НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Методы исследования устойчивости криволинейного движения гусеничной машины

12, декабрь 2012
DOI: 10.7463/0113.0517531

Вязников М. В.

УДК 623

Россия, ООО «МИКОНТ» (г. Чебоксары)
mv.vaznikov@tplants.com

Для адекватного описания реального процесса криволинейного движения гусеничной машины требуется построить модель, описывающую движение с учетом бокового заноса.

В общем виде модель плаcкопаралельного гусеничной машины представляет собой следующую систему дифферециальных уравнений [3]

$$\begin{cases}
\ddot{x} = -\dfrac{\dot{x}}{m\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\cdot(R_1+R_2)+\dfrac{\cos\psi}{m}\cdot\lambda_1+\dfrac{\cos\psi}{m}\cdot\lambda_2; \\
\ddot{y} = -\dfrac{\dot{x}}{m\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\cdot(R_1+R_2)+\dfrac{\sin\psi}{m}\cdot\lambda_1+\dfrac{\sin\psi}{m}\cdot\lambda_2; \\
\ddot{\psi} = -\dfrac{M}{I_z}-\dfrac{B}{2\cdot I_z}\cdot(R_2-R_1)\cdot\cos\psi-\dfrac{(0{,}5\cdot B+y_1)}{I_z}\cdot\lambda_1+\dfrac{(0{,}5\cdot B+y_2)}{I_z}\cdot\lambda_2; \\
\ddot{\varphi}_1 = -\dfrac{\tilde{n}_1}{I_1}\cdot(\varphi_1-\theta_1)+\dfrac{1}{I_1}\cdot P_{\hat{a}\hat{e}1}\cdot r_{\hat{a}\hat{e}}; \\
\ddot{\varphi}_2 = -\dfrac{\tilde{n}_2}{I_2}\cdot(\varphi_2-\theta_2)+\dfrac{1}{I_2}\cdot P_{\hat{a}\hat{e}2}\cdot r_{\hat{a}\hat{e}}; \\
\ddot{\theta}_1 = -\dfrac{\tilde{n}_1}{I_3}\cdot(\theta_1-\varphi_1)-\dfrac{1}{I_3}\cdot\lambda_1\cdot r_{\hat{a}\hat{e}}; \\
\ddot{\theta}_2 = -\dfrac{\tilde{n}_2}{I_4}\cdot(\theta_2-\varphi_2)-\dfrac{1}{I_4}\cdot\lambda_2\cdot r_{\hat{a}\hat{e}}.
\end{cases} \qquad (1)$$

Моделирование динамики криволинейного движения на основе зависимости смещения полюсов поворота от кривизны показало, что она адекватно описывается движение с небольшой кривизной. С увеличением кривизны траектории отмечена расходимость решения. Поэтому результаты моделирования выявили необходимость нового подхода к описанию неголономных связей взаимодействия гусениц с грунтом.

Во первых, целесообразно отказаться от допущения о равенстве угловой скорости поворота машины относительно своего центра масс и угловой скорости поворота центра масс машины относительно мгновенного центра вращения. Данное допущение справедливо для установившегося поворота, однако для переходных процессов входа в поворот и выхода из поворота данное равенство не имеет место. Реальное движение происходит в режиме неустановившегося поворота, при непрерывном изменении кривизны траектории.

Во-вторых, целесообразно в явном виде описать процессы юза и буксования гусениц при повороте, для чего необходимо ввести в уравнения неголономных связей коэффициенты юза и буксования. Уравнения связей между теоретической и действительной скоростями движения гусениц можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} \delta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot r - V_1 \cdot \cos\gamma_1 = 0; \\ \delta_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot r - V_2 \cdot \cos\gamma_2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $V_1 \cdot \cos\gamma_1$ и $V_2 \cdot \cos\gamma_2$ являются проекциями линейных скоростей точек O_1 и O_2 на продольную ось машины, и определяют величины действительных линейных скоростей движения соответствующих гусениц.

Линейные скорости точек O_1 и O_2 определяются выражениями

$$V_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2},$$

$$V_2 = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}$$

где проекции линейных скоростей точек O_1 и O_2 на координатные оси равны

$$\dot{x}_1 = \dot{x} - \dot{\psi} \cdot \frac{B}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right);$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + \dot{\psi}\cdot\frac{B}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right);$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y} - \dot{\psi}\cdot\frac{B}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right);$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y} + \dot{\psi}\cdot\frac{B}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right).$$

Углы между векторами линейных скоростей точек O_1 и O_2 и продольной осью машины равны

$$\gamma_1 = \mathrm{arctg}\frac{\dot{x}_1}{\dot{y}_1} + \psi - \frac{\pi}{2};$$

$$\gamma_2 = \mathrm{arctg}\frac{\dot{x}_2}{\dot{y}_2} + \psi - \frac{\pi}{2}.$$

Полученные уравнения связей (2) являются нелинейными и неразрешимыми относительно первых производных обобщенных координат. Поэтому коэфициенты при вариациях обобщенных координат, входящие в уравнения движения (1), определяются частными производными уравнений связи (2) по первым производным обобщенных координат.

Принято допущение о том, что в заданных дорожно-грунтовых условиях неустойчивость движения носит характер частичного бокового заноса, и полный занос исключен.

В настоящее время имеющиеся экспериментальные данные не позволяют построить общую аналитическую зависимость между кинематическими параметрами, адекватно описывающую их связь как в условиях устойчивого движения, так и в условиях бокового заноса. Поэтому для построения такой модели представляется целесообразным составить две системы дифференциальных уравнений, одна из которых описывает область устойчивого движения, а другая область неустойчивого движения (частичного бокового заноса).

Силы реакций неголономных связей в правой части уравнений движения $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\frac{\partial F_{ki}}{\partial q_i}$ определяются произведением множителей Лагранжа на соответствующие коэффициенты при вариации обобщенных скоростей в уравнениях связей (1).

Для определения границ устойчивости динамической модели можно использовать методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматривается локальное интегральное многообразие X динамической системы, являющееся хаусдорфовым пространством, содержащее множество траекторий $X = f(x,t)$, определенных на конечном интервале времени $[t_0, t_1]$.

Решение $X = f(x,t)$, полученное численным методом с заданным шагом интегрирования представляет собой дискретную последовательность точек в метрическом пространстве *E*. Траектория $X = f(x,t)$ является устойчивой, если множество X замкнуто и компактно в *E*.

Траектория $X = f(x,t)$ образует замкнутое множество, если существует наименьший период времени τ, при котором $X = f(x,t+\tau) = f(x,t)$. Замкнутая траектория является непрерывным образом отрезка $[0, \tau]$, где $f(0) = f(\tau)$. Если период τ - наименьший, то отображение однозначное, кроме точек $0, \tau$. Если склеить концы $0, \tau$, то получим однозначное и непрерывное отображение $S(0)$ на X. Множество X является в этом случае замкнутым на $\AA$. Точка x_0 является предельной точкой траектории X в топологии *E*, если $x_0 = \lim_{n\to\infty} f(x,t_n)$, $t_n \in R$. Множество предельных точек образует предельное множество $\varpi(X)$, которое содержится в замыкании множества X.

Множество X в метрическом пространстве *E* является компактным, если существует сходящаяся последовательность точек $\{x_n\} \subseteq X$ с пределом в X. Исходя из топологических свойств метрического пространства, компактность эквивалентна ограниченности множества X.

Практически проверяется существование ограниченного решения на конечном интервале времени $[t_0, t_1]$, соответствующего периоду р периодического решения $X = f(x,t)$, такого, что все значения функции $X = f(x,t)$, X - матрица решений, не превосходят некогорого числа е. При переменном внешнем возмущении (поворачивающем моменте) проверка ограниченности проверяется для каждого шага интегрирования путем «замораживания» текущей величины возмущения, и оценивается характер изменения функции $X = f(x,t)$ за время $[t_0, t_1] = p$ (время периода, соответствующее полному повороту динамической модели в плоскости Оху).

В общем случае траектория $X = f(x,t)$ является почти-периодической функцией с периодом τ, если расстояние $\rho(f(x,t),(x,+\tau))<\varepsilon$. Почти-периодическая функция $f(x,t)$ ограничена и непрерывна.

В случае, если $f(x,t)$ является периодической или почти-периодической функцией, это является достаточным условием компактности множества X. Если множество X есть компактное и замкнутое топологическое многообразие, оно гомеоморфно n-мерному тору. Тогда на X существует множество классов эквивалентности. Если расстояние между классами эквивалентности h определяется рациональным числом, то траектория на торе замкнута. Если h иррационально, траектория незамкнута и плотно заполняет всю поверхность тора. Задача об устойчивости динамической системы эквивалентна задаче об устойчивости n-мерного тора, являющегося инвариантным многообразием.

Согласно исследованиям Пуанкаре [1] при n>2 динамические системы могут не обладать глобальной устойчивостью. Возникающее хаотические перемещение фазовой точки не связано с действием каких-либо случайных сил, а обусловлено внутренними свойствами самой системы.

С течением времени фазовая траектория стремится к некоторому изолированному предельному множеству, которое в рассметриваемой модели является локальным интегральным многообразием X. Предельное множество является устойчивым, если все соседние траектории приближаются к нему при $t \to \infty$, и неустойчивым, если соседние траектории удаляются от него при $t \to \infty$. Математическим образом почти-периодической автоколебаний в фазовом пространстве является *n*-мерный тор.

Существование предельного множества проверяется по следующей методике. На основании признака сходимости Больцано и Коши, для того, чтобы функция имела предел на ограниченном интервале времени, необходимо и достаточно, чтобы значения переменных бесконечно сближались по мере возрастания их номеров. Тогда решение $X = f(x,t)$ имеет предел на ограниченном интервале времени $[t_0, t_1] = p$, если $\rho(x_{n+1}, x_n) \to 0$, то есть расстояния между точками x_{n+1} и x_n уменьшаются по метрике пространства E при возрастании их номеров (n – порядковый номер значения функции x дискретной последовательности, получаемой в результате численного интегрирования системы уравнений). Множество предельных точек x образует предельную траекторию ϖ(X), которая содержится в замыкании множества X. Так как множество X ограничено и являтся метрическим пространством, то его замыкание ϖ(X) ограничено, и следовательно – компактно. Тогда в замыкании ϖ(X) содержится периодическое решение, являющееся для $X = f(x,t)$ предельным множеством. Следовательно решение $X = f(x,t)$ устойчиво на ограниченном интервале времени $[t_0, t_1] = p$.

Основой построенного алгоритма численной оценки устойчивости решения системы уравнения является теорема Пуанкаре-Бендиксона для дифференцируемых многообразий [1].

Возможен также другой подход к данной проблеме. Динамичсекие системы выше второго порядка могут иметь общий вид установившихся колебаний – ограниченные нерегулярные (т.е. не периодические и не квазипериодические). Тогда для системы существует замкнутое множество (аттрактр), к которому осуществляется «притяжение» (attractio) изображающей точки на фазовой плоскости в процессе движения системы. Замкнутое множество $\varpi(X) \in R^n$ называется аттрактором системы, если:

а) существует такое открытое множество $\varpi_0(X) \supset \varpi(X)$, что все траектории $X = f(x,t)$ системы, начинающиеся в $\varpi_0(X)$, определены при всех $t \geq 0$ и сремятся к $\varpi(X)$ при $t \to \infty$ (т.е. $dist(X, \varpi(X)) \to 0$ при $t \to \infty$, если $X_0 \in \varpi_0(X)$, где $dist(X, \varpi(X)) = \inf\|X - y\|$ - расстояние от X до множества $\varpi(X)$, $y \in R^n$ - точка конца вектора y);

б) никакое собственное подмножество $\varpi(X)$ этим свойством не обладает.

Множество $\varpi(X)$, являющееся аттрактором, может содержать и замкнутые фазовые траетории (включая и пересекающиеся).

Условие непериодичности движения состоит в том, чтобы на замкнутых траекториях, содержащихся в аттракторе, система была неустойчивой. Тогда в силу непрерывного перехода с одной замкнутой (разомкнутой) траектории на другую, образуются неповторяющиеся ограниченные траектории. Такие траектории получили название странных [3]. Аттрактор называется странным, если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову. Наличие странного аттрактора является необходимым признаком хаотичности системы. Следует отметить, что данные результаты являются справедливыми для локальных интегральных многообразий. Проблема глобальной устойчивости динамических систем, описывающих криволинейное движение гусеничных машин, на сегодня является открытой.

При заданных внешних условиях поведение динамической системы определяется управляющими параметрами. В систему уравнений (1) входят два управляющих параметра – силы тяги на ведущих колесах $P_{вк1}$ и $P_{вк2}$, поэтому наглядное представление о поведении системы дает карта динамических режимов – диаграмма на плоскости, где отображаются области различных режимов динамики.

Способ построения карты состоит в том, чтобы просканировать с определенным шагом всю интересующую область. При этом в каждой точке проводится решение системы дифференциальных уравнений, затем анализируется характер режима, возникающего после завершения переходного процесса, и точка соответствующей области. Режим является устойчивым, если описывающая его траектория неограниченно стремится к предельному циклу, являющемуся геометрическим образом автоколебаний в фазовом пространстве.

Рассмотрены общие виды карт динамических режимов на плоскости параметров $(P_{вк1}, P_{вк2})$ для начальных скоростей движения V=15, 20, 30 км/ч. Дорожно-грунтовым условиям соответствуют значения моментов сопротивления повороту $\mu_{\max}$=0,7 и $\mu_{\max}$=0,9.

Светлые области соответствуют устойчивым (периодическим) режимам и обозначены цифрами. Черные области отвечают непериодическим хаотическим режимам. На границе области устойчивости наблюдается переход к хаосу через разрушение периодического режима. Под переходом к хаосу понимается последовательность бифуркаций, наблюдаемых при медленном изменении управляющего параметра в динамической системе на пути от регулярного к хаотическому поведению. Согласно работам Фейгенбаума для динамики на пороге хаоса характерны закономерности скейлинга (масштабного подобия), ассоциируется с определенными классами универсальности или типами критического поведения. Первый известный класс универсальности открыт Фейгенбаумом, позднее обнаружен ряд других типов критичности. Критическое поведение того или иного типа может реализоваться на поверхностях, отделяющих хаос и порядок, на линиях, ограничивающих эти поверхности, в точках на этих линиях. Соответственно, можно говорить о критичности коразмерности один, два, три. Для каждого типа критичности существуют определенные условия, при которых он может реализоваться.

При проведении многопараметрического анализа процесса перехода к хаосу в системе отмечено, что критическое поведение может ассоциироваться также с рождением странных нехаотических траекторий, не имеющих гладкой зависимости координатных переменных от фазовых, в отличие от регулярных траекторий, многообразие которых представляет собой инвариантный тор. Странная нехаотическая траектория реализуется на множестве положительной меры в пространстве параметров, и поэтому должна рассматриваться как феномен, характерный для области между областями устойчивости и хаоса. Подобное явление отмечалось ранее применительно к неавтономным системам с квазипериодическим внешним воздействием. В рассматриваемом случае такой эффект отмечен в некоторых точках пространства параметров автономной системы, совершающей движение с несколькими независимыми колебательными составляющими. Однако на данном этапе не представляется возможным выяснить насколько заметную часть пространства параметров может занимать множество этих точек. Данный вопрос в теории динамических систем не исследован, за исключением отдельных сообщений в литературе относительно наблюдения странных нехаотических траекторий в автономных системах.

Особенно интересна для исследования область на плоскости параметров, где подходящие друг к другу критические линии терпят разрыв и образуют некоторую ограниченную слева и справа область квазипериодических режимов.

Повышение скорости движение V сужает область устойчивости динамической системы.

В тех случаях, когда имеет место мультистабильность, т.е. сосуществует два и более предельных циклов при одних и тех же параметрах, карту динамических режимов надо представлять как совокупность перекрывающихся листов со своей раскраской на каждом из них.

Проверка устойчивости решения проводится на каждом шаге интегрирования системы уравнений. Нарушение устойчивости математической модели физически означает потерю сцепления гусениц с грунтом и начало неуправляемого бокового скольжения. В случае нарушения условия устойчивости решения модель, описываемая уравнениями (1), (2) теряет физический смысл. Для адекватного описния неустойчивого движения требуется изменить структуру математической модели.

При моделировании движения машины в условиях частичного бокового заноса предполагается, что коэффициенты буксования гусениц δ_1 и δ_2 становятся постоянными. Тем самым изменяются уравнения неголономных связей. Силы сопротивления движению машины являются силами трения гусениц по грунту и определяются эллипсоидом трения. Силы сопротивления вращению гусениц также являются продольными составляющими сил трения, и тем самым связаны с направлением вектора линейной скорости машины. Коэффициент сопротивления повороту при частичном боковом заносе может быть описан экспоненциальной зависимостью и существенно не зависит от кривизны. Полученная система дифференциальных уравнений является математической моделью движения в условиях частичного бокового заноса.

В процессе бокового заноса гусеничная машина частично теряет свою кинетическую энергию, и по истечении определенного времени процесс бокового заноса прекращается, сцепление гусениц с грунтом восстанавливается. В настоящее время недостаточно эмпирических данных для построения модели данного процесса. Поэтому целесообразно использовать косвенный способ определения условий перехода от модели движения «с заносом» к модели движения «без заноса»

Для этого при реализации модели «с заносом» необходимо на каждом шаге интегрирования выполнять следующую проверку. Решение системы уравнений, описывающих движение «с заносом», полученное на i-м шаге интегрирования, подставлять в качестве начальных условий в систему уравнений, описывающую движение «без заноса». Если на шаге i+1 решение неустойчиво, то для данного шага проводится повторное моделирование, но уже путем решения системы уравнений движение «с заносом». Если на некотором i+s шаге условие устойчивости модели «без заноса» выполняется, полученное решение является начальнм условием для последующего шага интегрирования и т.д.

Данный процесс позволяет получить траекторию криволинейного движения гусеничной машины, корая может быть реализована при выполнении защитного моделирования.

Предложенная модель с переменной структурой более точно определяет траекторию движения машины, так как позволяет описать участки, на которых движение неустойчиво, но часто используется водителем, особенно в экстремальных условиях.

При помощи данной модели определены границы области возможных параметров движения гусеничной машины.

Список литературы

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения : пер. с англ. М.: Наука, 1970. 720 с.

2. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.

3. Вязников М.В. Исследование криволинейного движения гусеничной машины // Материалы XXIV Российской школы по проблемам науки и технологий. Том 3. Миасс: УрО РАН, 2004. С. 302-311.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408
electronic scientific and technical journal

Methods for stability analysis of a tracklaying vehicle's curvilinear motion

12, December 2012
DOI: 10.7463/0113.0517531

Vyaznikov M.V.

Russia, Cheboksary, Limited Liability Company "MIKONT"
mv.vaznikov@tplants.com

This article considers the question of stability rating of a tracklaying vehicle's curvilinear motion, considering the lateral drift. Methods of the theory of ordinary differential equations were used to determine stability boundaries of a dynamic model. The solution obtained by the numerical method with the specified step of integration is presented with a discrete sequence of points in a metric space. It was shown that the phase trajectory tends to an isolated limit set which, in the model, is a local integral manifold. Stability conditions of the limit set are emphasized. The developed algorithm of numerical stability assessment of solution of a system of equations is based on the Poincare-Bendixson theorem for differentiable manifolds. Also, the author considers an approach to solving the problem of motion stability on the basis of mapping the dynamic regimes on the parameter plane and defining the boundary of the domain of possible motion parameters of a tracklaying vehicle.

Publications with keywords: stability, dynamics, context, path, caterpillar machines, a sign of convergence
Publications with words: stability, dynamics, context, path, caterpillar machines, a sign of convergence

References

1. Hartman P. *Ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, 1964. (Russ. ed.: Khartman F. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniia*. Moscow, Nauka, 1970. 720 p.).

2. Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelineinye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometrical methods of analysis and synthesis].Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005. 520 p.

3. Viaznikov M.V. Issledovanie krivolineinogo dvizheniia gusenichnoi mashiny [Study of the curvilinear motion of caterpillar machine]. *Materialy 24 Rossiiskoi*

shkoly po problemam nauki i tekhnologii [Materials of the 24th Russian school on the problems of science and technologies]. Vol. 3, Miass, Ural branch of RAS Publ., 2004, pp. 302-311.