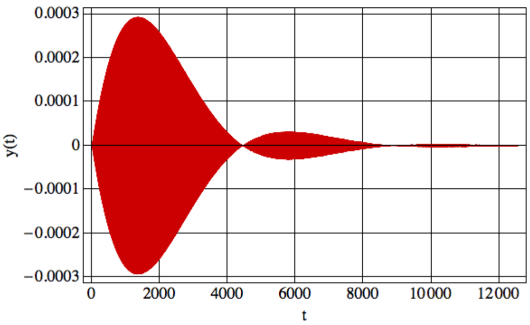

Рис. 2 Правильное решение ТЕСТ 2а

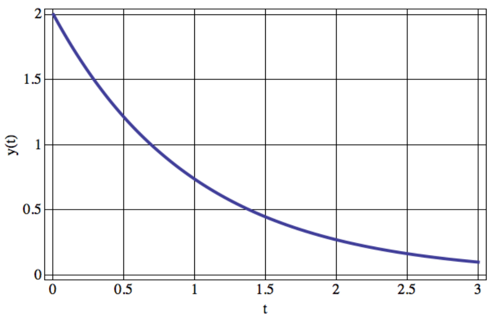

Рис 3 Решение ТЕСТ 3 полученное с помощью библиотеки NAG при TOL = 10^{-3}

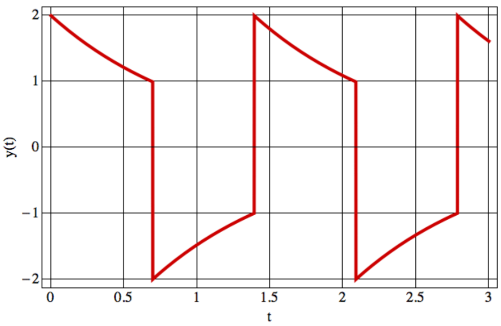

Рис 4 Правильное решение ТЕСТ 3

Заключение

В работе было проведено тестирование двух реализаций метода BDF - реализаций компаний NAG и Wolfram Research, Inc. Результаты были проанализированы с точки зрения достоверности выдаваемого решения и наличия диагностических сообщений. Основным выводом из данного исследования является подтверждение того факта, что даже лучшие CAE подсистемы на сегодняшний день не способны гарантировать качественно верное решение различных систем ОДУ. Также, проблемой является отсутствие диагностических сообщений в случае некорректного решения. Большинство инженеров не обладают достаточными знаниями в области численных методов, чтобы определить достоверность результата без диагностического сообщения. Данная проблема была решена сотрудниками и студентами кафедры САПР при разработке математического ядра SADEL для платформы математического моделирования во временной области разнородных технических систем и объектов ПА10 (SADEL-PA10) [1].

Литература

1. Д.М. Жук, В.Б. Маничев, А.В. Андронов Платформа математического моделирования во временной области разнородных технических систем и объектов FMS PA10. В сб. научных трудов Всероссийской научно-технической конференции МЭС - 2010 - М.: ИППМ РАН, 2010.
2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999.
3. Д.М. Жук, В.Б. Маничев, А.О. Ильницкий Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования систем и объектов во временной области. // Информационные технологии. - 2010. – часть1 - №7, часть 2 - №8.
4. Сахаров М. К. Корректность и точность решений жестких систем ОДУ в системе MathCAD 14 // Наукоемкие технологии и интеллектуальные системы 2011. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – С. 16-19