электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 531

Удар в механических системах

В.И. Мкртчян[1], А.В. Антонов [2]

[1]студент, кафедра «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации»
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия
[2]студент, кафедра «Робототехнические системы»
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

Научный руководитель: Г.И. Дубровина, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Bel_val17@mail.ru

Задача 1. Условие задачи взято из сборника задач [2]. Также рассматривается условие отсутствия скольжения в точке *D*, если коэффициент трения скольжения равен f.

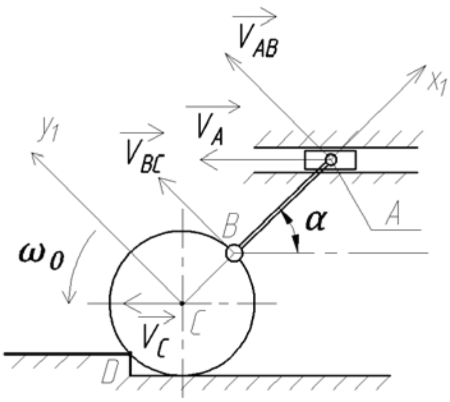

Рис. 1. Механическая система в момент перед ударом

Решение. 1. До столкновения диска с выступом механическая система (далее МС), состоящая из ползуна, стержня и диска, имеет 2 степени свободы. Удар происходит из-за наложения дополнительной связи (потери одной степени свободы) при столкновении диска с выступом в точке D. Рассмотрим МС в момент до удара (рис. 1). Выражения скоростей точек A и B: $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB}$, $\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}$, где $\vec{v}_{BC}$ – скорость точки B при вращении вокруг точки C, $\vec{v}_{AB}$ – скорость точки A при вращении вокруг точки B. Решая два этих уравнения, получим, что $\vec{v}_C = \vec{v}_A$.

2. Найдем скорости тел после удара (рис. 2). Общее уравнение механики при ударе [1, 3]:

$$M(\vec{u}_C - \vec{v}_C)\delta\vec{r}_C + J_C(\omega_1 - \omega_0)\delta\varphi + m(\vec{u}_A - \vec{v}_A)\delta\vec{r}_A = 0, \qquad (1)$$

где $\vec{u}_C$ – скорость центра диска после удара; $\delta\vec{r}_C$ – возможное перемещение точки C; $J_C = (Mr^2)/2$ – момент инерции диска относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рисунка; m – масса ползуна; M – масса диска; $\delta\varphi = \delta r_C/r$ – возможное перемещение (угловое) диска; $\vec{u}_A$ – скорость ползуна после удара; $\delta\vec{r}_A$ – возможное перемещение ползуна; ω_0 и ω_1 – угловая скорость диска до и после удара соответственно. Т.к. в момент удара точки A, B, C и D лежат на одной прямой, то мгновенный центр скоростей стержня в этот момент находится в точке A, т.е. $\delta\vec{r}_A = 0$, $u_A = 0$. Проецируя уравнение (1) на ось y_1, и учитывая, что $u_C = \omega r$ и $v_C = v_A$, получаем:

$$\omega = (2v_A \sin\,\alpha + \omega_0 r)/3r, \;\; u_C = (2u_C \sin\,\alpha + \omega_0\, r)/3, \qquad u_B = 2u_C.$$

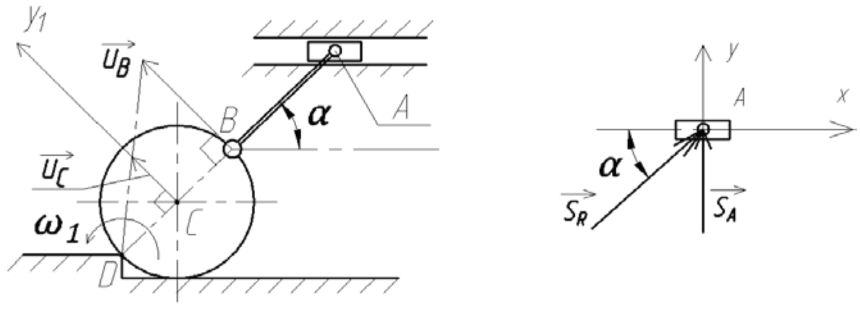

Рис. 2. Механическая система в момент после удара

3. Определим импульс реакции S_A при ударе ползуна о направляющую. Теорема об изменении количества движения при ударе [1, 3] для точки A: $m(\vec{u}_A - \vec{v}_A) = \vec{S}_A + \vec{S}_R$, где $\vec{S}_R$ – ударный импульс при ударе о стержень. Проецируем данное уравнение на оси Ax и Ay (рис. 2), с учетом $u_A = 0$. Находим, что $S_A = mv_A tg(\alpha)$.

4. Исследуем условие отсутствия скольжения в точке D. Согласно гипотезе Рауса, скольжение отсутствует при: $|S_\tau| \le fS_n$, где S_n и S_τ – соответственно нормальный и касательный импульсы ударных реакций в точке D. Теорема об изменении количества

движения при ударе для точки C (рис. 3): $M(\vec{u}_C - \vec{v}_C) = \vec{S}_n + \vec{S}_\tau + \vec{S}_R$. Тогда скольжение отсутствует при: $|u_C - v_C \sin(\alpha)| \le f(v_C \cos(\alpha) + v_A/\cos(\alpha))$, или:

$$|\omega_0 r - v_A \sin(\alpha)| \le 3 f v_A(\cos(\alpha) + 1/\cos(\alpha)).$$

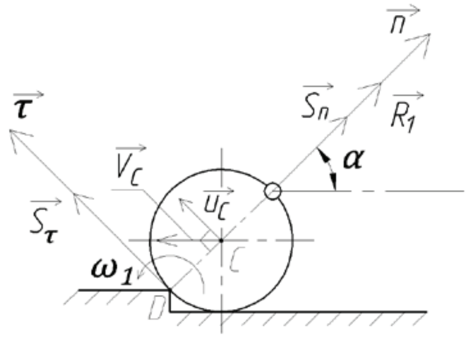

Рис. 3. Исследование условия отсутствия скольжения

Задача 2. В механизме, расположенном на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 4), рейка 1 массой m_1 приводится в движение силой $\boldsymbol{F}$, причем $F = F_0 Sin(kt + \varphi_0)$. Посредством зубчатого колеса массой m_3 и радиусом r движение передается рейке 2 массой m_2. Рейки движутся по прямолинейным направляющим без трения. Левый конец рейки 1 соединен с пружиной жесткости c, а правый конец – с демпфирующим устройством 4, создающим силу $\boldsymbol{R} = -\mu \boldsymbol{V_1}$ где $\boldsymbol{V_1}$ - скорость рейки 1. В начальный момент времени ($t = 0$ с): система находится в покое, пружина не деформирована. В момент времени $t = t_1$, когда деформация пружины максимальна, рейка 2 резко останавливается. Определить: момент времени t_1 и скорости тел 1 и 3 при $t = t_1$. Зубчатое колесо принять за однородный диск. В расчетах принять: $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 5$ кг, $r = 0.12$ м, $\mu = 0.8$ кг/с, $k = 1.5$ 1/с, $F_0 = 0.5$ Н, $\varphi_0 = -\pi/4$, $c = 0.85$ Н/м.

Решение. В состав исследуемой МС включим: тело 1, тело 2 и тело 3. Внешние силы, действующие на МС : $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R}$, сила упругости пружины $\boldsymbol{F_{упр}}$, реакции в направляющих. МС имеет 2 степени свободы. Составим дифференциальные уравнения движения МС на основе уравнений Лагранжа 2-го рода [1]. Кинетическая энергия МС:

$$T = m_1 \dot{x}_1^2/2 + m_2 \dot{x}_2^2/2 + m_3 V_C^2/2 + J_{3C}\omega_3^2/2,$$

здесь V_C – скорость центра масс C шестерни 3; ω_3 - угловая скорость шестерни 3 перед ударом; $J_{3C} = (m_3 r^2)/2$ – момент инерции шестерни относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку C. Согласно рис.4, $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB}$; $V_A = \dot{x}_1$; $V_B = \dot{x}_2$; $V_{BA} = 2r * \omega_3$. Тогда: $\omega_3 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)/2r$; $V_C = (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)/2$. Обобщенные силы: $Q_{x_2} = Q_2 = 0$; $Q_{x_1} = Q_1 = F_{x1} + (F_{упр})_{x1} + R_{x1} = F - cx_1 - \mu\dot{x}_1$. Тогда дифференциальные уравнения движения МС имеют вид:

$$
\begin{cases} \ddot{x}_1(m_1 + 3m_3/8\,) + \ddot{x}_2 3m_3/8 \;=\; F - cx_1 - \mu\dot{x}_1, \\ \qquad\quad \ddot{x}_1 m_3/8 + \ddot{x}_2(m_2 + 3m_3/8) = 0. \end{cases} \tag{1}
$$

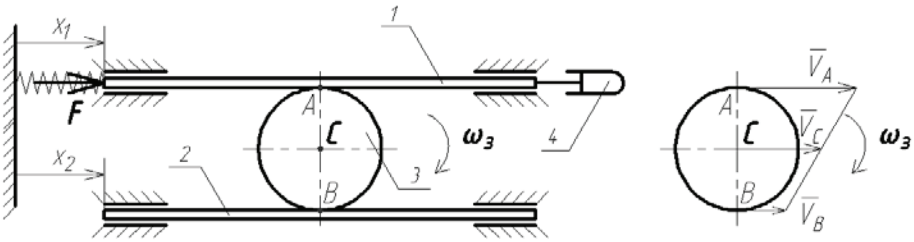

Рис. 4. Схема механизма, скорости точек диска и выбор обобщенных координат

Ниже представлен текст программы, написанной на языке С (Си). Путем численного интегрирования системы (1) методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности определяется $x_1 = x_1(t)$, момент времени t_1 и значения скоростей тел в этот момент.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define sqr(x)  ((x)*(x))
int main(void) //главная функция программы{
static double m1 = 1.0, m2 = 2.0, m3 = 5.0; //массы
static double c = 0.85; //жесткость пружины
static double fr = 0.8; //коэффициент демпфера
static double h = 0.001; //шаг дискретизации по времени
static double T = 50.0; //продолжительность просмотра движения
static double F0 = 0.5,k = 1.5,fi_0=-M_PI/4.0;//параметры силы F
double mpr1, mpr2; //приведенные массы
static double t0 = 0.0, x10 = 0.0, dx1_dt0 = 0.0, dx2_dt0 = 0.0;
double t,x1,dx1_dt,dx2_dt,x1max,t1,dx1_dt_1,dx2_dt_1;
double a1,a2,a3,a4,b1,b2,b3,b4,c1,c2,c3,c4;
FILE *ft; ft = fopen("C:/workspace/Task_2/DFG.txt", "wt");
mpr1=(64.0*m1*m2+24.0*m3*(m1+m2)+6.0*sqr(m3))/(8.0*(8.0*m2+3.0*m
3)); mpr2 = m3/(8.0*m2 + 3.0*m3);
dx1_dt=dx1_dt0; dx2_dt=dx2_dt0; t=t0; x1=x10; x1max=0.0;
a1=a2=a3=a4=b1=b2=b3=b4=c1=c2=c3=c4 = 0.0;
do//главный вычислительный цикл{
fprintf(ft,"%5.5f  %5.5f  %5.5f  %5.5f  \n",t,x1,dx1_dt,dx2_dt);
t = t + h;
a1=(-(c*x1+fr*dx1_dt)+F0*sin(k*t + fi_0))/mpr1;
a2=(-(c*(x1+h*c1/2.0)+fr*(dx1_dt+h*a1/2.0))
    +F0*sin(k*t+fi_0))/mpr1;
a3=((c*(x1+h*c2/2.0)+fr*(dx1_dt+h*a2/2.0))
    +F0*sin(k*t+fi_0))/mpr1;
a4=(-(c*(x1 + h*c3) + fr*(dx1_dt + h*a3))
    + F0*sin(k*t + fi_0))/mpr1;
b1 = -mpr2*a1; b2 = -mpr2*a2; b3 = -mpr2*a3; b4 = -mpr2*a4;
c1 = dx1_dt; c2 = dx1_dt + h*a1/2.0;
c3 = dx1_dt + h*a2/2.0; c4 = dx1_dt + h*a3;
```

```
dx1_dt+=h*(a1+2.0*a2+2.0*a3+a4)/6.0;
dx2_dt+=h*(b1+2.0*b2+2.0*b3+b4)/6.0;
x1+=h*(c1+2.0*c2+2.0*c3+c4)/6.0;
if (fabs(x1) > fabs(x1max)) {x1max = x1; t1 = t; dx1_dt_1 =
dx1_dt; dx2_dt_1 = dx2_dt;}}while (t <= T + h);
printf("%5.5f\n", t1); printf("%5.5f\n", x1max);
printf("%5.5f\n", dx1_dt_1); printf("%5.5f\n", dx2_dt_1);
return EXIT_SUCCESS;}//конец программы
```

На рисунках 5, 6 представлены графики функций $x_1 = x_1(t)$, $\dot{x_1} = \dot{x_1}(t)$ соответственно. С помощью данной программы можно легко найти, что $t_1 = 3.39$ секунды. В этот момент времени: $\dot{x_1} = V_1 = 1.1 * 10^{-4}$ м/с; $\dot{x_2} = V_2 = 2.0 * 10^{-5}$ м/с. Тогда $V_C = 6.5 * 10^{-5}$ м/с; ω_3 =3.75* 10^{-4} рад/с.

В момент времени t_1 происходит удар вследствие внезапной остановки рейки 2 (потеря МС одной степени свободы). Общее уравнение механики при ударе:

$$m_1(\vec{u}_1 - \vec{V}_1)\delta\vec{r}_1 + m_3(\vec{u}_C - \vec{V}_C)\delta\vec{r}_C + J_{3C}(\omega_{3\text{к}} - \omega_3)\delta\varphi_3 = 0,$$

здесь $\delta\varphi_3$ - возможное перемещение (угловое) шестерни 3; $\delta\vec{r}_C$ – возможное перемещение точки *C*, $\delta r_C = \delta\varphi_3 * r$; $\delta\vec{r}_1$ – возможное перемещение рейки 1, $\delta r_1 = 2 * \delta r_C$; $\vec{u}_1, \vec{u}_C, \omega_{3к}$ – скорость рейки 1, скорость точки *C* и угловая скорость шестерни после удара соответственно, $u_1 = 2 * u_C$, $u_C = \omega_{3к} * r$. В проекции на ось x_1 получим:

$$m_1(u_1 - V_1) + m_3(u_1/2 - (V_1 + V_2)/2)/2 + J_{3C}(u_1/(2r) - (V_1 - V_2)/(2r))/(2r) = 0,$$

тогда $u_1 = (m_1V_1 + m_3\,(V_1 + 3V_2)/8)/(m_1 + 3m_3/8)$; $u_C = u_1/2$.

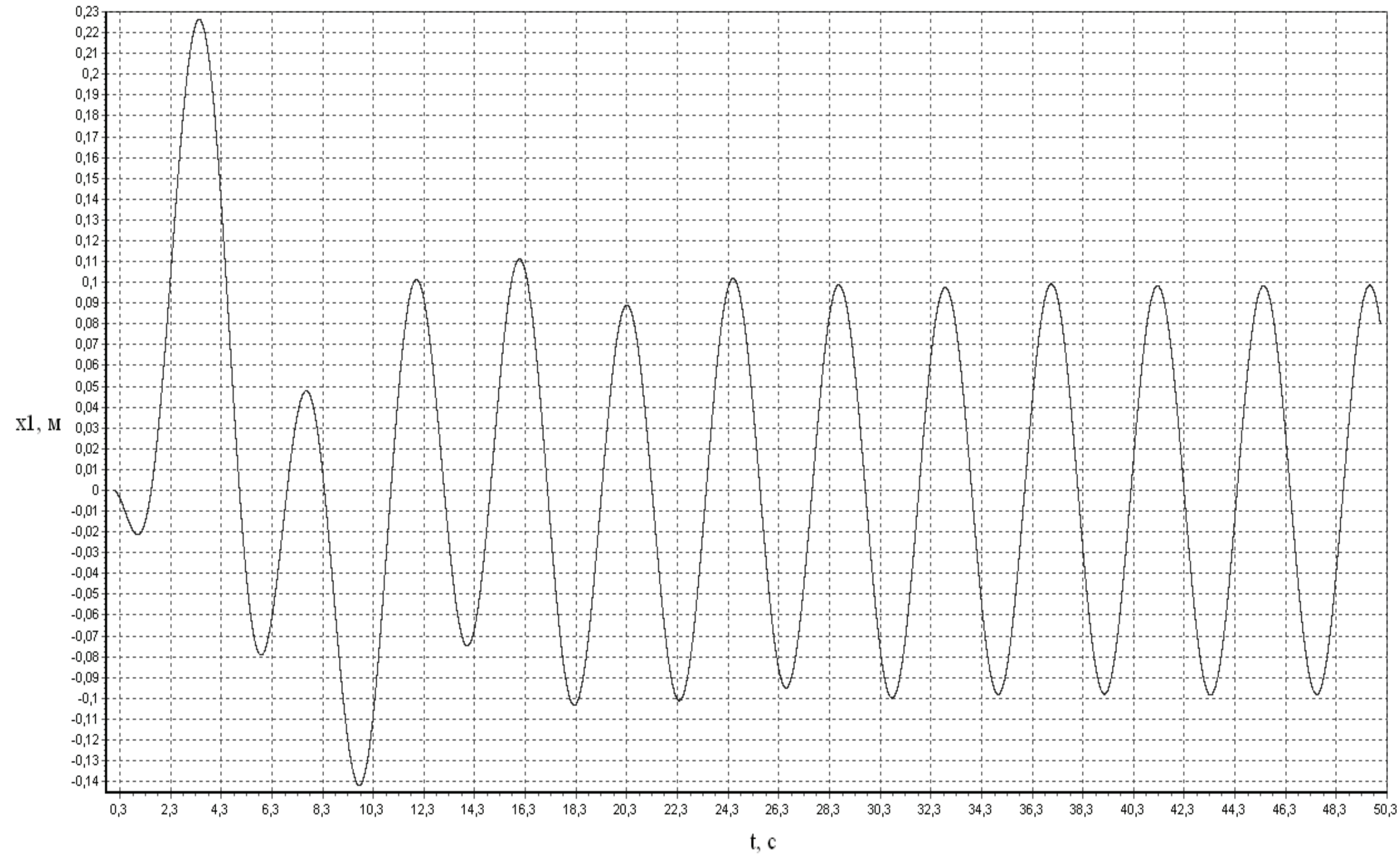

Рис. 5. Зависимость перемещения рейки 1 от времени

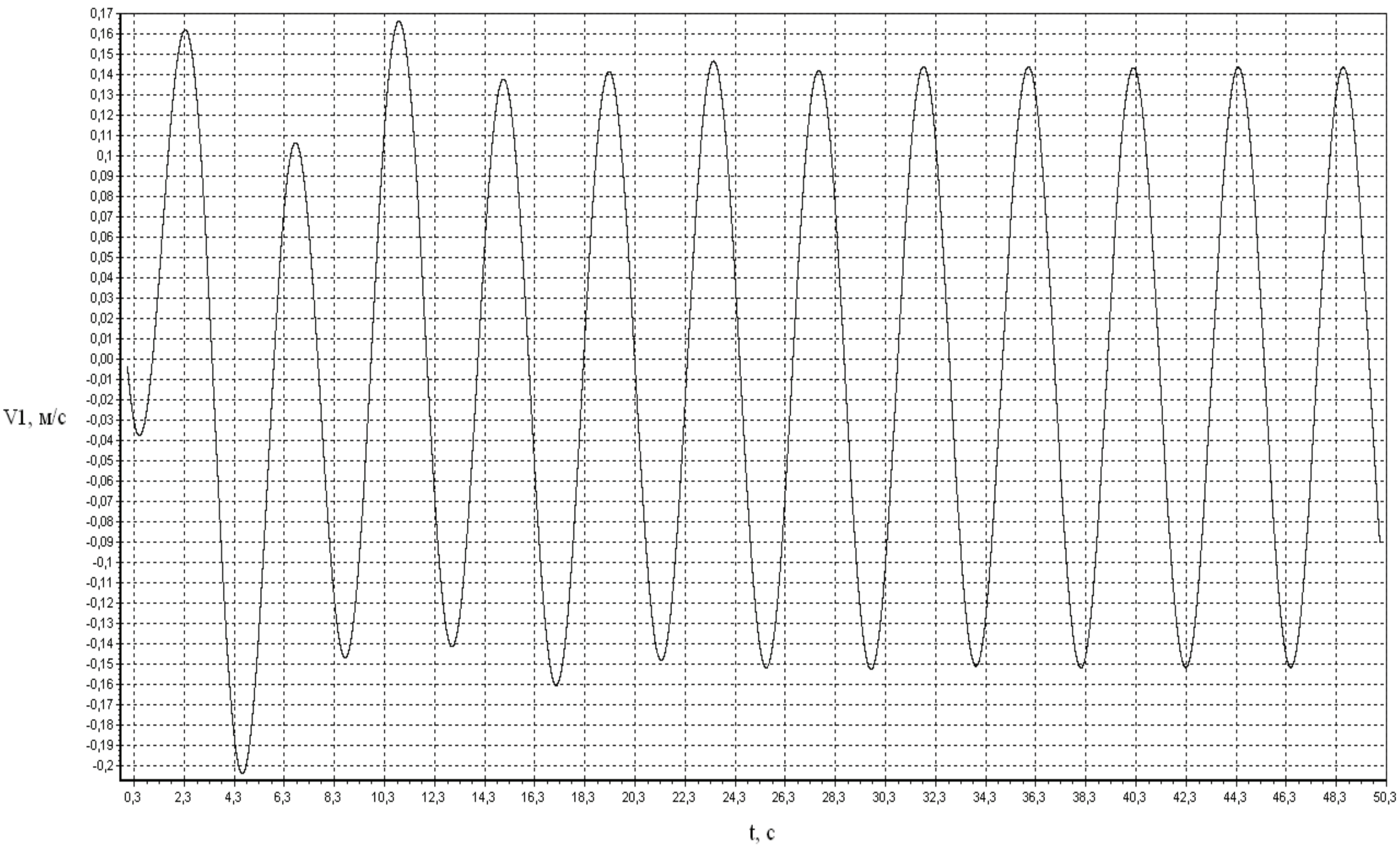

Рис. 6. Зависимость скорости рейки 1 от времени

Список литературы

1. Курс теоретической механики / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; Под ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
2. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов. 2-е изд., перераб. и доп. / Под ред. К.С. Колесникова. М.: Наука, 1989.
3. Сборник олимпиадных задач по теоретической механике: Учеб. пособие / В.В. Дубинин, Г.М. Тушева, Н.Л. Нарская и др.; Под ред. В.В. Дубинина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
4. Применение ЭВМ при решении задач динамики (Курс теоретической механики: общие теоремы динамики, удар): Препр. № 487 / В.В. Дубинин, В.А. Калиниченко, В.Л. Машковский и др.; Институт проблем механики АН СССР. М., 1991.