

УДК 51-7

Исследование колебаний элемента Ценера

09, сентябрь 2012

Кузнецова М.С.

МГТУ им. Н.Э. Баумана
kuzn-maria@yandex.ru

1. Введение. Исследование колебаний модели Ценера (рис.1), называемой также стандартной линейной моделью с полуторной степенью свободы, представляется весьма интересным, поскольку при ее свободных колебаниях обнаруживаются неожиданные свойства, не встречающиеся в моделях с целым числом степеней свободы, например в родственной модели Кельвина (Фойгта). Особенности модели Ценера открывают возможности для его применения в системах вибро- и сейсмозащиты. По-видимому, первые работы по описанию элемента Ценера были проведены Ценером в середине XX века [6]. Исследования колебаний систем с нецелым числом степеней свободы рассмотрены в [1], [2]. Некоторые вопросы, связанные с исследованием поведения элемента Ценера при неперiodических воздействиях, включая анализ вязкоупругих свойств этой модели, рассматривались в [4], [5].

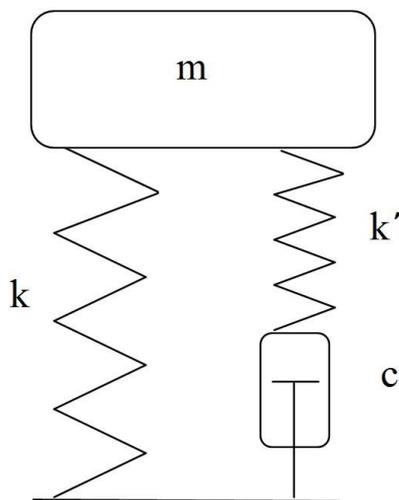


Рис 1. Элемент Ценера

2. Уравнение движения элемента Ценера. Уравнения, описывающие движение элемента Ценера при приложении внешней нагрузки, могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx + k'x_2 = p(t) \\ c\dot{x}_1 = k'x_2 \\ x_1 + x_2 = x \end{cases} \quad (1)$$

где x – перемещение массы m , отсчитываемое от положения равновесия; k и k' – жесткости левой и правой пружин соответственно; c – коэффициент вязкости вязкоупругого элемента (демпфера); x_1 и x_2 – перемещения демпфера и правой пружины соответственно; $p(t)$ – внешняя нагрузка, приложенная к массе m .

Все физические параметры полагаются независимыми от координаты x , скорости \dot{x} и времени t . Исходя из физической сущности параметров имеют место следующие неравенства:

$$m > 0, \quad k > 0, \quad k' > 0, \quad c > 0 \quad (2)$$

Выражая x_2 через \dot{x}_1 из уравнения (1)₂ и подставляя его в уравнение (1)₃, получим зависимость x от x_1 и \dot{x}_1 . Далее исключим x и x_2 из уравнения (1)₁. Получаем ОДУ третьего порядка

$$\ddot{x}_1 = -\alpha x_1 - \beta \dot{x}_1 - \gamma \ddot{x}_1 + p_1(t) \quad (3)$$

где

$$p_1(t) = \frac{k'}{mc} p(t), \quad \alpha = \frac{kk'}{mc}, \quad \beta = \frac{k+k'}{m}, \quad \gamma = \frac{k'}{c} \quad (4)$$

Из неравенств (2) и уравнения (4) следует

$$\beta\gamma > \alpha \quad (5)$$

Введением новых переменных $v_1 = \dot{x}_1$ и $a_1 = \dot{v}_1$ уравнение (3) может быть сведено к системе ДУ первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = a_1 \\ \dot{a}_1 = -\alpha x_1 - \beta v_1 - \gamma a_1 + p_1(t) \end{cases} \quad (6)$$

Запишем полученную систему (6) в векторно-матричной форме

$$\frac{d}{dt} \vec{X} = \mathbf{G} \cdot \vec{X} + \vec{P} \quad (7)$$

где $\vec{X} = (x_1, v_1, a_1)$ – вектор состояния; $\vec{P} = (0, 0, p_1)$ – вектор нагрузки. В этом случае матрица коэффициентов \mathbf{G} будет иметь вид

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} \quad (8)$$

Выражение (8) дает

$$\det \mathbf{G} = -\alpha \quad (9)$$

Выражение (9) обеспечивает невырожденность матрицы \mathbf{G} .

Структура матрицы \mathbf{G} представляет особый интерес для исследования свободных колебаний элемента Ценера.

Предложение 2.1. а) Матрица \mathbf{G} становится неполупростой матрицей 3 порядка, если

$$\alpha = \sqrt{(\beta/3)^3}, \quad \gamma = \sqrt{3\beta} \quad (10)$$

б) Матрица \mathbf{G} устойчивая. При этом устойчивость \mathbf{G} означает

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (11)$$

где λ_k – соответствующие собственные векторы матрицы.

Доказательство. а) Следует из анализа жордановой нормальной формы матрицы \mathbf{G} при условии (10)

$$\mathbf{J} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{W} \quad (12)$$

где \mathbf{W} - унитарная матрица, $\det(\mathbf{W}) = 1$, \mathbf{J} есть жорданов блок.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\beta/3} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\beta/3} & 1 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\beta/3} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Элементы, стоящие на диагонали в матрице (13), являются собственными значениями матрицы \mathbf{G} . Следует отметить, что при условиях (10) удовлетворяются условия (5).

б) Запишем характеристическое уравнение матрицы \mathbf{G}

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \beta\lambda + \alpha \quad (14)$$

Предположим, что все корни уравнения (14) вещественные. Тогда по правилу знаков Декарта (число положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно числу перемен знаков в ряду его коэффициентов) имеем три отрицательных корня уравнения (14).

Далее полагаем, что 2 корня - комплексно сопряженные. Так как все коэффициенты полинома $\chi(\lambda)$ вещественны, то один корень уравнения (14) обязан быть вещественным. Обозначим вещественный корень через λ_1 , а комплексные корни через λ_2 и $\bar{\lambda}_2$.

Выразим коэффициенты полинома $\chi(\lambda)$ через его корни

$$\alpha = -\lambda_1 |\lambda_2|^2, \quad \beta = 2\lambda_1 \operatorname{Re}(\lambda_2) + |\lambda_2|^2, \quad \gamma = -(2\operatorname{Re}(\lambda_2) + \lambda_1) \quad (15)$$

Уравнение (15)₁ доказывает, что вещественный корень λ_1 - отрицательный. Перемножив 2 последних уравнения (15), получим

$$\beta\gamma = -2\operatorname{Re}(\lambda_2) \left(|\lambda_2|^2 + 2\lambda_1 \operatorname{Re}(\lambda_2) + \lambda_1^2 \right) - \lambda_1 |\lambda_2|^2 \quad (16)$$

или

$$\beta\gamma - \alpha = -2\operatorname{Re}(\lambda_2) \left(|\lambda_2|^2 + 2\lambda_1 \operatorname{Re}(\lambda_2) + \lambda_1^2 \right) \quad (17)$$

Учитывая неравенство (5), в левой части уравнения (17) имеем положительное число.

Рассмотрим выражение в скобках в правой части уравнения (17)

$$\left(|\lambda_2|^2 + 2\lambda_1 \operatorname{Re}(\lambda_2) + \lambda_1^2 \right) > \left(\operatorname{Re}(\lambda_2)^2 + 2\lambda_1 \operatorname{Re}(\lambda_2) + \lambda_1^2 \right) > 0$$

Таким образом

$$\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0 \quad (18)$$

что и требовалось доказать. \square

Предложение 2.2. Общее решение, отвечающее свободным колебаниям элемента Ценера, представимо в виде

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \\ a_1(t) \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{G}t) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

где C_k - произвольные константы, определяемые начальными условиями.

Доказательство. Следует из представления общего решения уравнения (7) в форме фундаментальной экспоненциальной матрицы $\exp(\mathbf{G}t)$, см. [3]. \square

Перепишем решение (19) для кинематических параметров, описывающих движение массы m

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} \right) \cdot \exp(\mathbf{G}t) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Решение при свободных колебаниях массы m , отвечающих начальным условиям x_0 , v_0 и a_0 при $t = t_0$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{G}(t - t_0)) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Решение при свободных колебаниях массы m (20) вытекает из уравнений (19), (1)₂ и (4). Согласно представлению (19), вектор производных имеет вид

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ a_1(t) \\ \dot{a}_1(t) \end{pmatrix} = \mathbf{G} \cdot \exp(\mathbf{G}t) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Заметим, что из (20), (22) при учете коммутативности матриц \mathbf{G} и $\exp(\mathbf{G}t)$ получаем

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} \right)^{-1} \cdot \exp(-\mathbf{G}t_0) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Замечание. При наличии жорданова блока решение, отвечающее свободным колебаниям, имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \\ a_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

а соответствующие перемещение $x(t)$, скорость $v(t)$ и ускорение $a(t)$ массы m имеют вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = e^{-t\sqrt{\beta/3}} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\beta}{3}} \right) \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Предложение 2.3. При любых физически допустимых значениях параметров m , k , k' , c существуют такие начальные условия, при которых в решении отсутствует осциллирующая составляющая.

Доказательство. Предположим, что матрица коэффициентов \mathbf{G} является полупростой, т.е. не содержит жордановых блоков и приводится к диагональному виду

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{W} \quad (26)$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Если начальные условия задать в виде

$$\mathbf{C}'_0 = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{C}_0 \quad (28)$$

где

$$\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

то

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{C}'_0 = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}_0$$

С учетом (26), (28)

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{C}'_0 = \mathbf{W}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Как видно из (30), произведение $\mathbf{G} \cdot \mathbf{C}'_0$ и, следовательно, $\exp(\mathbf{G}t) \cdot \mathbf{C}'_0$ не содержит осциллирующей составляющей.

Как отмечено ранее, решение уравнения (7) при свободных колебаниях представимо в виде

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \\ a_1(t) \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{G}t) \cdot \mathbf{C}'_0 \quad (31)$$

где \mathbf{C}'_0 - вектор, определенный по (28) и (29). С учетом разложения (26) и условия (28) уравнение (19) принимает вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \\ a_1(t) \end{pmatrix} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Перепишем решение (7) в терминах кинематических параметров, описывающих движение массы m . Как показано в (21)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{G}(t-t_0)) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Вектор решения в начальный момент времени $\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$ определяется выражением

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \\ a_0 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_{10} \\ v_{10} \\ a_{10} \end{pmatrix} \quad (34)$$

где $\begin{pmatrix} x_{10} \\ v_{10} \\ a_{10} \end{pmatrix}$ определяется из (7) в начальный момент времени $t = t_0$.

Подстановка выражений (32) и (34) в уравнение (33) дает

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{G}(t-t_0)) \cdot \left(\mathbf{I} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{G} \right) \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Покажем, что при таком выборе начальных условий решение (35) не будет содержать осциллирующей составляющей.

Пусть

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \\ a(0) \end{pmatrix} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Трехмерный фазовый портрет в терминах x, v и a , описывающий свободные колебания элемента Ценера и удовлетворяющий начальным условиям (36), показан на рис.4а.

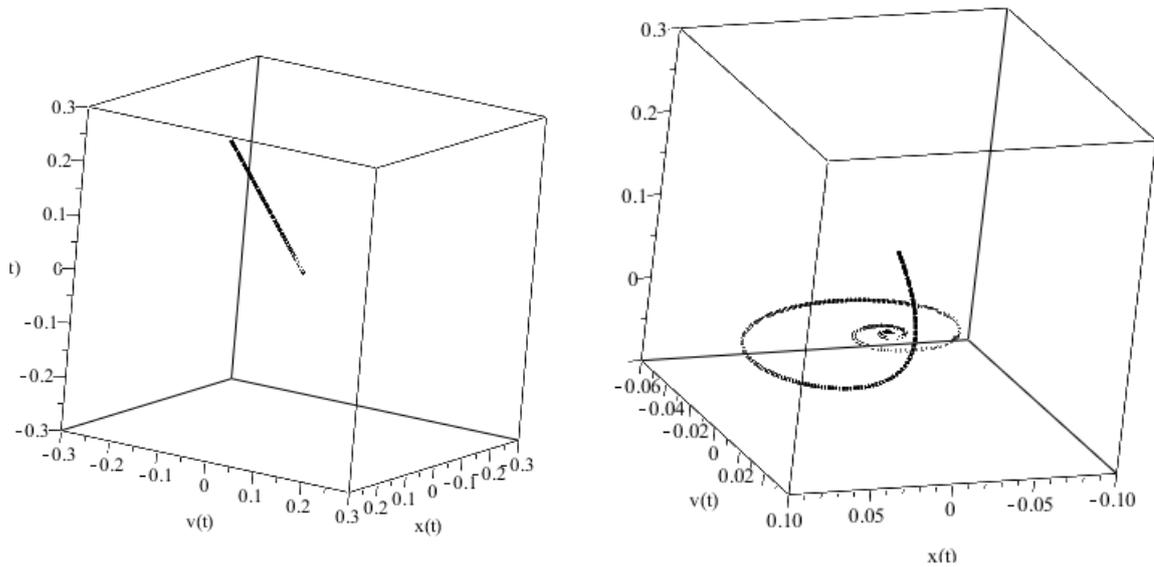


Рис 2. Фазовые портреты для свободных колебаний элемента Ценера при $m = 5, k = 1, k' = 2$ и $c = 1$
а) при начальных условиях (11); б) при произвольных начальных условиях, отличных от условий (11).

Как видно из рис.2а, колебания в системе отсутствуют. При любом другом задании начальных условий движение той же системы будет колебательным, см. рис.2б.

Предложение 2.4. а) Решение при установившемся режиме вынужденных колебаний (полагаем, что внешнее воздействие на массу m изменяется по гармоническому закону $p(t) = p_0 \exp(i\omega t)$) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \\ a_1(t) \end{pmatrix} = (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k'/mc \end{pmatrix} p_0 e^{i\omega t} \quad (37)$$

б) Соответствующие кинематические параметры движения массы m имеют вид:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{i\omega}{\gamma} \right) (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k'/mc \end{pmatrix} p_0 e^{i\omega t} \quad (38)$$

в) Абсолютное значение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), определяемое выражением

$$f_Z \equiv \left| \frac{x(t)}{p(t)} \right| \quad (39)$$

имеет вид:

$$f_Z = \frac{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}{m \sqrt{(\omega^2 \gamma - \alpha)^2 + (\omega^3 - \omega \beta)^2}} \quad (40)$$

Доказательство а) представим решение в экспоненциальной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ v_1(t) \\ a_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^a \\ v_1^a \\ a_1^a \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (41)$$

где верхний индекс a обозначает амплитудное значение. Подставляя решение (30) в дифференциальное уравнение (7), получаем искомое выражение (26).

б) Дифференцируя (26) и учитывая уравнения (19), (1)₂, и(4), имеем решение в форме (27).

в) Доказательство выражения (29) очевидно. \square

Замечание 2.1. а) Решения, представляемые (19) – (27), существуют при любой матрице \mathbf{G} , независимо от ее вырожденности. Даже в случае, если \mathbf{G} - неполупрямая матрица, выражения (19) и (20) могут быть уточнены (см. заключение к предложению 2.2).

б) Интересной особенностью поведения модели Ценера при свободных колебаниях является возможность задавать начальные условия с нулевыми перемещением и скоростью и произвольным начальным ускорением. Трехмерные фазовые портреты, описывающие свободные колебания элемента Ценера и удовлетворяющие начальным условиям $x(0) = v(0) = 0$, $a(0) = 1$, показаны на рис.3.

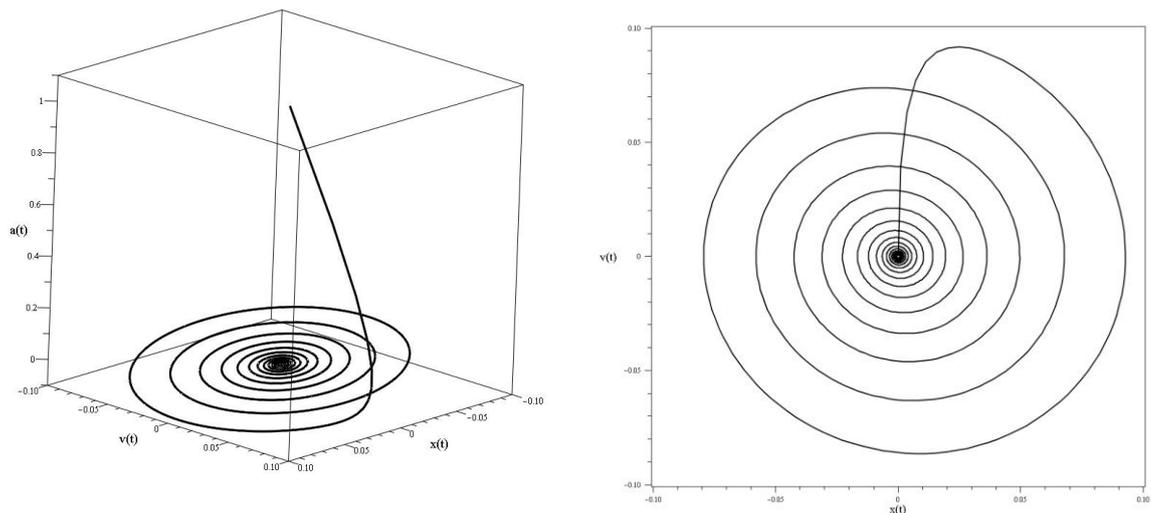


Рис 3. Фазовый портрет для свободных колебаний элемента Ценера при $m = k = k' = 1$ и $c = 0.1$
а) трехмерный вид; б) проекция на плоскость (x, v) .

Как показано на рис.3, осциллирующая составляющая фазового портрета лежит в плоскости, лежащей под небольшим углом к плоскости $(x, v, 0)$.

в) Рассматривая предел в выражении (29) при $k' \rightarrow 0$ и учитывая обозначения (4), убеждаемся, что АЧХ элемента Ценера превращается в АЧХ колебаний массы m , установленной на пружине жесткостью k :

$$f = \frac{1}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_n^2)^2}} \quad (42)$$

3. Элемент Ценера с дополнительной массой. В завершающей части работы проведена оптимизация элемента Ценера с дополнительной массой (рис. 4) с минимизацией амплитуд колебаний. Оптимизация по амплитуде (при варьировании массы m_2) проводилась по двум критериям: в топологии L^2 и в топологии равномерной сходимости L^∞ . Интересно отметить, что оптимальные решения в этих метриках отличаются.

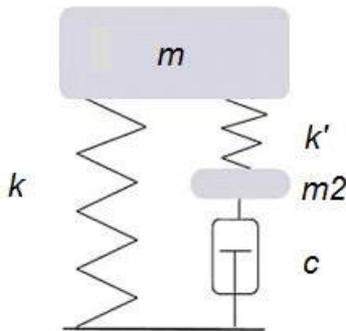


Рис 4. Элемент Ценера с дополнительной массой

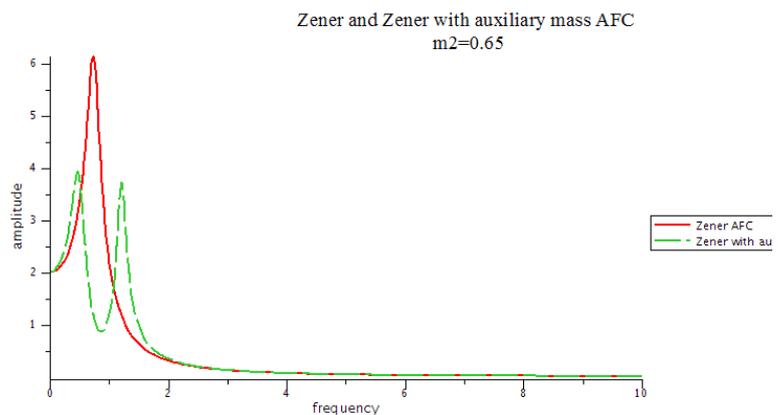


Рис 5. АЧХ элементов Ценера (сплошная линия) и Ценера с дополнительной массой (пунктирная линия) при $m = 1$, $k = 0.5$, $k' = 0.5$, $c = 0.25$.

4. Заключение. Основное дифференциальное уравнение движения элемента Ценера было представлено в виде системы из связанных дифференциальных уравнений первого порядка. Анализ фундаментальной матрицы позволил сформулировать условия для ее неполупростого вырождения и устойчивости.

Исследование задачи постановки начальных условий для свободных колебаний элемента Ценера показало, что при любых значениях параметров m , k , k' и c можно выбрать такие начальные условия, при которых в решении отсутствует осциллирующая составляющая.

При исследовании элемента Ценера с дополнительной массой m_2 проведена оптимизация по амплитуде колебаний (при варьировании массы m_2) при заданных физических параметрах элемента. Показано, что элемент Ценера с дополнительной массой может служить примером настраиваемой системы виброгашения.

Список литературы

1. Андронов А.А., Витт А.А. и Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959
2. Трегубов В.П. Системы с нецелым числом степеней свободы // Вестник Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина, – 2009 г. - №850. – С. 83-90.
3. Hartman P. Ordinary Differential Equations, In: Classics in Applied Mathematics, SIAM, N.Y., 2002.
4. Shahsavari R., Ulm F.-J. Indentation analysis of fractional viscoelastic solids // Journal of mechanics, materials and structures, - 2009. – Vol.4, №3.
5. Schiessel H., Metzler R., Blumen A., Nonnenmacher T.F. Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions // Journal of Physics. Ser.A. Math. Gen. 28:23(1995) 6567–6584.
6. Zener C. Elasticity and Anelasticity of Metals, University of Chicago Press, 1948.