

э л е к т р о н н ы й ж у р н а л

МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК

Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл №. ФС77-51038.

УДК 539.3

**Расчет расщепление собственных частот кольцевого резонатора твердотельного
волнового гироскопа на основе численного интегрирования уравнений динамики
стержня с некруговой осью**

А.В. Ли

Студент, кафедра «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

*Научный руководитель: Сорокин Ф.Д., д.т.н., профессор кафедры
«Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Roccoon17@gmail.com

Успехи в нетрадиционных гироскопических приборах, построенных на новых физических принципах, позволили создать высокочувствительные элементы систем ориентации, навигации и управления подвижными объектами. К такого рода приборам относится волновой твердотельный гироскоп (ВТГ), работа которого основана на использовании инертных свойств стоячих волн, возбужденных во вращающихся осесимметричных оболочках.

Преимуществами ВТГ являются: высокая точность, малое потребление мощности, конструктивная простота механических узлов, устойчивость к прерыванию подачи электропитания, малое время готовности, широкий диапазон рабочих температур, устойчивость к воздействию ионизирующего излучения, малая чувствительность к линейным перегрузкам, большой срок службы, возможность применения автоматизированного производства при изготовлении ВТГ.

В реальных ТВГ резонатор, как правило, представляет собой либо стержень кольцевой формы, либо тонкостенную упругую оболочку вращения, изготовленные из плавленого кварца, сапфира или другого материала, имеющего малый коэффициент потерь при колебаниях.

По принципу действия и применению в различного рода гироскопических системах ВТГ подразделяются на ВТГ, работающие в режиме ДУС - датчика угловой скорости (ВТГ-ДУС), и ВТГ, работающие в режиме ИГ - интегрирующего гироскопа (ВТГ-ИГ). ВТГ-ДУС обладает невысокой точностью (случайная составляющая скорости ухода на уровне 10^{-2} град/с). ВТГ-ИГ имеет сравнительно высокую точность (случайная скорость ухода может быть достигнута на уровне 10^{-4} град/ч). ВТГ-ИГ является перспективным чувствительным элементом бескарданных инерциальных навигационных систем (БИНС) самолетов и космических летательных аппаратов.

Первые попытки создания ВТГ-ДУС относятся к 1960-м гг. Существует несколько вариантов построения ДУС, в качестве чувствительных элементов (резонаторов) которых используют кольцо, цилиндр, полусферическую оболочку. Стоячая волна, возбужденная в резонаторе, поворачивается на угол, пропорциональный величине проекции входной угловой скорости на ось его симметрии. При этом проявить себя в полной мере эффект Г.Н.Вгуан не может, так как для поддержания колебаний резонатора применяется позиционное возбуждение, что ограничивает угол поворота стоячей волны.

К середине 80-х гг. благодаря возросшему уровню технологии и электроники появилась возможность создания ВТГ-ИГ. В работе Skott W.B. "Delco makes low-cost gyro prototype" описан прибор американской фирмы Delco Electronics, разработчикам которого путем выбора высокодобротного материала полусферического резонатора и замены позиционного возбуждения параметрическим удалось создать интегрирующий ВТГ (ВТГ-ИГ).

В нашей стране экспериментальные образцы прецизионных ВТГ созданы на предприятии АО РПКБ (Раменское приборостроительное конструкторское бюро). Помимо создания образцов гироскопов разработаны и внедрены в производство автоматизированные стенды на базе ПЭВМ для испытаний резонаторов, их динамической балансировки с помощью лазера, стенд полунатурного моделирования для точностных испытаний ВТГ, а также методики оценки таких параметров, как неоднородность зазора между электродом и резонатором, расщепление собственной частоты резонатора, величина разнодобротности.

Схема кольцевого твердотельного резонатора представляет собой тонкое упругое кольцо, связанное с основанием при помощи торсионов (рис.1).

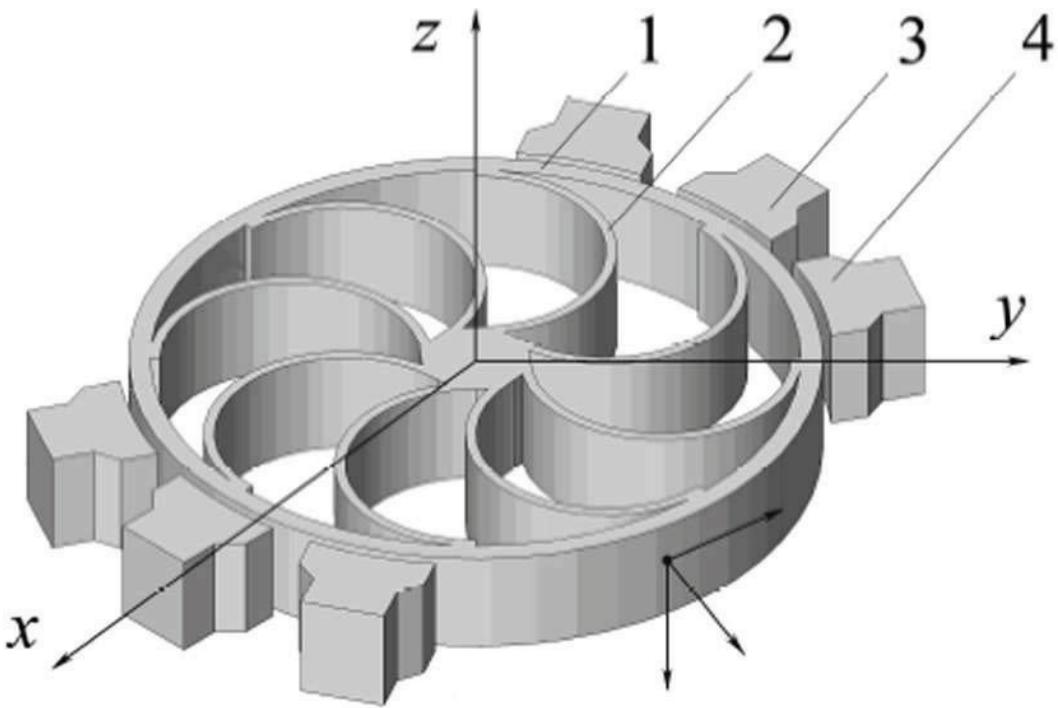


Рис. 1. Кольцевой твердотельный волновой гироскоп

Резонатор 1 изготавливается по технологии МЭМ совместно с торсионами 2 упругого подвеса и электронным контуром управления. Колебания резонатора возбуждаются и регистрируются системой управляющих 3 и измерительных электродов 4.

Основы аналитической теории ВТГ изложены в работах Журавлева В.Ф. В них показано, что эффект Бранена сохраняется при вращении кольцевого резонатора с переменной угловой скоростью. В монографии [1] исследованы метод осреднения уравнения движения кольцевого резонатора, разработана теория функционирования идеального гироскопа.

В данной работе рассмотрен алгоритм и некоторые результаты расчёта расщепления частот кольцевого резонатора ТВГ, вызванного наиболее важным на практике дефектом – малыми отклонениями геометрии оси резонатора от идеальной круговой.

Известна формула для собственных частот кольца

$$p = p_k = \frac{k(k^2-1)}{\sqrt{k^2+1}} \sqrt{\frac{EJ}{m_0 R^4}} \quad [3] \quad (1)$$

где m_0 - удельная масса кольца; R - радиус; E - модуль Юнга материала, J - момент инерции поперечного сечения резонатора.

Эта формула определяет частоты собственных колебаний кольца в своей плоскости. Значению $k = 1$ соответствует нулевая частота, так как при $k = 1$ формулы описывают смещение кольца как жесткого тела. Формы движения при $k = 1, 2, 3$ показаны на рисунке 2.

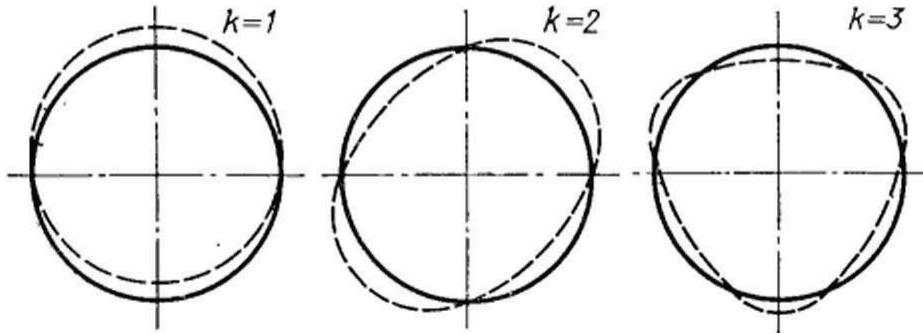


Рис. 2. Формы движения резонатора при различных k

В данном проекте для нахождения собственных частот кольцевого резонатора используется система дифференциальных уравнений динамики вынужденных гармонических колебаний стержня [6, 7]:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{ds} &= -p^2 * U_x(s) * m_0 - q_x \\ \frac{dQ_y}{ds} &= -p^2 * U_y(s) * m_0 - q_y \\ \frac{dM}{ds} &= -Q_y(s) * \cos(\varphi) + Q_x(s) * \sin(\varphi) \\ \frac{dU_x}{ds} &= -v(s) * \cos(\varphi) \\ \frac{dU_y}{ds} &= v(s) * \sin(\varphi) \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{M(s)}{EJ} \end{aligned} \quad (2)$$

Для некруглого кольца вместо координат s гораздо удобнее полярная координата φ , так как границы изменения φ точно известны (от 0 до 2π). Для перехода от координат s к координате φ используется параметр Ламе:

$$A = ds/d\varphi, \quad (3)$$

который для идеального кольца равен r_0 .

Теперь система дифференциальных уравнений приобретает вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_x}{d\varphi} &= (-p^2 * U_x(\varphi) * m_0 - q_x) * r_0 \\
\frac{dQ_y}{d\varphi} &= (-p^2 * U_y(\varphi) * m_0 - q_y) * r_0 \\
\frac{dM}{d\varphi} &= (-Q_y(\varphi) * \cos(\varphi) + Q_x(\varphi) * \sin(\varphi)) * r_0 \\
\frac{dU_x}{d\varphi} &= (-v(\varphi) * \sin(\varphi)) * r_0
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{dU_y}{d\varphi} = (v(\varphi) * \cos(\varphi)) * r_0$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{M(\varphi)}{EJ} * r_0$$

Используя граничные условия:

$$U_x(0) = U_x(2\pi), U_y(0) = U_y(2\pi), M(0) = M(2\pi), \tag{5}$$

$$Q_x(0) = Q_x(2\pi), Q_y(0) = Q_y(2\pi), v(0) = v(2\pi)$$

решаем систему ДУ численно с помощью любого математического пакета.

При этом внешние нагрузки задаются в виде

$$q_x = q_n \cos(\varphi), q_y = q_n \sin(\varphi), \tag{6}$$

где для нахождения "легкой формы колебаний":

$$q_n = \sin(\pi - \varphi), \tag{7}$$

а для "тяжелой":

$$q_n = \sin(\pi - (\varphi - \pi/4)), \tag{8}$$

Частоту находим через отношения Релея:

$$p^2 = 2 * U / M_{ob} \tag{9}$$

$$p = \sqrt{\frac{U}{T^*}} \tag{10}$$

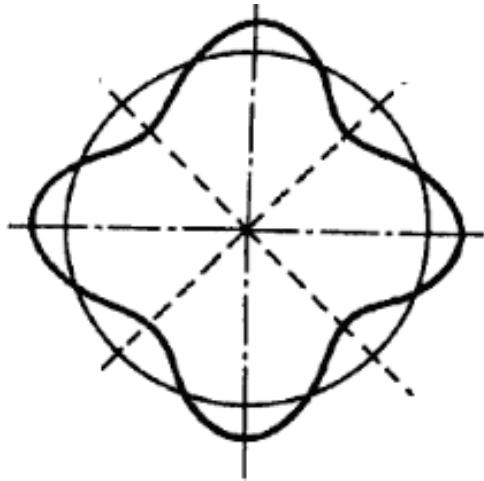
$$U = \int_0^{2\pi} \left(\frac{M^2}{2EJ} \right) Ad\varphi \tag{11}$$

$$T^* = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (U_x^2 + U_y^2) m_0 Ad\varphi = M_{ob} / 2 \tag{12}$$

где (11) это энергия деформации при чистом изгибе, а (12) половина обобщенной массы.

Погрешность расчета собственной частоты кольца составляет меньше 0,001%, что

объясняется точным "попаданием" в формы колебаний при заданных q_n



Для расчета неидеального кольца введем ξ - амплитуду радиального отклонения от идеальной геометрии оси кольца, и n - волновое число отклонения формы. На рисунке 3 представлена форма оси при $n=4$. Амплитуду радиального отклонения ξ задаем в долях от радиуса r_0 .

Рис. 3. Форма оси резонатора при $n=4$. [4]

Далее задается возмущение формы кольца, когда

$$r = r_0 + \xi \cos(n\varphi) \quad (13)$$

Для этого разложим r по декартовым координатам x и y :

$$\begin{cases} x = (r_0 + \xi \cos(n\varphi)) \cos\varphi \\ y = (r_0 + \xi \cos(n\varphi)) \sin\varphi \end{cases} \quad (14)$$

причем параметр Ламе будет равен

$$A = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}. \quad (15)$$

При введении возмущения формы кольца необходимо учитывать изменение наклона сечения, поэтому запишем проекцию орта касательной к оси стержня t в декартовых координатах:

$$t_x = \left(\frac{dx}{d\varphi}\right) / A, t_y = \left(\frac{dy}{d\varphi}\right) / A \quad (16)$$

Тогда система дифференциальных уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{d\varphi} &= (-p^2 * U_x(\varphi) * m_0 - q_x) * A \\ \frac{dQ_y}{d\varphi} &= (-p^2 * U_y(\varphi) * m_0 - q_y) * A \\ \frac{dM}{d\varphi} &= (-Q_y(\varphi) * t_x + Q_x(\varphi) * t_y) * A \\ \frac{dU_x}{d\varphi} &= (-v(\varphi) * t_y) * A \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{dU_y}{d\varphi} = (\nu(\varphi) * t_x) * A$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{M(\varphi)}{EJ} * A$$

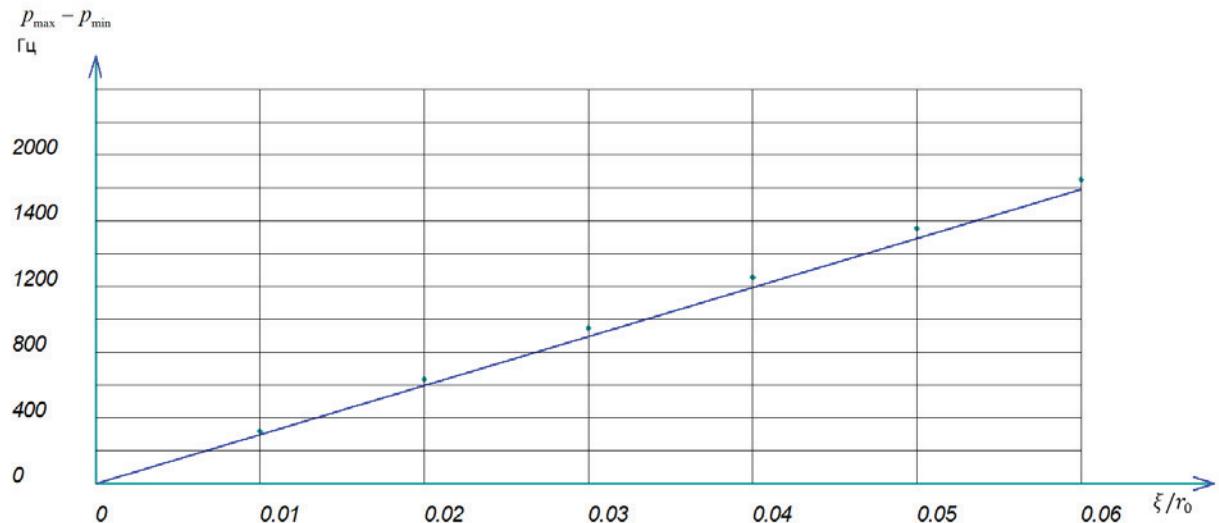
Границные условия остаются такими же как и для идеального кольца. Собственная частота на основе итерационного метода , изложенного в [3]. Приближенное значение частоты, которое соответствует идеальному кольцу, уточняется через отношение Релея. После этого система интегрируется заново с уточненной частотой, и так до тех пор, пока значение частоты не перестанет меняться с точностью до 5-6 значащих цифр.

В работе О.С. Нарайкин, Ф.Д. Сорокин, С.А. Козубняк [2] рассмотрены алгоритм и некоторые результаты расчёта расщепления частот кольцевого резонатора ТВГ, вызванного дефектом - малыми отклонениями геометрии оси резонатора от кольцевой.

$$p_{\max} - p_{\min} = \frac{3\xi_4}{R} p_0 \quad (18)$$

В результате получают зависимость расщепление круговой частоты по отношению к частоте невозмущённой системы. Для k=2 (18) зависимость получается линейная.

На графике видно что есть небольшое расхождение с результатами работы О.С. Нарайкин, Ф.Д. Сорокин, С.А. Козубняк, хотя линейная зависимость сохраняется. Расхождения из -за того ,что в статье, вышеупомянутых авторов, Метод возмущений из дает только первое приближение, поэтому и дает прямую. А в данной работе получилась парабола, очень похожая на прямую, так как записаны точные уравнения малых колебаний кривого стержня.



Вывод

1. Получено численное решение, позволяющее вычислять расщепления собственной частоты резонатора по функции радиальных возмущений геометрии кольца.
2. Исследован наиболее важный для практики дефект кольцевого резонатора твердотельного волнового гироскопа – малое отклонение геометрии оси резонатора от идеальной окружности.

Список литературы

1. Журавлева В.Ф. Климов Д.М. "Волновой твердотельный гироскоп" М.: Наука 1985.
2. Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Козубняк С.А. "Расщепление собственных частот кольцевого резонатора твердотельного волнового гироскопа, вызванное возмущением формы"//Вестник МГТУ им Н.Э.Баумана. -2012.-№6.-С.176-185
3. В.Л. Бидерман "Теория механических колебаний" М.: Высшая школа, 1980. -408 с.
4. В.А. Матвеев, В.И. Липатников, А.В. Алексин "Проектирование волнового твердотельного гироскопа" М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998.-168 с.
5. Меркульев И. В. Автореферат "Динамика гироскопических чувствительных элементов систем ориентации и навигации малых космических аппаратов"Автореферат дисс...канд. техн. наук. - М.: МЭИ, 2008.-31с.
6. Светлицкий В.А. Механика стержней: Ч. 1. - М.: Высшая школа, 1987. -320 с.
7. Светлицкий В.А. Механика стержней: Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1987. – 304 с.