

УДК 531.01/534.112

Продольные колебания стержней при наличии газовой полости

Павлов А.М.

*Студент,
кафедра «Космические летательные аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э.
Баумана, г. Москва, Россия*

*Научный руководитель: А.А. Пожалостин, профессор кафедры «Теоретическая
механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

МГТУ им. Баумана
pavlov_arseniy@mail.ru

При определении собственных частот и форм колебаний трубопроводов, заполненных жидкостью, часто возникает необходимость учета газовых полостей внутри жидкости [3]. При этом есть несколько способов их учета. Целью данной работы является сравнение двух таких случаев: масса газа считается как сосредоточенная, а во втором – учитывается сжимаемость газа, при этом масса его принимается малой.

Для определения собственных частот колебаний, принимается следующая модель: рассматриваются продольные колебания двух стержней, заделанных по внешним торцам, с полостью между ними.

Стержни считаются однородными, справедлива гипотеза сплошности, материал стержней изотропный и подчиняется закону Гука: $\sigma = \epsilon E$. Здесь σ – нормальное напряжение в поперечном сечении стержня (постоянное по сечению); ϵ – относительная деформация (растяжения – сжатия), E – модуль упругости первого рода. При этом, для жидкости можно определить $E = \rho a^2$, где ρ – плотность жидкости, a – скорость звука в данной жидкости. Данная задача может быть рассмотрена как простейший случай наличия каверны в трубопроводе системы подачи топлива в ЖРД.

1) Масса газа учитывается как сосредоточенная.

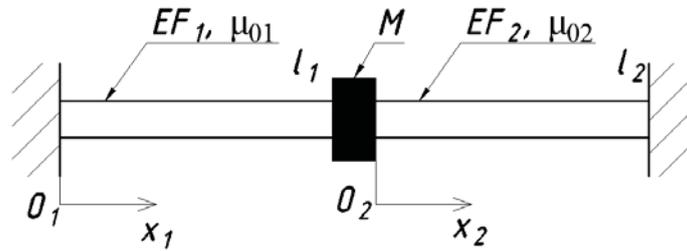


Рис.1

Расчетная схема для первого случая

В качестве исходных данных примем:

$$\mu_{01} = \mu_m \alpha_1 \quad EF_1 = EF_m \beta_1$$

$$\mu_{02} = \mu_m \alpha_2 \quad EF_2 = EF_m \beta_2$$

$$M = \rho_{\text{газа}} V = \gamma \mu_m$$

Запишем дифференциальное уравнение свободных продольных колебаний для первого и второго стержней (по материалам [1]).

$$EF_1 \frac{\partial^2 U_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} - \mu_{01} \frac{\partial^2 U_1(x_1, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$EF_2 \frac{\partial^2 U_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} - \mu_{02} \frac{\partial^2 U_2(x_2, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Будем решать данные уравнения методом Фурье:

$$U_i(x_i, t) = f_i(x_i) \cdot S(t), \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

где

$f_i(x_i)$ – форма свободного колебания

$S(t)$ – временной множитель

В результате подстановки (3) в уравнения (1) и (2), получим:

$$\begin{cases} f_i'' + \frac{\mu_{0i} \omega^2}{EF_i} f_i = 0 & i = 1, 2 \\ \ddot{S} + \omega^2 S = 0 \end{cases}$$

Решение для собственных форм колебаний будем искать в виде:

$$f_1(x_1) = C_1 \cos(\lambda_1 x_1) + C_2 \sin(\lambda_1 x_1)$$

$$f_2(x_2) = C_3 \cos(\lambda_2 x_2) + C_4 \sin(\lambda_2 x_2)$$

$$\lambda_i^2 = \frac{\mu_{0i} \omega^2}{EF_i}$$

Для нахождения констант интегрирования запишем граничные условия.

Из условий закрепления определяемых из расчетной схемы рис. 1:

$$1. U_1(0, t) = 0 \Rightarrow f_1(0) = 0$$

$$2. U_2(l_2, t) = 0 \Rightarrow f_2(l_2) = 0$$

Из условия совместности деформаций:

$$3. U_1(l_1, t) = U_2(0, t) \Rightarrow f_1(l_1) = f_2(0)$$

Силовое граничное условие:

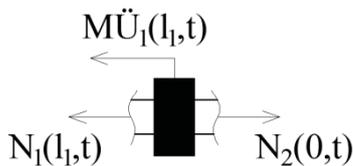


Рис.2

Силовое граничное условие

$$4. -N_1(l_1, t) - M \cdot \ddot{U}_1(l_1, t) + N_2(0, t) = 0 \Rightarrow EF_1 f_1'(l_1) - EF_2 f_2'(0) - M\omega^2 f_1(l_1) = 0$$

Подставим $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ в выражения граничных условий:

$$1. C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$2. C_3 \cos(\lambda_2 l_2) + C_4 \sin(\lambda_2 l_2) = 0$$

$$3. C_2 \sin(\lambda_1 l_1) = C_3 \cos(0) + C_4 \sin(0) \Rightarrow C_3 = C_2 \sin(\lambda_1 l_1)$$

$$4. EF_1 \lambda_1 C_2 \cos(\lambda_1 l_1) - EF_2 \lambda_2 (C_4 \cos(0) - C_3 \sin(0)) - M\omega^2 C_2 \sin(\lambda_1 l_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_4 = C_2 \cdot \left(\frac{EF_1 \lambda_1 \cos(\lambda_1 l_1) - M\omega^2 \sin(\lambda_1 l_1)}{EF_2 \lambda_2} \right)$$

$$\text{Примем: } F_1 = F_2 = F, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu, l_1 = l_2 = l$$

Тогда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

$$C_4 = C_2 \cdot (\cos(\lambda l) - \gamma \lambda l \sin(\lambda l))$$

Подставим C_3 и C_4 в условие 2.

$$C_2 \sin(\lambda l) \cos(\lambda l) + C_2 \cdot (\cos(\lambda l) - \gamma \lambda l \sin(\lambda l)) \cdot \sin(\lambda l) = 0$$

Примем $C_2=1$, тогда

$$2 \cos(\lambda l) \cdot \sin(\lambda l) - \gamma \lambda l \sin^2(\lambda l) = 0$$

На рис. 3 видно, что при уменьшении значения коэффициента γ , то есть при уменьшении размеров газовой полости, происходит увеличение первой собственной частоты, в пределе стремящееся к значению, соответствующему системе без полости. Но так как по сравнению с жидкостью, плотность газа мала, а также невелик размер каверны ($\gamma \rightarrow 0$), то можно утверждать, что учет газа как сосредоточенной массы практически не влияет на собственные частоты системы. При увеличении массы газа, частота напротив падает, и в пределе (масса газа бесконечна) равна нулю.

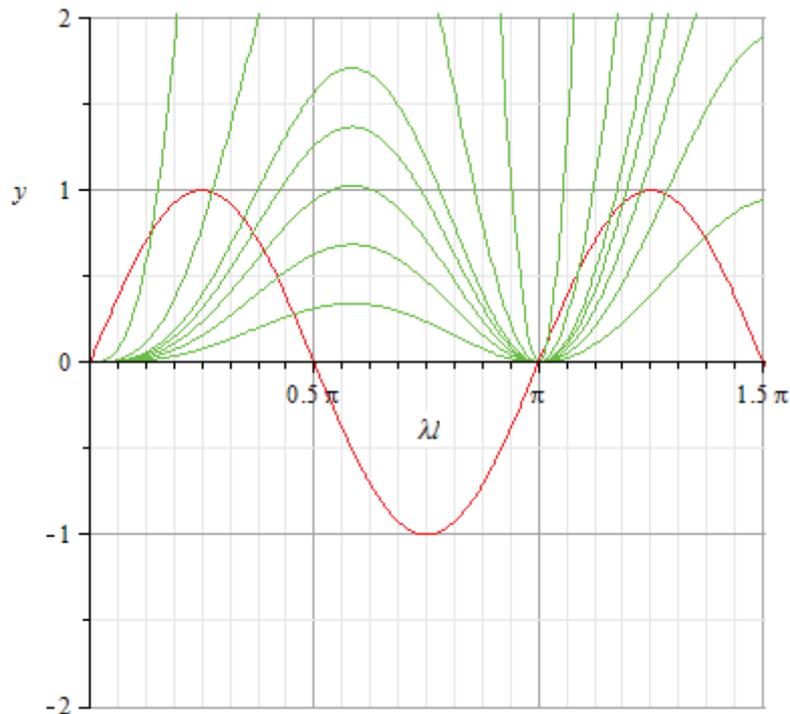


Рис. 3. Решение трансцендентного уравнения

2) Решение задачи с учетом сжимаемости газа

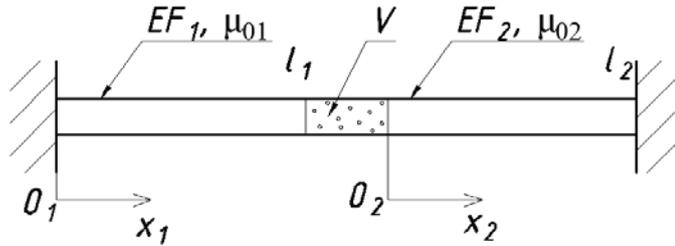


Рис.4. Расчетная схема для второго случая

В данном случае процесс составления дифференциальных уравнений колебаний ничем не будет отличаться от случая 1) с сосредоточенной массой.

Основное отличие решения данной задачи будет состоять в записи граничных условий и частотного уравнения.

Решение для собственных форм колебаний будем искать в виде:

$$f_1(x_1) = C_1 \cos(\lambda_1 x_1) + C_2 \sin(\lambda_1 x_1)$$

$$f_2(x_2) = C_3 \cos(\lambda_2 x_2) + C_4 \sin(\lambda_2 x_2)$$

$$\lambda_i^2 = \frac{\mu_{0i} \omega^2}{EF_i}$$

Для нахождения констант интегрирования запишем граничные условия.

Из условий закрепления:

$$1. U_1(0, t) = 0 \Rightarrow f_1(0) = 0$$

$$2. U_2(l_2, t) = 0 \Rightarrow f_2(l_2) = 0$$

Для записи граничных условий на торцах, соприкасающихся с газовой полостью, запишем уравнения, описывающие процесс сжатия газа. Ввиду высокой скорости протекания колебательных процессов, изменение термодинамических параметров можно описать с помощью адиабатического закона, согласно [2]:

$$PV^\kappa = const \quad (4)$$

где P – давление [Па], V – объем [м^3], κ – показатель адиабаты.

Найдем зависимость изменения давления от изменения объема. Для этого разложим V^κ в ряд:

$$(V + z)^\kappa = V^\kappa + \kappa \frac{zV^{\kappa-1}}{1!} + \dots$$

Тогда:

$$(p + \Delta p)(V^\kappa + \Delta V \kappa V^{\kappa-1}) = const \quad (5)$$

Приравняв (4) уравнению (5), и исключив бесконечно малые высших порядков, получим:

$$\Delta p = -\kappa p \frac{\Delta V}{V}$$

где: $\Delta V = U_2(0, t)F_2 - U_1(l, t)F_1$

Запишем граничное условие для первого стержня:

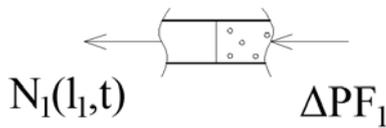


Рис. 5

Граничное условие для первого стержня

$$3. -N_1(l_1, t) - \Delta PF_1 = 0 \Rightarrow EF_1 f_1'(l_1) - \frac{\kappa p}{V} (f_2(0, t)F_2 - f_1(l, t)F_1) \cdot F_1 = 0$$

Для второго стержня:

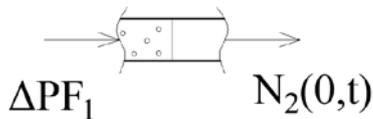


Рис. 6

Граничное условие для второго стержня

$$4. N_2(0, t) + \Delta PF_2 = 0 \Rightarrow EF_2 f_2'(0) - \frac{\kappa p}{V} (f_2(0, t)F_2 - f_1(l, t)F_1) \cdot F_2 = 0$$

Подставим $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ в выражения граничных условий:

$$1. C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$2. C_3 \cos(\lambda_2 l_2) + C_4 \sin(\lambda_2 l_2) = 0$$

$$3. EF_1 (-C_1 \lambda_1 \sin(\lambda_1 l_1) + C_2 \lambda_1 \cos(\lambda_1 l_1)) - \frac{\kappa p}{V} [(C_3 \cos(0) + C_4 \sin(0))F_2 - (C_1 \cos(\lambda_1 l_1) + C_2 \sin(\lambda_1 l_1))F_1] \cdot F_1 = 0$$

$$4. EF_2 (-C_3 \lambda_2 \sin(0) + C_4 \lambda_2 \cos(0)) - \frac{\kappa p}{V} [(C_3 \cos(0) + C_4 \sin(0))F_2 - (C_1 \cos(\lambda_1 l_1) + C_2 \sin(\lambda_1 l_1))F_1] \cdot F_2 = 0$$

Примем: $F_1 = F_2 = F, \mu_{01} = \mu_{02} = \mu, l_1 = l_2 = l$

Тогда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

Проведя элементарные преобразования получим:

$$\begin{cases} C_2 \tilde{\lambda} \cos(\tilde{\lambda}) - C_3 \xi l + C_2 \xi l \sin(\tilde{\lambda}) = 0 \\ C_4 \tilde{\lambda} - C_3 \xi l + C_2 \xi l \sin(\tilde{\lambda}) = 0 \\ C_3 \cos(\tilde{\lambda}) + C_4 \sin(\tilde{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

где $\xi = \frac{\kappa \rho F}{VE}$, $\tilde{\lambda} = \lambda l$

Решая систему (6), получим:

$$C_4 \tilde{\lambda} = -C_4 2 \xi l \operatorname{tg}(\tilde{\lambda})$$

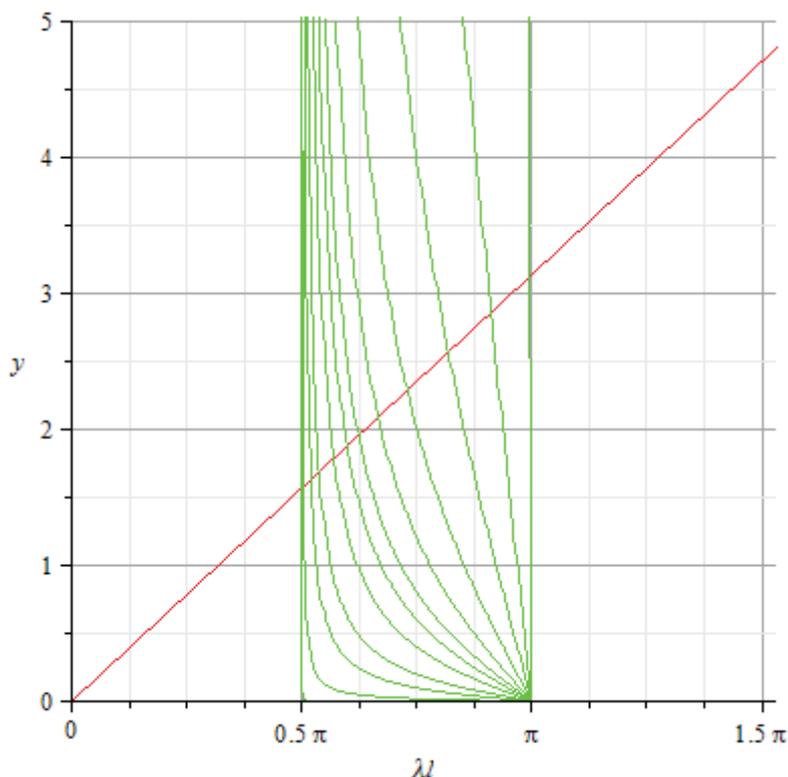


Рис. 7. Решение трансцендентного уравнения для второго случая

Из рис.7 можно отметить, что при увеличении жесткости полости (увеличении величины ξ) система стремится к схеме двух заделанных с обоих торцов стержней. При уменьшении ξ система приобретает вид двух заделанных с одного торца стержней длиной l .

Список литературы

1. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний. М.: МГТУ им. Баумана, 2001.—272с.;
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкостей и газов, М.:Дрофа, 2003. — 840 с.
3. Пилипенко В.В., Задонцев В.А., Натанзон М.С. Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем. М.: Машиностроение, 1977.—352с.