

УДК 519.6

Математическое моделирование хрупкого материала под действием тепловых нагрузок

М.А. Семерикова

*Студент, кафедра «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Россия*

*Научный руководитель: Лукин В.В., к. ф.-м. н., ассистент кафедры «Прикладная
математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана*

МГТУ им. Н.Э. Баумана
maria.semerikova@gmail.com

Аннотация

Рассмотрена математическая модель разрушения хрупкого материала, основанная на подходе «размазанных» трещин. На основе экспериментальной кривой зависимости напряжений от деформаций построена одномерная математическая модель разрушения. Предложено обобщение одномерной модели на двумерный случай. В рамках предложенных математических моделей поставлены тестовые одномерная и двумерная задачи термоупругости для закрепленного тела под тепловой нагрузкой. Описан алгоритм численного решения поставленных задач при помощи метода конечных элементов. Приведен анализ результатов численного моделирования. Произведено сравнение результатов решения одномерной и двумерной задач.

Введение

При анализе работоспособности различных конструкций естественным образом возникает вопрос о ее прочности в заданных условиях. Задача исследования разрушения конструкций остается сложной и малоисследованной [1,2,3]. Под разрушением

подразумевается исчерпание несущей способности тела, произошедшее или вследствие неограниченного изменения формы (вязкое), или вследствие накопления повреждений и развития трещин (хрупкое) [1].

В связи с характером решаемых задач хрупкого разрушения интерес представляют модели, учитывающие трещины эффективным образом путем корректировки прочностных параметров материала, – модели «размазанных» трещин [2,3]. Данный подход применим для материалов, в которых замечено образование микротрещин, а также пластические деформации в которых пренебрежимо малы. Примерами таких материалов являются бетон, керамика, некоторые виды пластиков и дерево [4].

Целью данной работы является построение и исследование математической модели разрушения топливной таблетки из хрупкого материала в одномерном и двумерном случаях. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31193).

Применение модели «размазанных» трещин в одномерной задаче теории упругости

Экспериментально подтверждено образование трещин в таблетке топлива из диоксида урана при низких мощностях тепловыделения. Материал топливной таблетки ведет себя как хрупкий материал, его пластическими деформациями можно пренебречь. Свойства диоксида урана близки к свойствам керамических материалов, для которых характерно поведение при растяжении, изображенное на рис. 1 [4], где при напряжениях, меньших условного предела прочности при растяжении σ_f , и соответствующих ему деформациях ε_f материал ведет себя как линейно-упругий, а при превышении предела прочности имеет место разгрузка по некоторому нелинейному закону.

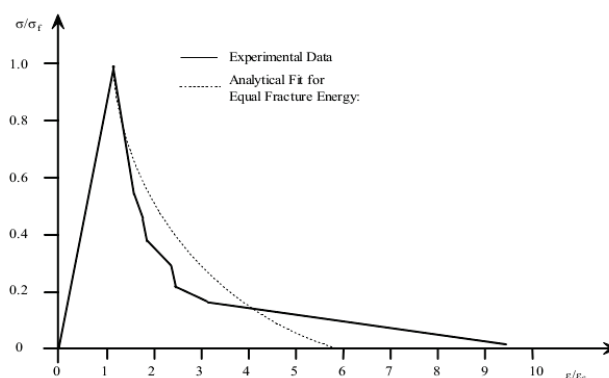


Рис. 1. Кривая нормализованного растягивающего отклика для керамических материалов

При значениях напряжений, равных условному пределу прочности, и соответствующих деформациях считается, что трещина инициировалась, но не сформировалась полностью до достижения значений деформаций ε_0 , больших ε_f в 5-10 раз. Область нелинейного снижения напряжений при увеличении деформаций называется послепиковой [4]. Экспериментальную кривую на рис. 1 можно аппроксимировать следующей зависимостью $\sigma(\varepsilon)$:

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}}, \quad (1)$$

где $A \approx -0.089$, $B \approx 1.796$, $C = 0.5$. Данная зависимость справедлива при значении деформации $\varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 – значение деформации, при котором материал не способен передавать напряжения в одномерном случае, а в многомерном – не передает напряжения в направлении, ортогональном направлению трещины [2].

Для определения напряжений в материале с описанными свойствами используется подход, аналогичный подходу в моделях упругопластических материалов [5]. В качестве численного метода применяется метод дополнительных деформаций. Вводится понятие переменного предела прочности $\sigma_f^v(\varepsilon)$. Используется нелинейная зависимость напряжения от деформации:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E \varepsilon^e, & E \varepsilon^e < \sigma_f^v(\varepsilon), \\ \sigma_f^v(\varepsilon), & \sigma_f^v(\varepsilon) = \sigma_f \left(A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}} \right), E \varepsilon^e \geq \sigma_f^v(\varepsilon). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь E – модуль Юнга, $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^T - \varepsilon^{crk}$ – значение упругой деформации, ε – значение полной деформации, полученное в результате решения уравнений движения, ε^T – значение температурной деформации, ε^{crk} – значение деформации за счет трещин, вычисленное на предыдущем временном шаге: $\varepsilon^{crk} = \varepsilon - \varepsilon^T - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E}$. При разгрузке значение деформаций за счет трещин не изменяется, а материал ведет себя как линейно-упругий с пределом прочности $\sigma_f^v(\varepsilon)$ и модулем Юнга E .

Обобщение одномерной модели на двумерный случай

Наиболее полно картину поведения разрушающегося материала можно исследовать лишь в многомерном случае. Обобщим описанную математическую модель «размазанных» трещин на многомерный случай. Линейная зависимость между тензорами напряжений и деформаций – закон Гука – может быть записана в следующем виде (здесь и далее будем пользоваться правилом суммирования по повторяющимся индексам) [5]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad \hat{\sigma} = \hat{C} \cdot \hat{\varepsilon}^e,$$

где σ_{ij} , ε_{kl}^e – компоненты тензоров напряжений $\hat{\sigma}$ и упругих деформаций $\hat{\varepsilon}^e = \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^{ne}$ соответственно, $\hat{\varepsilon}$ – полная деформация, $\hat{\varepsilon}^{ne}$ – неупругая деформация (например, $\hat{\varepsilon}^{ne} = \hat{\varepsilon}^T + \hat{\varepsilon}^{crk}$), C_{ijkl} – компоненты тензора упругих коэффициентов $\hat{C}$.

В многомерном случае стоит задача определения направления роста трещин. Для этого необходимо сформулировать критерий инициации трещины в заданном направлении. Из одномерной модели и кривой на рис. 1 видно, что трещина ортогональная определенному направлению иницируется при достижении деформацией в этом направлении значения ε_f , соответствующего напряжению, равному пределу прочности σ_f . В том случае, если материал изотропен, данное условие должно выполняться в каждом направлении.

Найдем собственные значения и собственные векторы тензоров упругих деформаций и напряжений и приведем тензоры к диагональному виду. В двумерном случае получим:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^e = v_{qj}^e \varepsilon_{pq}^e u_{ip}^e, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = v_{qj}^\sigma \sigma_{pq} u_{ip}^\sigma,$$

$$\hat{\tilde{\varepsilon}}_D^e = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^e & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^e \end{pmatrix} = \hat{U}^\varepsilon \hat{\varepsilon}^e (\hat{U}^\varepsilon)^{-1}, \quad \hat{\tilde{\sigma}}_D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \hat{U}^\sigma \hat{\sigma} (\hat{U}^\sigma)^{-1}.$$

где u_{ip}^e , v_{qj}^e , v_{qj}^σ , u_{ip}^σ – элементы матриц перехода $\hat{U}^\varepsilon$ и $\hat{U}^\sigma$ в систему координат из главных направлений и обратных к ним матриц соответственно, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^e$ и $\tilde{\sigma}_{ij}$ – компоненты диагональных матриц $\hat{\tilde{\varepsilon}}_D^e$ и $\hat{\tilde{\sigma}}_D$, на диагонали которой стоят главные значения тензоров деформаций ε_1^e и ε_2^e и напряжений σ_1 и σ_2 . Тогда можно записать линейную зависимость между компонентами диагональных тензоров напряжений и деформаций $\hat{\tilde{\sigma}}_D$ ($\hat{\tilde{\varepsilon}}_D^e$):

$$\tilde{C}_{ijkl} = u_{ip}^{\sigma} u_{in}^{\varepsilon} C_{pqmn} v_{qj}^{\sigma} v_{mk}^{\varepsilon}, \quad (3)$$

Для изотропного материала с симметричным тензором упругих коэффициентов главные оси тензора деформаций совпадают с главными осями тензора напряжений. Для каждого из главных направлений необходим свой переменный предел прочности $\sigma_{f_i}^v(\varepsilon_i), i = 1, 2$. Если значение какого-либо главного напряжения превышает предел прочности, то, как и в одномерном случае, главное напряжение находится из зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i^e), i = 1, 2$, определяемой рис. 1:

$$\sigma_i = \sigma_f \left(A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}} \right). \quad (4)$$

Значения компонент тензора напряжений получим, вернувшись в исходную систему координат; предварительно поставим на место превышающего σ_f значения главного напряжения полученное по формуле (4) значение.

Информацию о наличии трещины в материале сохраняет тензор деформаций за счет трещин $\hat{\varepsilon}^{crk}$. Учитывая, что $\hat{\varepsilon}^e = \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^T - \hat{\varepsilon}^{crk}$, тензор деформаций за счет трещин может быть вычислен следующим образом: $\hat{\varepsilon}^{crk} = \hat{\varepsilon} - \hat{S} \cdot \hat{\sigma}$, где $\hat{S}$ – тензор коэффициентов податливости 4 ранга, обратный тензору упругих коэффициентов: $\hat{S} \cdot \hat{C} = \hat{I}$, $\hat{I}$ – единичный тензор 4 ранга.

Постановка двумерной задачи

В качестве тестовой задачи рассмотрим квазистационарную задачу теории упругости для двумерного стержня с характерными размерами l_1 и l_2 , изображенного на рис. 2.

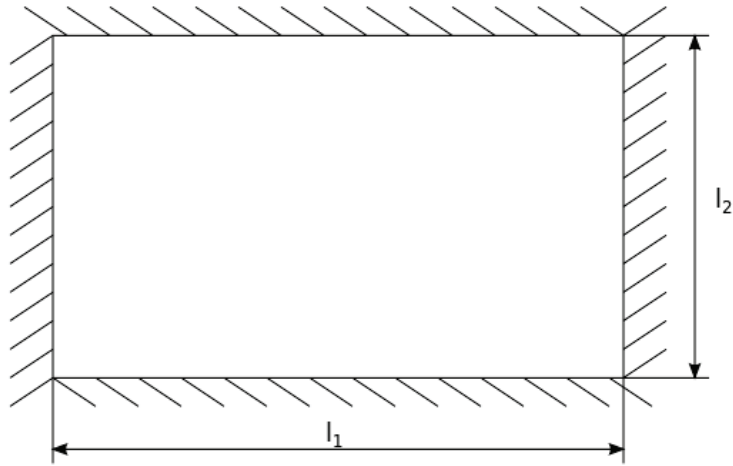


Рис. 2. Расчетная область

Зафиксируем горизонтальные составляющие перемещений на вертикальных участках границы, а вертикальные составляющие перемещений – на горизонтальных. Зададим свойства материала, соответствующие диоксиду урана, и будем прикладывать знакопеременную нагрузку за счет однородного по пространству изменения температуры. Данной постановке задачи отвечает следующая математическая модель [5]:

$$\begin{aligned}
 T(x, t) &= \tilde{T} + t \sin(t), \quad t \geq 0, \\
 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} &= 0, 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2, \\
 \sigma_{ji} &= \sigma_{ji}[\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T, \varepsilon_{ij}^{crk}], \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \varepsilon_{ij}^T = \alpha (T - T_0) \delta_{ij}, \\
 u_1(0, x_2, t) &= u_1(l_1, x_2, t) = 0, u_2(x_1, 0, t) = u_2(x_1, l_2, t) = 0,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где u_i – компоненты вектора перемещений, α – коэффициент теплового расширения, T_0 – справочная температура, δ_{ij} – символ Кронекера, $\sigma_{ji}[\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T, \varepsilon_{ij}^{crk}]$ – зависимость напряжений от деформаций, описанная выше. Математическую модель (5) можно сузить на одномерный случай и получить соответствующую ей одномерную модель.

Будем решать данную квазистационарную задачу теории упругости методом конечных элементов на равномерной сетке. В двумерном случае выберем прямоугольную сетку. Выберем пространство пробных функций, состоящее из кусочно-линейных финитных функций. Запишем уравнение равновесия в слабой постановке для плоского деформированного состояния и перейдем к системе линейных алгебраических уравнений следующего вида [6]:

$$[K]\{U\} = \{R_U(T)\} + \{R_U(\varepsilon^{crk})\},$$

где $\{U\}$ – вектор узловых значений перемещений, $[K]$ – матрица жесткости, $\{R_U(T)\}$ – вектор нагрузок, зависящий от температуры, в уравнении для перемещений, $\{R_U(\varepsilon^{crk})\}$ – вектор нагрузок, учитывающий деформации за счет трещин с предыдущего слоя.

Результаты расчетов

Рассмотрим и сравним результаты численного моделирования двумерной и соответствующей ей одномерной задач для стержня из одного и того же материала при соответствующих начальных и граничных условиях и нагрузках. Температура изменяется в зависимости от времени согласно графику, изображенному на рис. 2. Амплитуда температуры увеличивается, что позволяет исследовать поведение стержня при повторном нагружении.

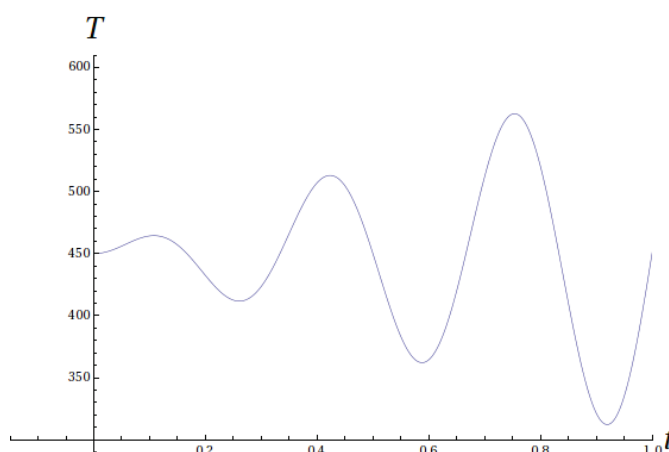


Рис. 3. Зависимость температуры от времени

Единственным внешним воздействием является тепловая нагрузка, которая приводит к объемному расширению или сжатию материала, поэтому тензоры деформаций и напряжений имеют одно главное значение кратности 2, а главные направления совпадают с направлениями координатных осей. При данном типе закрепления изменение объема тела невозможно, и здесь внешнее воздействие приводит только к изменению напряжений и возникновению деформаций трещин. На рис. 3 при пересечении кривой $\sigma_i(\varepsilon_i)$ оси абсцисс расстояние от точки пересечения до начала координат определяется значением деформации за счет трещины в главных направлениях. Красным цветом показан предел прочности. Для сравнения на рис. 3 (справа) приведен график зависимости

напряжения σ от деформации $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon^T$ в одномерном случае. В обоих случаях при смене знака нагружения имеет место разгрузка по линейному закону с модулем Юнга, равным исходному, и возвращение в точку начала разгрузки при последующем нагружении. В области $\{\sigma_i < 0\}$ в двумерном случае и $\{\sigma < 0\}$ в одномерном случае абсолютная величина напряжений растет линейно при заданном нагружении, поскольку предел прочности хрупкого материала при сжатии много больше предела прочности при растяжении [1]. В двумерном случае, однако, наблюдаются значительно меньшие главные деформации, чем деформации в одномерном случае. Это связано с тем, что в плоской задаче направления не являются независимыми, поэтому в данной постановке сведение двумерной задачи к одномерной без изменения постановки одномерной задачи является невозможным.

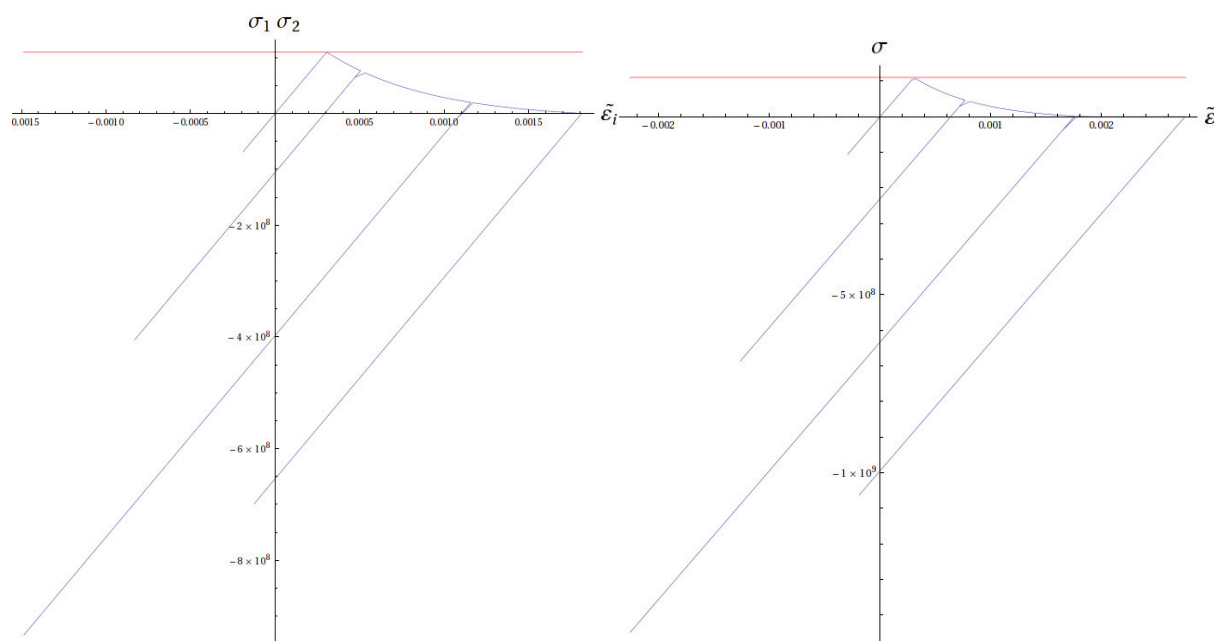


Рис. 4. Зависимость главных напряжений от главных деформаций при знакопеременном нагружении в двумерном (слева) и одномерном (справа) случаях

Зависимости деформации за счет трещин и напряжений от времени в двумерном задаче приведены на рис. 4 и рис. 5 соответственно. График зависимости деформации за счет трещин от времени в обоих случаях имеет ступенчатый вид, причем горизонтальные участки графика отвечают участкам линейного изменения напряжения. Также отметим, что деформации за счет трещин не убывают по времени, что означает сохранение материалом информации о наличии трещины.

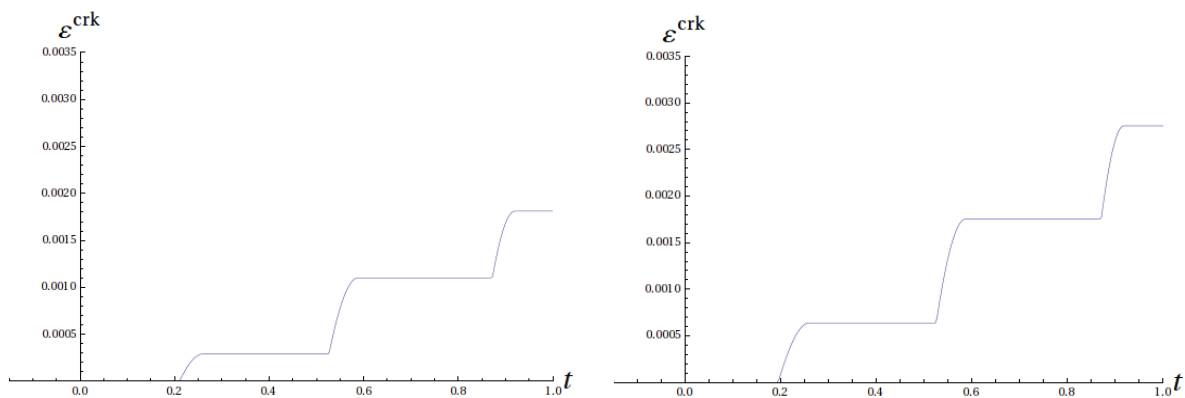


Рис. 5. Зависимость деформации за счет трещин ε^{crk} от времени в двумерной (слева) и одномерной (справа) задачах

На рис. 5 заметно влияние изменения характера зависимости $\sigma(\varepsilon)$: напряжения в материале не превышают значения σ_f при всё большем увеличении температуры и температурной деформации. В двумерной задаче наблюдается достижение предела прочности материала σ_f за более длительное время, чем в одномерной задаче, что согласуется с меньшим значением деформаций за счет трещин в соответствующие моменты времени.

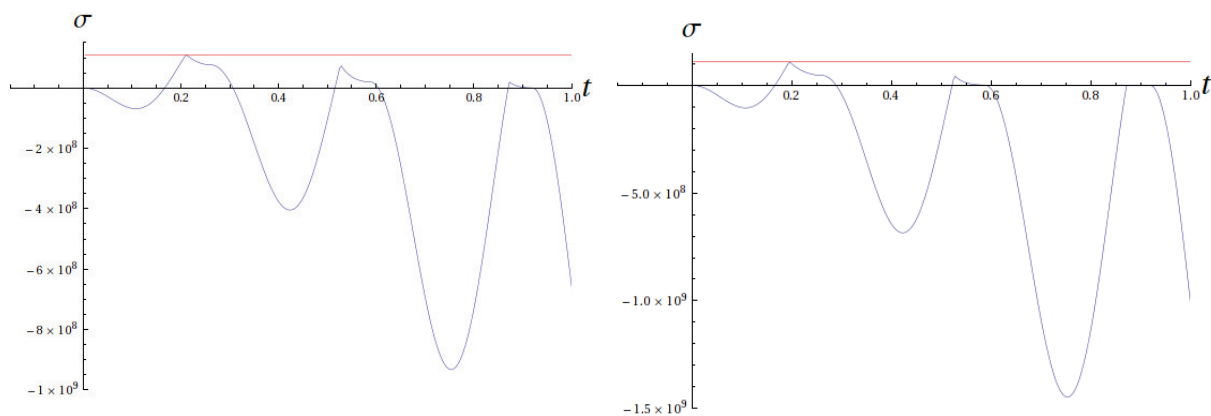


Рис. 6. Зависимость напряжений от времени в двумерной (слева) и одномерной (справа) задачах

Заключение

В работе исследована модель разрушения хрупкого материала, согласующаяся с понятием о «размазанных» трещинах, учитывающих наличие трещин в материале эффективным образом. Построенная математическая модель разрушения может быть использована при моделировании хрупких материалов, когда необходимо учесть влияние

наличия трещин в материале на его прочностные характеристики: способность передавать напряжения в определенном направлении, упругие коэффициенты, предел прочности.

Написана программа на языке Fortran для решения двумерной квазистационарной задачи теории упругости. С ее помощью показана работоспособность данной модели при знакопеременном нагружении в одномерном случае, так как она дает результат, согласующийся с экспериментом. Показанное обобщение на двумерный случай имеет ряд недостатков, в частности, невозможность без изменения постановки одной из задач (одномерной или двумерной) получить полное не только качественное, но и количественное совпадение результатов расчета для одномерной и двумерной задач.

Задача разрушения хрупкого материала требует дальнейшего рассмотрения и исследования, а описанная модель – уточнения.

Список литературы

1. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
2. Dahlblom O., Ottosen N.S., Smeared Crack Analysis of Concrete Using a Nonlinear Fracture Model // Fracture Mechanics of Concrete. Nordic Seminar Held at Division of Building Materials, November 6, 1986, p. 31–46.
3. Hillerborg A., Application of the Fictitious Crack Model to Different Types of Materials. Lund Institute of Materials, Lund, Sweden, 1990, p. 95-102.
4. Fuel Analysis and Licensing Code:FALCON MOD01, Volume 1: Theoretical and Numerical Bases. Final Report, December 2004
5. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 168 с.
6. Bathe K.-J. Finite Element Procedures. Prentice-Hall, 1996. 1037 p.