электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 531.36

Об уравнениях движения управляемой системы с избыточными координатами («Шар и желоб»)

К.С. Киселев[1], А.Н. Никитина[2]

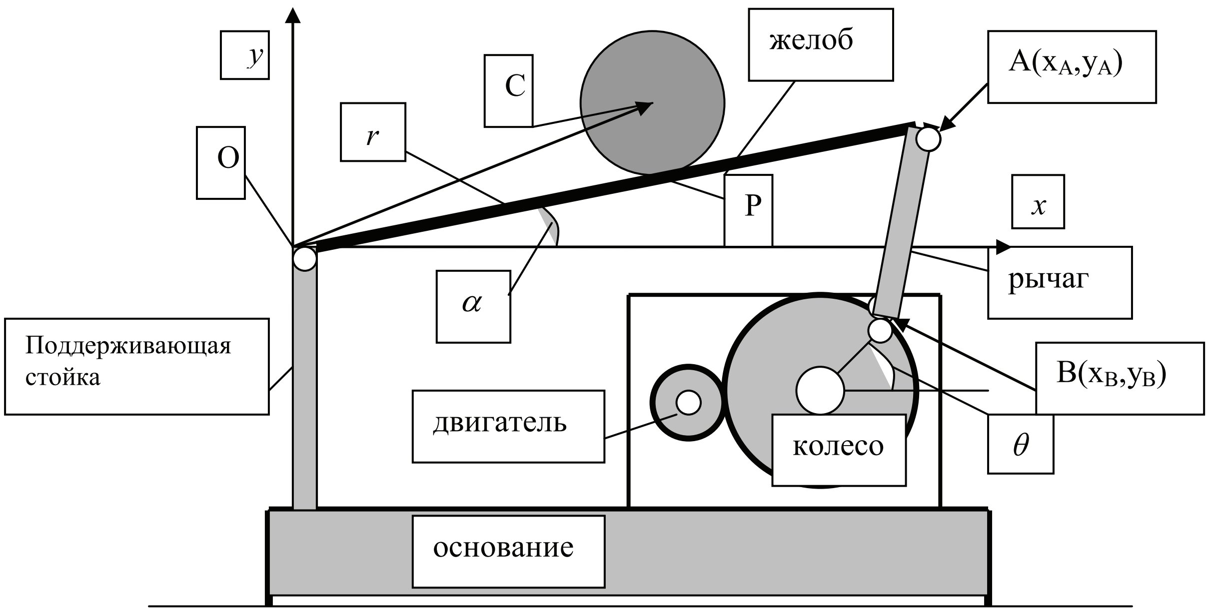
[1,2]Студенты, МГТУ им. Баумана, г. Москва, Россия

Научный руководитель: Красинская Э.М., к.ф.-м.н., доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э.Баумана, г. Москва, Россия

МГТУ им. Н. Э. Баумана
molnia703@yandex.ru

Для этой системы составлены кинетическая и потенциальная энергии с учетом размера шара, которые отличаются от [1-4].Полученные уравнения в форме Шульгина так же отличается от уравнений в работах [1-4].

Ball & Beam – достаточно универсальный инструмент для изучения динамики нелинейных управляемых объектов. В этой системе электропривод за счет наклона желоба может перекатить шарик в любое наперед заданное положение на желобе и стабилизировать это равновесие. Управление реализовано в виде обратной связи по информации о положении $r(t)$ шарика на желобе, и угле поворота колеса $\theta(t)$.



Шарик может катиться свободно по всей длине желоба. Желоб присоединен к неподвижной поддерживающей стойке с одной стороны, и к подвижному рычагу с другой. При $\alpha = 0$ и $\theta = 0$, рычаг AB вертикален. Движение рычага управляется двигателем постоянного тока.

Для механической части системы, включающей шар и ротор двигателя с редуктором, кинетическая и потенциальная энергии имеют вид, с учетом размера шарика в отличии от работ [1-4]:

$$\left. \mathrm{T} = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 - 2\dot{r}\dot{\alpha}R + \dot{\alpha}^2(R^2 + r^2)) + J\frac{\omega^2_{пол}}{2} + \frac{1}{2}J_\theta\dot{\theta}^2; \Pi = mg(r\sin\alpha + R\cos\alpha) \right\}$$

R - радиус шара ; m - его масса; J - момент инерции шара; J_θ - - момент инерции всей системы, приведённый к двигателю. За полную угловую скорость шарика ($\omega_{пол}$) вокруг центра масс принято выражение $\dfrac{\dot{r}}{R} - \dot{\alpha}$

I. Уравнения Лагранжа 2 рода.

Для описания механической части введены три координаты, одна из них является избыточной (лишней). Будем считать, как и в [1], что уравнение связи в первом приближении имеет вид $\alpha \approx \dfrac{d}{L}\theta$, L - длина желоба, d - радиус колеса.

Для построения полной модели системы необходимо добавить уравнение Кирхгофа [1], описывающего динамику коллекторного двигателя постоянного тока с независимым возбуждением

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v; \qquad e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

e_v - напряжение на выходе усилителя ; e_b - напряжение противо-ЭДС ; K_3 - постоянная двигателя ; L_a - индуктивность ; R_a - сопротивление ; K_1 - коэффициент преобразователя питания.

Исключая, с помощью приближенного уравнения связи избыточную координату α и ее скорость, будем иметь систему с обобщенными координатами, для которой составим уравнения Лагранжа

$$\left.\begin{aligned}
&\left(m + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{r} - \left(\frac{mRd}{L} - J\frac{d}{LR}\right)\ddot{\theta} + mg\sin\left(\frac{d}{L}\theta\right) = 0;\\
&\left(m\frac{d^2}{L^2}\left(R^2 + r^2\right) + J\frac{d^2}{L^2} + J_\theta\right)\ddot{\theta} - \left(\frac{mdR}{L} - J\frac{d}{RL}\right)\ddot{r} + mg\frac{d}{L}\left(r\cos\left(\frac{d}{R}\theta\right) - R\sin\left(\frac{d}{L}\theta\right)\right) = -b_\theta\dot{\theta} + K_2 i_a.
\end{aligned}\right\}$$

b_θ - коэффициент сопротивления вращению, приведенный к двигателю; K_2 - электромеханическая постоянная двигателя. В таком случае при $r_0 \neq 0$ система уравнений допускает равновесие:

$$\left. r_0 \neq 0;\ \theta_0 = 0; \quad i_a^0 = \frac{mgr_0 \dfrac{d}{L}}{K_2}; \quad e_v^0 = \frac{R_a i_a^0}{K_1} = \frac{mgr_0 \dfrac{d}{L} R_a}{K_1 K_2}. \right\}$$

Полученные уравнения и допускаемое ими равновесие отличаются от уравнений (Equation1-3). Отметим, что в [1], кроме того, уравнения движения составлены неправильно вследствие того, что приближенное уравнение связи учтено не при составлении функции Лагранжа, а после ее дифференцирования – т.е. по существу, после получения уравнения Лагранжа второго рода для r (хотя α зависимая координата).

II. Уравнения Шульгина М.Ф. в избыточных координатах и их применение для рассматриваемой задачи.

Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы., конфигурация которой определяется параметрами $q_1, \ldots, q_{n+m}$, взятыми в числе, превосходящем необходимое. Тогда m из этих n+m параметров являются избыточными координатами. Между n+m параметрами $q_1, \ldots, q_n, \ldots, q_{n+m}$ существуют m независимых соотношений

$$F_k(q_1, \ldots, q_{n+m}) = 0 \quad (k = \overline{1,m})$$

Исключение из этих выражений лишних зависимых координат часто приводит к громоздким формулам, особенно когда в уравнениях связей присутствуют тригонометрические функции .

Если продифференцировать по времени уравнения геометрических связей, наложенных на систему с избыточными координатами, получим кинематические (голономные) связи в виде

$$\sum_{s=1}^{n+m} b_{ks}\dot{q}_s = 0 \quad (k = \overline{1,m})$$

Геометрические связи или связи налагают на вариации координат следующие условия

$$\sum_{s=1}^{n+m} b_{ks}\delta q_s = 0 \quad (k = \overline{1,m})$$

Здесь $b_{ks} = \dfrac{\partial F_k}{\partial q_s}$, причем $\dfrac{\partial b_{ks}}{\partial q_r} = \dfrac{\partial b_{kr}}{\partial q_s}$, так как связи интегрируемы.

Пусть $T(q_1,\ldots,q_{n+m},\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_{n+m})$ кинетическая энергия без учета связей, $\widetilde{Q}_s$ (потенциальные и непотенциальные) силы, отнесенные к координатам q_s. Тогда из принципа Даламбера-Лагранжа получим уравнения движения системы с избыточными координатами с множителями связей

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \widetilde{Q}_s + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k b_{ks} \quad , \quad s = \overline{1, n+m}$$

Если представить связи в разрешенном относительно скоростей зависимых координат виде

$$\dot{q}_k = \sum_{j=1}^{n} B_{kj}(q_1,\ldots,q_{n+m})\dot{q}_j \quad k = \overline{n+1, n+m}$$

Тогда из последних m уравнений для множителей имеем выражения

$$\lambda_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \widetilde{Q}_k \quad k = \overline{n+1, n+m} \ ,$$

подставляя которые в уравнения для остальных координат, будем иметь не содержащие множителей связей уравнения в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \widetilde{Q}_j - \sum_{k=n+1}^{n+m} B_{kj}(q_1,\ldots,q_{n+m})\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \widetilde{Q}_k\right), \quad j = \overline{1,n}$$

Исключим из $T(q_1,\ldots,q_{n+m},\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_{n+m})$ зависимые скорости с помощью уравнений связей . Обозначая полученное выражение кинетической энергии через $T^*(q_1,\ldots,q_{n+m},\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)$, получим уравнения движения системы в избыточных координатах М.Ф. Шульгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T^*}{\partial q_j}-\sum_{k=n+1}^{n+m}B_{kj}(q_1,\ldots,q_{n+m})\frac{\partial T^*}{\partial q_k}=\widetilde{Q}_j+\sum_{k=n+1}^{n+m}B_{kj}(q_1,\ldots,q_{n+m})\widetilde{Q}_k,\ j=\overline{1,n}$$

Составим теперь для нашей задачи уравнения движения в избыточных координатах в форме Шульгина

Так как в действительности вместо приближенной линейной связи $\alpha \approx \frac{d}{L}\theta$ имеет место следующая нелинейная связь (l длина стержня, соединяющего желоб и колесо):

$$(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=l^2 \text{ или } \left(L(\cos\alpha-1)+d(1-\cos\theta)\right)^2+(L\sin\alpha+l-d\sin\theta)^2=l^2,$$

вследствие чего следует применять строгие методы механики систем с избыточными координатами. Дифференцируя эту связь по времени, получим

$$\dot{\alpha}=\underbrace{\frac{d\left(L\sin(\alpha-\theta)+(L-d)\sin\theta+l\cos\theta\right)}{L\left(d\sin(\alpha-\theta)+(L-d)\sin\alpha+l\cos\alpha\right)}}\dot{\theta}=B(\alpha,\theta)\dot{\theta};\quad B(\alpha,\theta)_0=\frac{d}{L}$$

Кинетическая энергия после исключения зависимой скорости будет иметь вид

$$\text{T}^*=\frac{1}{2}(m\dot{r}^2-2m\dot{r}RB(\alpha,\theta)\dot{\theta}+mB^2(\alpha,\theta)\dot{\theta}^2(R^2+r^2)+J(B(\alpha,\theta)\dot{\theta}-\frac{\dot{r}}{R})^2+J_\theta\dot{\theta}^2$$

Уравнения Шульгина для данной системы с избыточной координатой (общий вид)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial T^*}{\partial r}=-\frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial T^*}{\partial \theta}-B(\alpha,\theta)\frac{\partial T^*}{\partial \alpha}=-B(\alpha,\theta)\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}+Q_\theta$$

В итоге получим следующие уравнения в форме Шульгина:

$$(m+\frac{J}{R^2})\ddot{r}-(\frac{J}{R}+mR)(B(\alpha,\theta)\ddot{\theta}+B(\alpha,\theta)\dot{\theta}^2\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\dot{\theta}^2)-mrB^2(\alpha,\theta)\dot{\theta}^2+mg\sin\alpha=0$$

$$-mR(\ddot{r}B(\alpha,\beta)+\dot{r}(\frac{\partial B}{\partial\alpha}(B(\alpha,\theta)\dot{\theta})+\frac{\partial B}{\partial\theta}\dot{\theta})+m(R^2+r^2)(\ddot{\theta}B^2(\alpha,\theta)+2\dot{\theta}B(\alpha,\theta)(\frac{\partial B}{\partial\alpha}(B(\alpha,\theta)\dot{\theta})+$$

$$+\frac{\partial B}{\partial\theta}\dot{\theta}+J(\ddot{\theta}B^2(\alpha,\theta)+2\dot{\theta}B(\alpha,\theta)(\frac{\partial B}{\partial\alpha}(B(\alpha,\theta)\dot{\theta})+\frac{\partial B}{\partial\theta}\dot{\theta})-\frac{J}{R}(\ddot{r}B(\alpha,\theta)+\dot{r}(\frac{\partial B}{\partial\alpha}(B(\alpha,\theta)\dot{\theta}))+$$

$$+\frac{\partial B}{\partial\theta}\dot{\theta})+J_\theta\ddot{\theta}+mr\dot{r}B^2(\alpha,\theta)-m\dot{r}R\dot{\theta}\frac{\partial B(\alpha,\theta)}{\partial\theta}+m\dot{\theta}^2(R^2+r^2)B(\alpha,\theta)\frac{\partial B(\alpha,\theta)}{\partial\theta}+$$

$$+J(B(\alpha,\theta)\dot{\theta}-\frac{\dot{r}}{R})\dot{\theta}\frac{\partial B(\alpha,\theta)}{\partial\theta}-B(\alpha,\theta)(mgr\cos\alpha-mgR\sin\alpha)-Q_\theta=0$$

Вывод: Сравнивая полученные уравнения в форме Шульгина видно, что эти уравнения сильно отличаются от уравнений Лагранжа, составленных для приближенного уравнения связи.

Список литературы

1. Yu W. Nonlinear PD regulation for ball and beam system // Int. Journal of Electrical Engineering Education. 2009.V.46. № 1. P. 59-73.
2. Э.М.Красинская, А.Я.Красинский, К.Б.Обносов. О развитии научных методов школы М.Ф.Шульгина в применении к задачам устойчивости и стабилизации равновесия мехатронных систем с избыточными координатами. Сборник научно методических статей. Теоретическая механика. 2012г. Вып.28. Изд. МГУ, с.169-184.
3. Э.М.Красинская, А.Я.Красинский. Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами. Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электронный журнал 2013, №3. Механика.
4. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. / М.Ф. Шульгин // Научные труды САГУ. – Ташкент. 1958 г. 183 с.