электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 519.254

Сравнение точности различных методов формирования страховых резервов на моделированных и реальных данных

М.А. Кудрявцева

Студент, кафедра «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

Научный руководитель: Тимонин В.И., д.т.н., профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

МГТУ им. Н.Э. Баумана
singularite@ya.ru

Сравнение точности различных методов формирования страховых резервов на моделированных и реальных данных

Задача резервирования имеет следующую постановку. Пусть S_{ik}, $1 \le i \le I-$суммарная выплата в k-ом году развития по убыткам, произошедшим в i-ом году события. Первый год развития ($k = 1$) совпадает с годом события. Вторым годом развития ($k = 2$) является календарный год, следующий за годом события и т.д. За I лет, предшествующих текущему году, становятся известны значения S_{ik}, $1 \le i \le I + 1$, образующие так называемый треугольник развития (табл. 1).

Таблица 1

Треугольник развития

	Год развития								
	S_{11}	S_{12}	…	S_{1k}	…	$S_{1,I+1-i}$	…	$S_{1,I-1}$	S_{1I}
	S_{21}	S_{22}	…	S_{2k}	…	$S_{2,I+1-i}$	…	$S_{1,I-1}$	
Год события	…	…	…	…	…	…	…	…	
	S_{i1}	S_{i2}	…	S_{ik}	…	$S_{i,I+1-i}$			
	…	…	…	…					
	$S_{I+1-k,1}$	$S_{I+1-k,2}$	…	$S_{I+1-k,k}$					

	…	…							
	$S_{I-1,1}$	$S_{I-1,2}$							
	S_{I1}								

Для самого первого года события мы знаем выплаты за I лет развития. Развитие первого года события предполагается полностью завершенным, т.е. выплаты будущих лет развития $S_{1\,I+1}, S_{2\,I+2}$ и т.д. равны нулю. По истечении одного года треугольник развития приобретает только новую гипотенузу $S_{I1}, S_{I-1,2}, \ldots, S_{i,I+1-i}, \ldots, S_{1I}$, значения которой соответствуют последнему календарному году.

Если по истечении I лет развития все убытки одного года события известны и полностью урегулированы, то величина $S_{i+} = S_{i1} + S_{i2} + \cdots + S_{iI}$ представляет собой совокупный убыток i-ого года события. От суммы S_{i+} на текущий момент известна только часть $S_{изв} = S_{i1}, S_{i2}, \ldots, S_{ik}, \ldots, S_{i,I+1-i}$. Цель методов резервирования оценить неизвестную часть $R_i = S_{i+} - S_{\text{изв.}}$, R_i — это фактически требуемый размер страхового резерва i-ого года развития.

Часто треугольник развития строится в кумулятивной форме, когда на месте (i, k) стоит не приращение S_{ik}, а суммарный (аккумулированный) уровень убытка $C_{ik} = S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{ik}$.

При формировании страховых резервов используются три основных метода:

- Метод цепной лестницы;
- Метод Борнуэттера-Фергюсона;
- Метод мюнхенской цепной лестницы.

Метод формирования резервов, предложенный Министерством Финансов Российской Федерации от 11 июня 2002 года №51н, есть модификация метода Борнуэттера-Фергюсона.

У каждого из этих методов есть свои предположения и допущения, при которых полученный резерв отвечает требованиям адекватности и целесообразности.

Описание метода цепной лестницы

Представим конечный убыток $C_{iI} = S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{iI}$. в мультипликативной форме

$$C_{iI} = C_{i1} F_{i1} F_{i2} \cdot \ldots \cdot F_{i,I-1}, \qquad (1)$$

где

$$F_{ik} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$$

является мультипликативным приращением суммарного убытка $C_{ik} = S_{i1} + S_{i2} + \ldots + S_{ik}$, $1 \le k \le I$, i-ого года события при переходе от k-ого к (k+1)-

ому году развития. Мультипликативное разложение возможно только при условии $C_{ik} > 0$ для всех i, k. Иначе произведение (1) необходимо начинать не с C_{i1}, а с первого положительного C_{ik}.

Тогда предположение (в среднем) одинакового для всех лет событий распределения конечного убытка C_{iI} по годам развития можно трактовать как независимость математического ожидания случайной величины F_{ik} от года события i:

$$E(F_{ik}) = f_k, 1 \le i \le I, 1 \le k \le I-1.$$

Параметры f_k задают среднее приращение убытка при переходе от -ого к $(k+1)$-ому году развития.

В методе цепной лестницы оценки параметров f_k определяются как взвешенные по C_{ik} арифметические средние

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} F_{ik}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}}, 1 \le k \le I-1, \qquad (2)$$

наблюдаемых значений случайных величин F_{ik}. Следующая характерная особенность метода цепной лестницы состоит в том, что конечный убыток C_{iI} оценивается величиной

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1}, 2 \le i \le I, \qquad (3)$$

а резерв

$$R_i = C_{iI} - C_{i,I+1-i}$$

в свою очередь будет оцениваться как:

$$\hat{R}_i = C_{i,I+1-i}\left(\hat{f}_{I+1-i} \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{I-1} - 1\right),$$

т.е. оценка резерва основывается только на текущем уровне убытка $C_{i,I+1-i}$ года события i, а все предыдущие состояния $C_{i1}, \ldots, C_{i,I-i}$ игнорируются.

Описание метода мюнхенской цепной лестницы

Из предыдущих рассуждений вытекает, что при наличии обоих треугольников: оплаченных и заявленных убытков – первоначальная модель цепной лестницы $E(F_{ik}) = f_k$, $E(G_{ik}) = g_k$ должна быть модифицирована так, чтобы множители $F_{ik} = C_{i,k+1}/C_{ik}$ и $G_{ik} = D_{i,k+1}/D_{ik}$ (линейно) зависели от $D_{i,k+1}/C_{ik}$ или соответственно от $C_{i,k+1}/D_{ik}$. Таким образом, годы событий $\{C_{i1}, \ldots, C_{in}, D_{i1}, \ldots, D_{in}\}$, $1 \le i \le n$, независимы (MCL 1)

В основу МЦЛ полагается следующее предположение (MCL 2)

$$E\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}}\middle| A_{i,k-1}\right) = a_k^c + b_k^c \frac{D_{i,k-1}}{C_{i,k-1}}$$

$$E\left(\frac{D_{ik}}{D_{i,k-1}}\middle|A_{i,k-1}\right) = a_k^D + b_k^D\frac{C_{i,k-1}}{D_{i,k-1}}$$

где $A_{i,k} := \{C_{i1}, \dots, C_{in}, D_{i1}, \dots, D_{in}\}$

То же самое можно переписать в виде (MCL 2)

$$E\left(C_{ik}\middle|A_{i,k-1}\right) = C_{i,k-1}\, a_k^c + D_{i,k-1}\, b_k^c$$

$$E\left(D_{ik}\middle|A_{i,k-1}\right) = D_{i,k-1}\, a_k^D + C_{i,k-1}\, b_k^D$$

Из формулировки предположения (MCL 2) ясно, что речь идет о двух обычных линейных регрессиях. Как и в модели классической цепной лестницы, разумно исходить из гетероскедастичной регрессии, т.е. (MCL 3)

$$Var\left(\frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}}\middle|A_{i,k-1}\right) = \frac{(\tau_k^c)^2}{C_{i,k-1}}$$

$$Var\left(\frac{D_{ik}}{D_{i,k-1}}\middle|A_{i,k-1}\right) = \frac{(\tau_k^D)^2}{D_{i,k-1}}$$

В условиях предположений MCL 1 – 3 оценки по методу наименьших квадратов для неизвестных параметров a_k^c, b_k^c, τ_k^c имеют вид

$$\widehat{b_{k+1}^c} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}\left(\frac{D_{i,k}}{C_{i,k}} - Q_k^c\right)}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}\left(\frac{D_{i,k}}{C_{i,k}} - Q_k^c\right)^2}$$

Где

$$Q_k^c = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}\left(\frac{D_{i,k}}{C_{i,k}}\right)}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}}$$

$$\hat{a}_{k+1}^c = \hat{f}_{k+1}^c - Q_k^c\, \hat{b}_{k+1}^c$$

$$\hat{f}_{k+1}^c = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}}$$

$$(\hat{\tau}_{k+1}^c)^2 = \frac{1}{n-k-2}\sum_{j=1}^{n-k} C_{jk} \quad \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} - \hat{f}_{k+1}^c - \hat{b}_{k+1}^c\left(\frac{D_{i,k}}{C_{i,k}} - Q_k^c\right)\right)^2$$

Формулы для a_k^D, b_k^D, τ_k^D получаются простой заменой C на D.

На основании предположения (MCL 2`) получаются следующие формулы для прогноза будущих состояний убытка:

$$\hat{C}_{i,k+1} = \hat{C}_{i,k}\hat{a}_{i,k+1}^c + \widehat{D}_{i,k+1}\hat{b}_{i,k+1}^c = \hat{C}_{i,k}\left(\hat{f}_{i,k+1} + \hat{b}_{k+1}^c\left(\frac{\widehat{D}_{i,k}}{\hat{C}_{i,k}} - Q_k^c\right)\right)$$

$$\widehat{D}_{i,k+1} = \widehat{D}_{i,k}\hat{a}_{i,k+1}^D + \hat{C}_{i,k+1}\hat{b}_{i,k+1}^c = \widehat{D}_{i,k}\left(\hat{g}_{i,k+1} + \hat{b}_{k+1}^D\left(\frac{\hat{C}_{i,k}}{\widehat{D}_{i,k}} - Q_k^D\right)\right)$$

со стартовыми значениями $\hat{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i}$ и $\hat{D}_{i,n+1-i} = D_{i,n+1-i}$

Описание метода Борнуэттера-Фергюсона

Определяются коэффициенты развития убытков f_{k+1} соответствующие относительному увеличению совокупной величины оплаченных убытков от одного периода оплаты (развития) к последующему

$$f_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}}$$

Определяются факторы развития убытков $H(j)$ от каждого периода оплаты (развития) убытков до самого последнего из рассматриваемых периодов, соответствующие относительному увеличению совокупной величины оплаченных убытков от каждого из периодов оплаты (развития) убытков до последнего из рассматриваемых периодов:

$$H(j) = \prod_{k=j}^{n} f_{k+1}, j = 1,2, \dots, N$$

Для каждого периода оплаты (развития) убытков рассчитываются факторы запаздывания $L(j)$, равные доле произошедших убытков, оплаченной на конец каждого периода оплаты (развития) убытков: $L(j) = 1/H(j)$

Для каждого периода наступления убытков вычисляются коэффициенты оплаченных убытков $U(i)$, равные отношению величины оплаченных на отчетную дату убытков (с учетом их последующего развития) к величине заработанной страховой премии за соответствующий период:

$$U(i) = \frac{S(i, n - i + 1)}{GPE(i)}$$

где $GPE(i)$ − заработанная страховая премия за i-ый период наступления убытков. Среднее из значений коэффициентов оплаченных убытков $\overline{U}$ принимается за ожидаемый коэффициент произошедших убытков U.

На основе ожидаемого коэффициента произошедших убытков для каждого из периодов наступления убытков вычисляется ожидаемая величина произошедших убытков $V(i)$:

$$V(i) = \overline{U} * GPE\ (i), \quad i = 1,2, \dots, N$$

8) Для каждого из периодов наступления убытков суммарная величина произошедших, но неоплаченных на отчетную дату убытков, $R(i)$ определяется как ожидаемая величина

произошедших убытков, но неоплаченных, исходя из фактора запаздывания, на отчетную дату:

$$R(i) = (1 - L(N - i + 1))\, V(i), i = 1, 2, \dots, N.$$

Описание моделирования треугольников заявленных и оплаченных убытков.

В основе математической модели лежит предположение о том, что величины оплаченных и заявленных убытков в различных кварталах развития являются нормальными случайными величинами, то есть $C_{ji} \sim N(\mu_i\,; \sigma_{Ci}^2), Dji \sim N(a_i; \sigma_{Di}^2)$, соответственно, где i – номер квартала развития. В качестве начальных данных (для треугольника оплаченных убытков) возьмем $\mu 1 = 100\,000, k_{вар} = 0.07$. Так же зададим коэффициенты развития, согласующиеся с реальными процессами. Для математических ожиданий убытков в последующих кварталах развития несложно получить рекуррентную формулу:

$$\mu_i = \mu_1 f_1^c f_2^c \dots f_{i-2}^c (f_{i-1}^c - 1)$$

В качестве второго предположения возьмем то, что суммы математических ожиданий оплаченных и заявленных убытков по всем кварталам развития равны между собой. Из этого предположения, получаем:

$$a_1 = \mu_1 f_1^c f_2^c \dots f_{21}^c / \mathrm{f}_1^{\mathrm{D}} \mathrm{f}_2^{\mathrm{D}} \dots \mathrm{f}_{21}^{\mathrm{D}}$$

По заданным нами коэффициентам развития заявленных убытков аналогично вычисляем остальные математические ожидания заявленных убытков. Коэффициент вариации берем таким же.

Далее производим моделирование треугольников оплаченных и заявленных убытков, согласно их законам распределения. От полученных треугольников переходим к накопительным или кумулятивным треугольникам развития убытков, к которым поочередно применяем методы, описанные в статье.

Анализ полученных результатов.

Вначале был рассмотрен смоделированный треугольник развития. Вычисления проводились по 12, 16 и 20 кварталам развития.

Результаты применения различных вычислительных методов приведены в таблицах ниже.

В таблицах ε – относительная погрешность прогноза резерва убытков.

Таблица 2

Результаты, полученные по моделированному треугольнику оплаченных убытков

Кол-во кварталов	Совокупные выплаты	ЦЛ		МЦЛ		БФ	
		результат	ε, %	результат	ε, %	результат	ε, %
12	5 345 593	5 346 095	0.009	5 345 622	0.001	5 268 342	-1.45
16	7 208 377	7 208 502	0.0017	7 208 084	-0.0041	7 845 655	8.84
20	9 071 093	8 308 675	-8.405	9 070 829	-0.003	10 031 859	10.59

Таблица 3

Результаты, полученные по моделированному треугольнику заявленных убытков

Кол-во кварталов	Совокупные выплаты	ЦЛ		МЦЛ		БФ	
		результат	ε, %	результат	ε, %	результат	ε, %
12	5 345 593	5 404 562	1.103	5 404 523	1.102	5 249 709	-1.79
16	7 208 377	7 268 104	0.828	7 268 064	0.8280	7 730 850	7.25
20	9 071 093	9 131 812	0.669	9 131 825	0.670	9 814 382	8.19

Из таблиц 2 и 3 видно, что метод мюнхенской цепной лестницы дает наиболее точный результат по треугольникам оплаченных и заявленных убытков.

Далее применим указанные методы формирования резервов для расчета резервов по реальным данным по виду страхования КАСКО. В таблицах приведены итоговые резервы по всем кварталам событий.

Таблица 4

Результаты, полученные по треугольнику оплаченных убытков, КАСКО

Кол-во кварталов	Совокупные выплаты	ЦЛ		МЦЛ		БФ	
		результат	ε, %	результат	ε, %	результат	ε, %
12	632466289	632565287	0.02	626789338	-0.90	5963146793	-5.71
16	1006884424	9917147642	-1.51	10008867625	-0.60	103986522	3.27
20	1577658709	14163290505	-10.23	15917274669	0.89	16281112941	3.20

Таблица 5

Результаты, полученные по треугольнику заявленных убытков, КАСКО

Кол-во кварталов	Совокупные выплаты	ЦЛ		МЦЛ		БФ	
		результат	ε, %	результат	ε, %	результат	ε, %
12	6324166289	7129623100	12.74	7116896 866	12.53	6504790167	2.86
16	10068984 424	1133992008	12.61	11356387510	12.79	11571308446	14.92
20	1577658709	1803919728	14.34	18249906325	15.68	18512321351	17.34

Из таблиц 4 и 5 видно, что метод мюнхенской цепной лестницы не дает существенного преимущества перед методами цепной лестницы и Борнуэттера-

Фергюсона. Скорее всего, это означает, что для реальных данных не выполняются основные предположения моделей, лежащие в основе всех методов формирования резервов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мак Т. Математика рискового страхования. – М.: Олимп-Бизнес, 2005. 418с.
2. Faculty and Institute of Acturies – Claims reserving manual v.1, 1997. 350 p
3. Приказ Минфина РФ от 11.06.2002 №51н «ОБ УТВЕРЖДЕНИИ ПРАВИЛ ФОРМИРОВАНИЯ СТРАХОВЫХ РЕЗЕРВОВ ПО СТРАХОВАНИЮ ИНОМУ, ЧЕМ СТРАХОВАНИЕ ЖИЗНИ»