

УДК 535.317

Расчёт параксиальных характеристик линз с различным распределением показателя преломления аналитическим и универсальным численным методом

10, октябрь 2012

Исаева Т.В., Тарабрин М.К.

*Студенты,
кафедра «Оптико-электронные приборы научных исследований»*

*Научный руководитель: А.Л. Сушков, кандидат технических наук, доцент кафедры
«Оптико-электронные приборы научных исследований»*

МГТУ им. Н.Э. Баумана
tanaisa_91@mail.ru
mishanya571@yandex.ru

Оптические элементы с различными видами распределения показателя преломления (РПП) находят всё более широкое применение при разработке оптических схем современных приборов. Однако при исследовании влияния отдельных параметров неоднородных сред на аберрации всей оптической системы с использованием расчёта хода реальных лучей через градиентную среду существуют значительные трудности, связанные с большим объемом вычислений. Анализ аберраций третьего порядка упрощает решение этой задачи, но он требует знания параметров параксиальных лучей.

Универсальный численный метод расчета параметров параксиальных лучей через неоднородную осесимметричную среду с произвольным законом РПП основан на идее Д. Мура [1] представлять функции углов и высот двух вспомогательных лучей в виде числовых рядов по координате z .

Цель данной работы – изучение метода Мура и оценка границ его применимости при расчете параксиальных характеристик GRIN-линз. При расчетах исследованы два типа линз: с радиальным РПП и осевым РПП, для которых известны альтернативные (аналитические) методы расчета.

Функции углов наклона с оптической осью и высот вспомогательных лучей обозначим: $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $h(z)$, $H(z)$. В неоднородной среде $\alpha(z) = \tilde{\alpha}(z)$, $\beta(z) = \tilde{\beta}(z)$.

В общем случае показатель преломления среды представляется в виде степенного ряда:

$$n(z, y) = n_0(z) + n_1(z)y^2 + n_2(z)y^4 + \dots, \quad (1)$$

где $n_0(z)$, $n_1(z)$, $n_2(z)$ также представляют собой степенные ряды:

$$n_0(z) = n_{00} + n_{01}z + n_{02}z^2; \quad n_1(z) = n_{10} + n_{11}z + n_{12}z^2; \quad n_2(z) = n_{20} + n_{21}z + n_{22}z^2;$$

$$\text{осевое РПП имеет вид: } n(z) = n_{00} + n_{01}z + n_{02}z^2 + \dots, \quad (2)$$

$$\text{радиальное РПП: } n(y) = n_{00} + n_{10}y^2 + n_{20}y^4 + \dots. \quad (3)$$

Функции углов и высот представляются в виде рядов по z :

$$h(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 \dots \quad H(z) = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 \dots \quad (4)$$

$$\alpha(z) = A_1 + 2A_2z + 3A_3z^2 \dots$$

$$\beta(z) = B_1 + 2B_2z + 3B_3z^2 \dots$$

Коэффициенты $A_0, A_1 \dots$ степенных рядов (4) вычисляются по рекурсивной формуле:

$$A_m = \left\{ \sum_{n=2}^{m-1} [2A_{n-2}n_{1,m-n} - n(n-1)A_n n_{0,m-n} - (m-n+1)(n-1)A_{n-1}n_{0,m-n+1}] - \right. \\ \left. - (m-1)A_{m-1}n_{01} + 2A_{m-2}n_{10} \right\} / m(m-1)n_{00}$$

В случае осевого РПП:

$$A_m = \frac{\left\{ \sum_{n=2}^{m-1} [-n(n-1)A_n n_{0,m-n} - (m-n+1)(n-1)A_{n-1}n_{0,m-n+1}] - (m-1)A_{m-1}n_{01} \right\}}{m(m-1)n_0} \quad (5)$$

где A_0, A_1 – высота луча и угол с оптической осью на входе в неоднородную среду.

$$A_2 = -A_1 \cdot \frac{n_{01}}{2n_{00}};$$

$$A_5 = \frac{-2A_2n_{03} - 3A_3n_{02} - 4A_4n_{01}}{5n_{00}};$$

$$A_3 = \frac{-A_1 \cdot n_{02} - 2A_2 \cdot n_{01}}{3n_{00}};$$

$$A_6 = \frac{-3A_3n_{03} - 4A_4n_{02} - 5A_5n_{01}}{6n_{00}};$$

$$A_4 = \frac{-A_1n_{03} - 2A_2n_{02} - 3A_3n_{01}}{4n_{00}};$$

$$A_7 = \frac{-4A_4n_3 - 5A_5n_2 - 6A_6n_1}{7n_0}, \text{ итд.} \dots$$

В случае радиального РПП:

$$A_m = \frac{2A_{m-2} \cdot n_{10}}{m(m-1)n_{00}} \quad (6)$$

$$A_2 = 2A_0 \cdot \frac{n_{10}}{n_{00}}; \quad A_3 = 2A_1 \cdot \frac{n_{10}}{6n_{00}}; \quad A_4 = 2A_2 \cdot \frac{n_{10}}{12n_{00}}; \quad A_5 = 2A_3 \cdot \frac{n_{10}}{20n_{00}}; \text{ и т.д.} \dots$$

Коэффициенты B_m вычисляются по аналогичным формулам с заменой A_m на B_m .

Для проверки сходимости рядов на каждой поверхности вычисляется параксиальный инвариант $I = n_k(H_k \cdot \alpha_k - h_k \cdot \beta_k)$, где n_k – осевой показатель преломления непосредственно перед k -й поверхностью. Если значения инварианта идентичны, то ряды сходятся и расчёт продолжается. В случае несовпадения величин необходимо увеличить точность расчёта увеличением количества членов в разложении $h(z)$.

Аналитический метод – метод расчета углов и высот параксиальных лучей по аналитическим формулам [2], полученным из решения дифференциальных уравнений хода лучей в градиентной среде.

Принятые обозначения:

r_n – радиус кривизны n -ной поверхности;

ρ_n – кривизна n -ной поверхности, $\rho = \frac{1}{r}$;

d – толщина линзы;

α_1 – угол луча в пространстве предметов;

α_2 – угол на входе в неоднородную среду;

α_2 – угол на выходе из неоднородной среды;

α_3 – угол в пространстве изображений

n_z – значение показателя преломления на второй поверхности линзы (для осевого РПП)

Для осевого РПП:

(7)

$$f = \frac{1}{\rho_1(n_{00}-1) - \rho_2(n_z-1) + \rho_1\rho_2(n_{00}-1)(n_z-1) \cdot \int_0^d \frac{1}{n(z)} dz};$$

$$\alpha_2 = h_1 \cdot \rho_1 \cdot \frac{(n_{00}-1)}{n_{00}}; \quad h_2 = h_1 - n_0 \cdot \alpha_2 \cdot \int_0^d \frac{1}{n(z)} dz; \quad \alpha_{-2} = \frac{\alpha_2 \cdot n_{00}}{n_z};$$

$\alpha_3 = h_2 \rho_2 (1 - n_z) + \alpha_{-2} n_z$, при данной нормировке α_3 должен быть равен 1.

$S'_{f'} = \frac{h_2}{\alpha_3}$ - задний фокальный отрезок

Для радиального РПП:

(8)

$$h_1 = 1; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = h_1 \cdot \rho_1 \cdot \frac{(n_{00}-1)}{n_{00}}; \quad t = \sqrt{\frac{2|n_{10}|}{n_{00}}}; \quad h_2 = h_1 \cdot \cos(t \cdot d) - \frac{\alpha_2 \cdot \sin(t \cdot d)}{t};$$

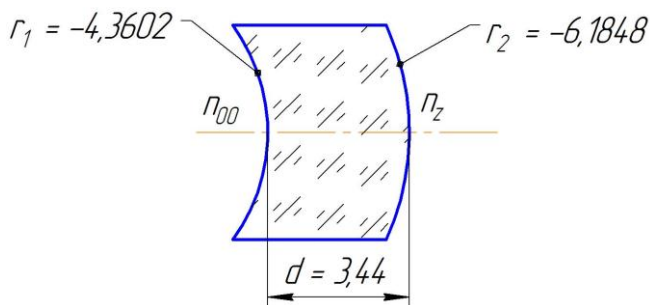
$$\alpha_{-2} = \alpha_2 \cdot \cos(t \cdot d) + h_1 \cdot t \cdot \sin(t \cdot d); \quad \alpha_3 = h_2 \cdot \rho_2 (1 - n_{00}) + \alpha_{-2} \cdot n_{00}; \quad f' = \frac{h_1}{\alpha_3}; \quad S'_{f'} = \frac{h_2}{\alpha_3}.$$

. Критерием соответствия результатов является совпадение обобщённого параксиального инварианта на каждой поверхности линзы с точностью до 4-5 знака. При выполнении этого условия результат с высокой точностью совпадает с результатом аналитического расчёта.

В качестве объектов исследования были выбраны линзы с осевым и радиальным распределением показателя преломления. Параметры линз взяты из патентной базы США: для осевого РПП - US Patent №5,239,413; для радиального РПП - US Patent №6,519,098, US Patent №4,859,040 и US Patent №5,912,770.

Линзы с осевым РПП:

Линза 1. Отрицательный вогнуто-выпуклый мениск



$$\begin{aligned} \rho_1 &= -0,229; \\ \rho_2 &= -0,162; \\ n_0 &= 1,59799; \\ n_{01} &= 0,64233 \cdot 10^{-2}; \\ d &= 3,4472; \\ n(z) &= n_0 + n_{01} \cdot z; \\ n_z &= 1,62013 \end{aligned}$$

Рис.2. Геометрические параметры линзы 1

Аналитический метод:

Согласно формулам (7): $f' = -134,785$; $S'_{f'} = -174,388$

Универсальный численный метод:

Согласно формулам (7), с учётом представления формул углов и высот (4), получаем:

$$\alpha_1 = 0; \quad A_0 = h_1 = -134,78474; \quad A_1 = -\alpha_2 = -11,56789; \quad A_2 = 0,02325; \quad A_3 = -6,23019 \cdot 10^{-5};$$

$$A_4 = 1,87822 \cdot 10^{-7}; \quad h_2 = A_0 + A_1 d + A_2 d^2 + A_3 d^3 + A_4 d^4 = -174,38782;$$

$$\alpha_{-2} = -(A_1 + 2A_2 d + 3A_3 d^2 + 4A_4 d^3) = 11,40979; \quad \alpha_3 = 0,9999; \quad f' = -134,785; \quad S'_{f'} = -174,388;$$

$$I_1 = 134,78474; \quad I_2 = 134,78474$$

Используемые коэффициенты: A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 . $\Delta I = I_1 - I_2 = 0,000005$.

Линза 2. Отрицательная двояковогнутая с увеличенной толщиной и полиномом РПП 3-й степени

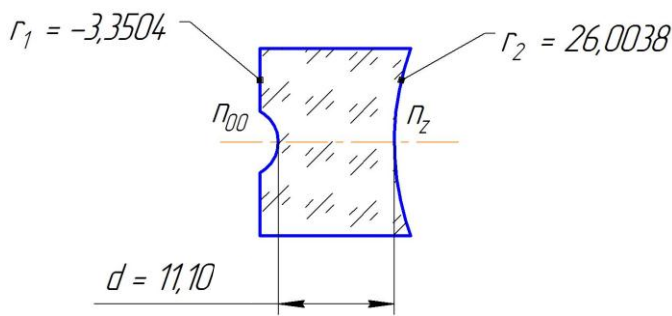


Рис.3. Геометрические параметры линзы 2

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -0,298; \\ \rho_2 &= 0,038; \\ n_{00} &= 1,64322; \\ n_{01} &= -0,38745 \cdot 10^{-2}; \\ n_{02} &= -0,18639 \cdot 10^{-3}; \\ n_{03} &= 0,16994 \cdot 10^{-4} \\ d &= 11,10; \\ n(z) &= n_{00} + n_{01} \cdot z + n_{02} \cdot z^2 + n_{03} \cdot z^3; \\ n_z &= 1,60049 \end{aligned}$$

Аналитический метод:

$$f' = -4,074; \quad S'_{f'} = -9,435$$

Универсальный численный метод:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0; \quad A_0 = h_1 = -4,07395; \quad A_1 = -\alpha_2 = -0,47597; \quad A_2 = -5,61142 \cdot 10^{-4}; \\ A_3 &= -1,88786 \cdot 10^{-5}; \quad A_4 = 1,16541 \cdot 10^{-6}; \quad A_5 = 3,23477 \cdot 10^{-9}; \quad A_6 = 1,92104 \cdot 10^{-10}; \\ A_7 &= -6,23681 \cdot 10^{-12}; \quad h_2 = A_0 + A_1 d + \dots + A_7 d^7 = -9,43482; \\ \alpha_{-2} &= -(A_1 + 2A_2 d + \dots + 7A_7 d^6) = 0,48868; \quad \alpha_3 = 0,99999; \quad f' = -4,074; \quad S'_{f'} = -9,435 \\ I_1 &= 4,07395; \quad I_2 = 4,07390 \end{aligned}$$

Используемые коэффициенты: $A_0, A_1, A_2, \dots, A_7$. $\Delta I = I_1 - I_2 = 0,000048$;

(при использовании коэффициентов до A_6 $\Delta I = 0,0007298$; до A_5 : $\Delta I = -0,000891$)

Линза 3. Положительная двояковыпуклая, тонкая

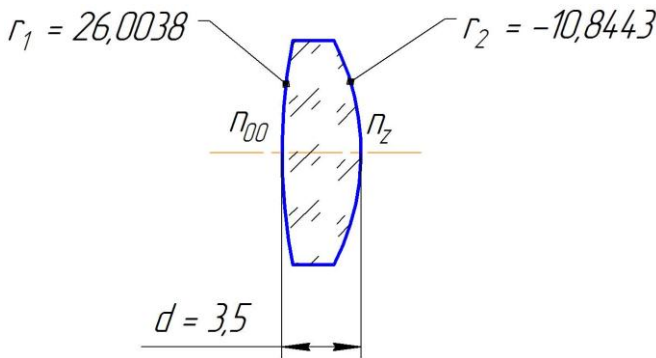


Рис.4. Геометрические параметры линзы 3

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0,038; \\ \rho_2 &= -0,092; \\ n_{00} &= 1,67; \\ n_{01} &= 0,76794 \cdot 10^{-1}; \\ n_{02} &= -0,75 \cdot 10^{-2} \\ n_{03} &= 0,52063 \cdot 10^{-3} \\ d &= 3,5; \\ n(z) &= n_{00} + n_{01} \cdot z + n_{02} \cdot z^2 + n_{03} \cdot z^3 \\ n_z &= 1,86923 \end{aligned}$$

Аналитический метод:

$$f' = 9,818; \quad S'_{f'} = 9,320$$

Универсальный численный метод:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0; \quad A_0 = h_1 = 9,81797; \quad A_1 = -\alpha_2 = -0,15148; \quad A_2 = 3,48276 \cdot 10^{-3}; \quad A_3 = -3,33529 \cdot 10^{-4}; \\ A_4 &= 3,11292 \cdot 10^{-5}; \quad A_5 = -2,47821 \cdot 10^{-6}; \quad A_6 = 2,40157 \cdot 10^{-7}; \quad A_7 = -2,29611 \cdot 10^{-8}; \\ A_8 &= 2,21565 \cdot 10^{-9}; \quad A_9 = -2,20682 \cdot 10^{-10}; \quad A_{10} = 2,21043 \cdot 10^{-11}; \\ h_2 &= A_0 + A_1 d + \dots + A_{10} d^{10} = 9,31988; \quad \alpha_{-2} = -(A_1 + 2A_2 d + \dots + 10A_{10} d^9) = 0,13533; \end{aligned}$$

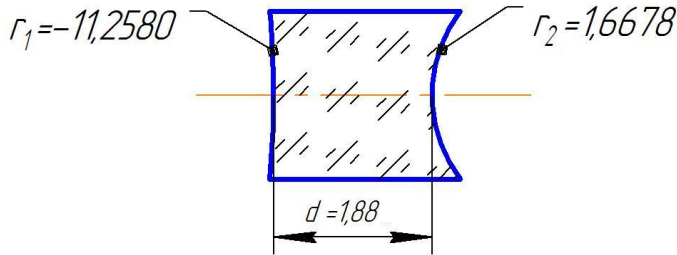
$$\alpha_3 = h_2 \cdot \rho_2 \cdot (1 - n_z) + \alpha_{-2} \cdot n_z = 0,99999; \quad f' = 9,818; \quad S'_{f'} = 9,320$$

$$I_1 = -9,81797; \quad I_2 = -9,81762$$

Используемые коэффициенты: $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{10}$. $\Delta I = I_1 - I_2 = -0,000354$
(при использовании коэффициентов до A_9 $\Delta I = 0,0009097$; до A_8 : $\Delta I = -0,002335$;
до A_7 : $\Delta I = 0,005938$; до A_6 : $\Delta I = -0,01550$)

Линзы с радиальным РПП:

Линза 4. Отрицательная двояковогнутая



$$\rho_1 = -0,08883;$$

$$\rho_2 = 0,59959;$$

$$n_{00} = 1,72;$$

$$n_{10} = -0,08746;$$

$$d = 1,88;$$

$$n(y) = n_{00} + n_{10}y^2$$

Рис.5. Геометрические параметры линзы 4

Аналитический метод:

Согласно формулам (8): $f' = -7,821$; $S'_{f'} = -6,970$

Универсальный численный метод:

Согласно формулам (8), с учётом представления формул углов и высот (4), получаем:

$$\alpha_1 = 0; \quad A_0 = h_1 = 1; \quad A_1 = -\alpha_2 = 0,037183; \quad A_2 = -0,050851; \quad A_3 = -6,302639 \cdot 10^{-4};$$

$$A_4 = 4,309735 \cdot 10^{-4}; \quad A_5 = 3,204965 \cdot 10^{-6}; \quad A_6 = -1,461033 \cdot 10^{-6}; \quad A_7 = -7,760772 \cdot 10^{-9};$$

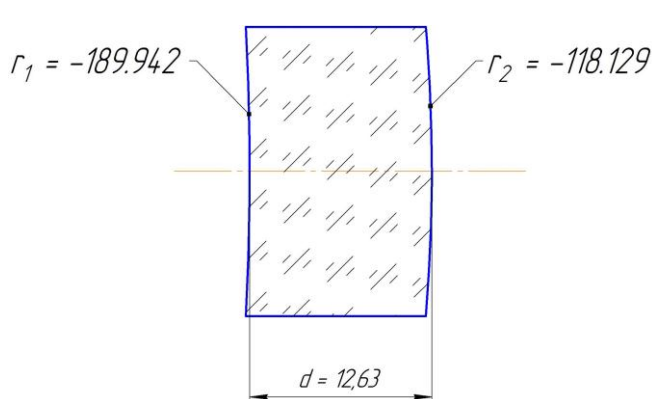
$$h_2 = A_0 + A_1 d + \dots + A_7 d^7 = 0,89122; \quad \alpha_{-2} = -(A_1 + 2A_2 d + \dots + 7A_7 d^6) = 0,14935;$$

$$\alpha_3 = -0,127856; \quad f' = -7,821; \quad S'_{f'} = -6,970$$

$$I_1 = -1,00000; \quad I_2 = -1,00000242$$

Используемые коэффициенты: $A_0, A_1, A_2, \dots, A_7$. $\Delta I = I_1 - I_2 = 0,00000242$

Линза 5. Положительный вогнуто-выпуклый мениск



$$\rho_1 = -0,00526;$$

$$\rho_2 = -0,00845;$$

$$n_{00} = 1,80;$$

$$n_{10} = -3,9767410 \cdot 10^{-4};$$

$$d = 12,63;$$

$$n(y) = n_{00} + n_{10}y^2$$

Рис.6. Геометрические параметры линзы 5

Аналитический метод:

$$f' = 79,389; \quad S'_{f'} = 78,926$$

Универсальный численный метод:

$$\alpha_1 = 0; \quad A_0 = h_1 = 1; \quad A_1 = -\alpha_2 = 2,339896 \cdot 10^{-3}; \quad A_2 = -0,000221; \quad A_3 = -1,723177 \cdot 10^{-7};$$

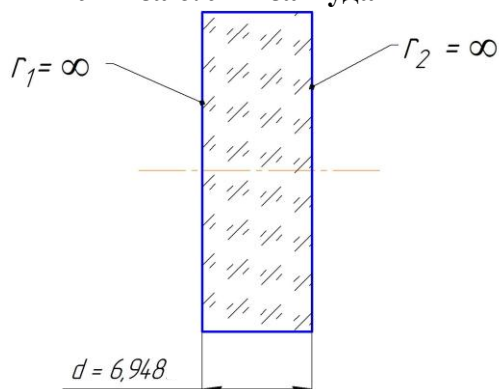
$$A_4 = 8,135011 \cdot 10^{-9}; \quad A_5 = 3,807015 \cdot 10^{-12}; \quad h_2 = A_0 + A_1 d + \dots + A_5 d^5 = 0,994172;$$

$$\alpha_{-2} = -(A_1 + 2A_2 d + \dots + 5A_5 d^4) = 3,257216 \cdot 10^{-3}; \quad \alpha_3 = 0,012596; \quad f' = 79,392; \quad S'_{f'} = 78,929$$

$$I_1 = -1,00000; I_2 = -0,99999806$$

Используемые коэффициенты: $A_0, A_1, A_2, \dots A_5$. $\Delta I = I_1 - I_2 = -0,00000194$

Линза 6. Линза Вуда



$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0; \\ \rho_2 &= 0; \\ n_{00} &= 1,664; \\ n_{10} &= -7,5 \cdot 10^{-3}; \\ d &= 6,95; \\ n(y) &= n_{00} + n_{10}y^2 \end{aligned}$$

Рис.7. Геометрические параметры линзы 6

Аналитический метод:

$$f' = 10,327; S'_f = 8,160$$

Универсальный численный метод:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0; \quad A_0 = h_1 = 1; \quad A_1 = -\alpha_2 = 0; \quad A_2 = -0,004507; \quad A_3 = 0; \quad A_4 = 3,385826 \cdot 10^{-6}; \\ A_5 &= 0; \quad A_6 = -1,017 \cdot 10^{-9}; \quad A_7 = 0; \quad h_2 = A_0 + A_1d + \dots + A_7d^7 = 0,790139; \\ \alpha_{-2} &= -(A_1 + 2A_2d + \dots + 7A_7 \cdot d^6) = 0,058195; \quad \alpha_3 = 0,096836; \quad f' = 10,327; \quad S'_f = 8,160 \end{aligned}$$

$$I_1 = -1,00000; I_2 = -1,00000514$$

Используемые коэффициенты: $A_0, A_1, A_2, \dots A_7$ $\Delta I = I_1 - I_2 = 0,00000514$

Выводы:

1. Рассмотрены линзы с осевым РПП следующих типов: отрицательный мениск, двояковогнутая с увеличенной толщиной, двояковыпуклая с РПП с выраженной нелинейностью. На количество коэффициентов разложения влияет толщина линз и характер РПП: чем больше толщина, чем значительнее нелинейность РПП, тем больше коэффициентов необходимо рассчитать. Так в случае линзы №1 достаточно было разложить функции в ряд до 4-й степени, при увеличенной толщине линз – необходимо разложить до 7-й, а при РПП с выраженной нелинейностью – до 10-й степени.

2. Рассмотрены линзы с радиальным РПП следующих типов: двояковогнутая, положительный мениск увеличенной толщины, линза Вуда (с плоскопараллельными поверхностями). На необходимое количество коэффициентов разложения главным образом влияет характер РПП: чем больше градиент показателя преломления (в данном случае, чем больше по модулю n_{10}), тем большее количество коэффициентов необходимо рассчитать.

3. При подборе определенного числа коэффициентов универсальный численный метод позволяет достичь высокой точности при расчёте параксиальных характеристик, следовательно, его можно применять и при дальнейшем расчёте коэффициентов aberrаций третьего порядка.

Литература

1. Сушков А.Л. Универсальный алгоритм расчёта зейделевых aberrаций в оптической среде с общим видом распределения показателя преломления. // Известия ВУЗов: Приборостроение. – отправлена в редакцию в марте 2010.
2. Заказов Н.П. и др. Теория оптических систем. – М.: Машиностроение, -1992, С.41-42.