

УДК 534.1

Параметрические колебания маятника на тележке

Аунг Наинг Со

Стажер-исследователь кафедры «Теоретическая механика»

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Научный руководитель: Калиниченко В.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры

«Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана

МГТУ им. Н.Э. Баумана

kalarlay@mail.ru

Обыкновенный плоский маятник может рассматриваться как классическая механическая нелинейная система, с помощью которой моделируются многие физические процессы. Отметим, что различные маятниковые модели использовались при исследовании колебаний жидкости со свободной поверхностью. Так, вынужденные колебания сферического маятника использовались как механическая аналогия движения жидкости в контейнерах различной геометрической формы [1,2]. Указанные работы имели аэрокосмическое приложение – исследование колебаний топлива в ракетных баках.

В настоящей работе экспериментально исследуется параметрическое возбуждение колебаний физического маятника на тележке. Динамика этой системы может рассматриваться как механический аналог сложного взаимодействия сосуда с жидкостью при параметрическом возбуждении стоячих волн и сохранении горизонтальной степени свободы сосуда.

1. Постановка эксперимента. Исследовался основной параметрический резонанс, когда частота колебаний маятника в 2 раза меньше частоты Ω вертикальных колебаний оси маятника – рис. 1, а. Для возбуждения параметрических колебаний физического маятника на тележке использовалась экспериментальная установка, описанная в [3] и представляющая собой прецизионный электромеханический вибростенд. Тележка с

маятником помещалась на платформу, совершающую гармонические колебания в вертикальном направлении (угловые смещения от вертикали не превышали 8').

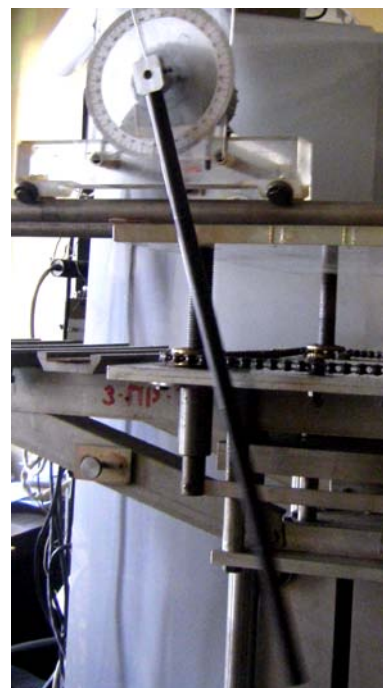
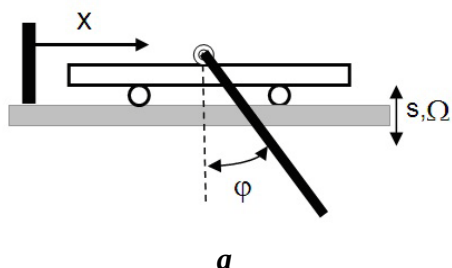


Рис. 1. Параметрическое возбуждение колебаний физического маятника на тележке (а) и общий вид экспериментальной установки (б)

В экспериментах с маятником однородный стальной цилиндр диаметром 1.5 см и длиной 50.2 см жестко крепился к горизонтальной оси обесточенного электродвигателя, подшипники которого обеспечивали колебания физического маятника в вертикальной плоскости; добротность системы составляла величину около 250. Точность измерения угла отклонения маятника составляла 0.5° . Измеренная собственная частота маятника $\omega = 5.28 \pm 0.12 \text{ с}^{-1}$, приведенная длина $l = 35.1 \text{ см}$.

В экспериментах с маятником на тележке маятник жестко крепился на тележку (рис. 1, б), свободно перемещающуюся по двум горизонтальным стальным рельсам. Плавность хода тележки обеспечивалась пятью подшипниками качения. При массе тележки (вместе с обесточенным электродвигателем) $m_2 = 2880 \text{ г}$ и массе маятника $m_1 = 688 \text{ г}$ измеренный динамометрическим методом коэффициент трения качения покоя не превышал 0.02.

Исследования динамики маятника проводились при различных амплитудах вертикальных колебаний оси $s = 0.5, 1.05 \text{ и } 2.25 \text{ см}$. Для регистрации параметрических колебаний использовалась цифровая видеосъемка (15 - 30 к/с) с последующей компьютерной обработкой материалов в среде ImageJ.

Коэффициент затухания $b = 0.029 \text{ с}^{-1}$ колебаний маятника оценивался по материалам видеосъемки в диапазоне начальных угловых смещений $\varphi_0 \sim 15-60^\circ$ как $b = T^{-1} \ln(\varphi_m / \varphi_{m+1})$.

2. Результаты и обсуждение. Для оценки эффекта горизонтально перемещающейся тележки приведем сначала результаты для маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса.

2.1. Параметрические колебания маятника. Различные режимы движения маятника, точка подвеса которого совершает колебания в вертикальном направлении, представляют особый интерес. В зависимости от частоты и амплитуды колебаний точки подвеса эта, на первый взгляд, простая механическая система проявляет себя весьма своеобразно – от простых до весьма сложных колебательных движений. При частоте колебаний точки подвеса в два раза больше собственной частоты маятника, нижнее положение маятника становится неустойчивым, и система начинает совершать нарастающие колебания при условии, что амплитуда колебаний точки подвеса превосходит некоторое пороговое значение. Это – параметрический резонанс. В отличие от обыкновенного резонанса с внешним вынуждающим силовым воздействием при параметрическом резонансе одни лишь эффекты затухания не могут ограничить рост параметрических колебаний. Рост амплитуды ограничивается нелинейными свойствами маятника – период колебаний увеличивается с ростом амплитуды, и условия резонанса нарушаются.

Движение физического маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса описывается уравнением $\varphi'' + 2b\varphi' + [\omega^2 + (s\Omega^2 / l)\cos\Omega t]\sin\varphi = 0$, где φ – угол отклонения маятника от вертикали, s и Ω – амплитуда и частота колебаний точки подвеса маятника, b – коэффициент затухания, определяемый сопротивлением воздуха и потерями на оси, $\omega = \sqrt{g/l}$ – собственная частота малых колебаний маятника.

Параметрическое возбуждение колебаний маятника происходит, если расстройка $\Delta = \omega - \Omega / 2$ удовлетворяет условию $|\Delta| < s\Omega^3 / 8g$. Для условий настоящего эксперимента рассчитанные по этому соотношению область возбуждения колебаний на плоскости (s, Ω) показана на рис. 2, а.

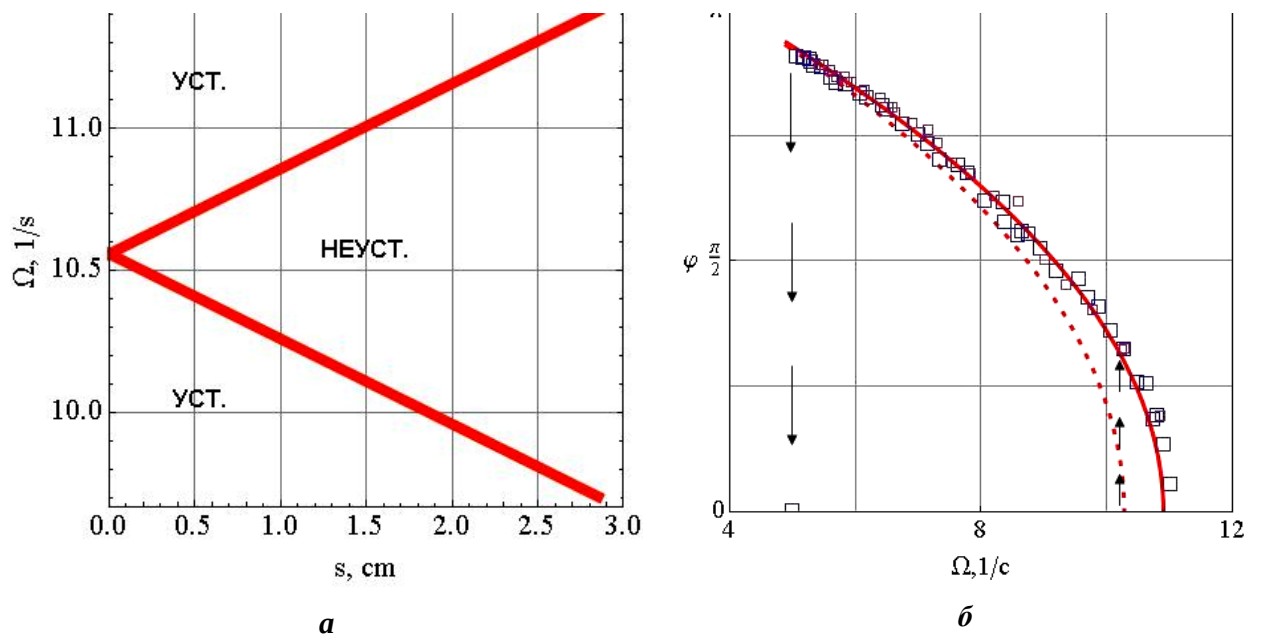


Рис. 2. Диаграмма устойчивости (а) и резонансная зависимость (б) маятника ($s = 1.05$ см, $\chi \equiv 0$)

Амплитуда φ_m стационарных колебаний маятника согласно [4] определяется как

$$\varphi_{m\pm}^2 = -16\left(\frac{\Omega}{2\omega} - 1\right) \pm 4\sqrt{\left(\frac{s\Omega^2}{g}\right)^2 - 4\left(\frac{2b}{\omega}\right)^2}, \quad (1)$$

где φ_{m+} отвечает устойчивой, а φ_{m-} - неустойчивой ветви резонансной зависимости.

На рис. 2, б приведена резонансная зависимость для маятника с коэффициентом затухания $b = 0.029 \text{ с}^{-1}$ при $s = 1.05$ см. После возбуждения колебаний на частоте $\Omega = 11.01 \text{ с}^{-1}$ их амплитуда равна $\varphi_m = 0.20$ рад. При плавном уменьшении Ω амплитуда монотонно возрастала до максимальной величины $\varphi_m = 2.85$ рад при $\Omega = 5.04 \text{ с}^{-1}$. Дальнейшее уменьшение Ω приводит к срыву колебаний при $\Omega = 4.97 \text{ с}^{-1}$. Рассчитанные по (1) ветви резонансной зависимости пересеклись при частоте срыва $\Omega = 4.91 \text{ с}^{-1}$. Если после срыва колебаний медленно увеличивать частоту сосуда, то скачкообразное возбуждение колебаний происходит при $\Omega = 10.25 \text{ с}^{-1}$.

Аналогичные результаты были получены при изменении экспериментальных условий (для других значений амплитуды колебаний точки подвеса маятника), что свидетельствует о неплохом соответствии между моделью и экспериментом.

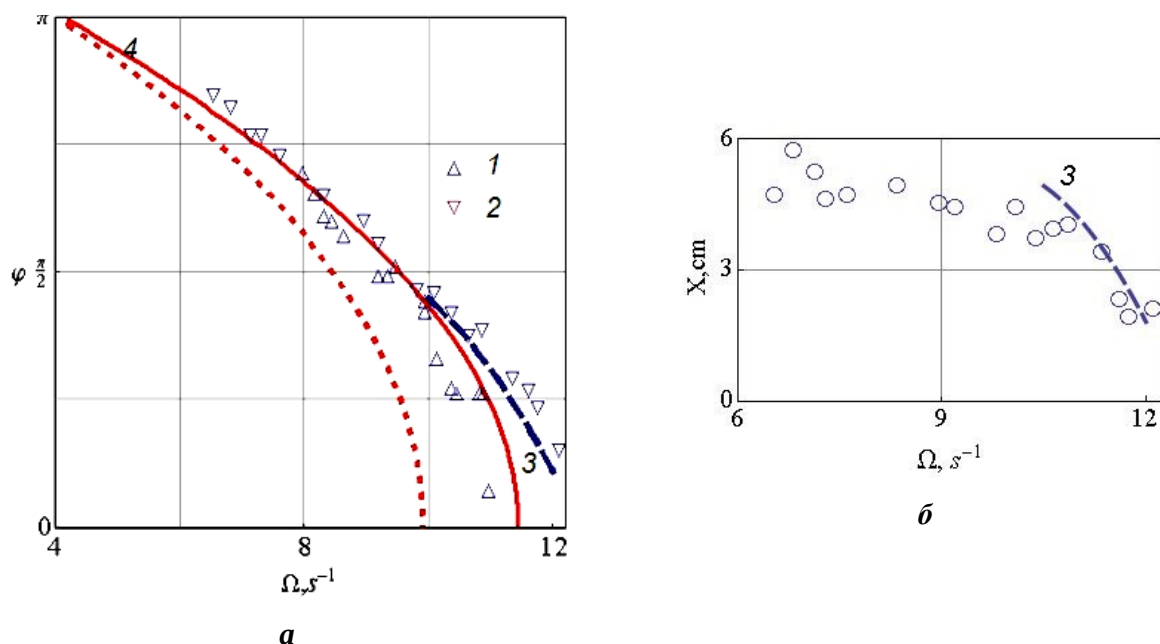


Рис. 3. Отклонение маятника (а) и смещение тележки (б) в зависимости от частоты вертикальных колебаний при $s = 2.25$ см: 1 – маятник ($x \equiv 0$); 2 – маятник на тележке; 3 – численный счет, модель (2); 4 – теория (1) ($x \equiv 0$)

2.2. *Параметрические колебания маятника на тележке.* Перейдем теперь к параметрическому резонансу в механической системе, состоящей из движущейся вдоль горизонтальной прямой тележки массы m_2 и подвешенного к ней маятника массы m_1 (рис. 1, а). Если ввести горизонтальную координату x тележки, динамика плоского движения системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 l \cos \varphi)\ddot{\varphi} &= (m_1 l \sin \varphi)\dot{\varphi}^2 - F', \\ (m_1 l \cos \varphi)\ddot{x} + m_1 l^2 \ddot{\varphi} &= -m_1 l(g + s\Omega^2 \cos \Omega t) \sin \varphi - b\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $F' = \mu[(m_1 + m_2)(g + s\Omega^2 \cos \Omega t) + m_1 l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)]$ - сила трения качения между подшипниками тележками и горизонтальными направляющими; μ - коэффициент трения качения.

Амплитуды отклонения маятника и смещения тележки как функции частоты вертикальных колебаний приведены на рис. 3.

Анализ данных рис. 3, а показывает, что наличие тележки практически не влияет на колебания маятника. Отметим только, что в случае маятник на тележке (2) эксперимент показал затягивание резонансной зависимости в область высоких частот Ω . Кроме того, вблизи частоты $\Omega = 6.51 \text{ с}^{-1}$ срыва колебаний наблюдались перевороты маятника через 3-5 периодов. Амплитуда тележки монотонно растет с уменьшением Ω - рис. 3, б.

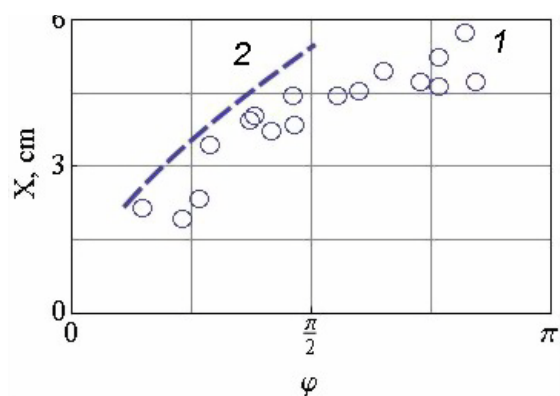


Рис. 4. Смещение тележки как функция угла отклонения маятника: 1 – эксперимент; 2 – численное решение уравнений (2)

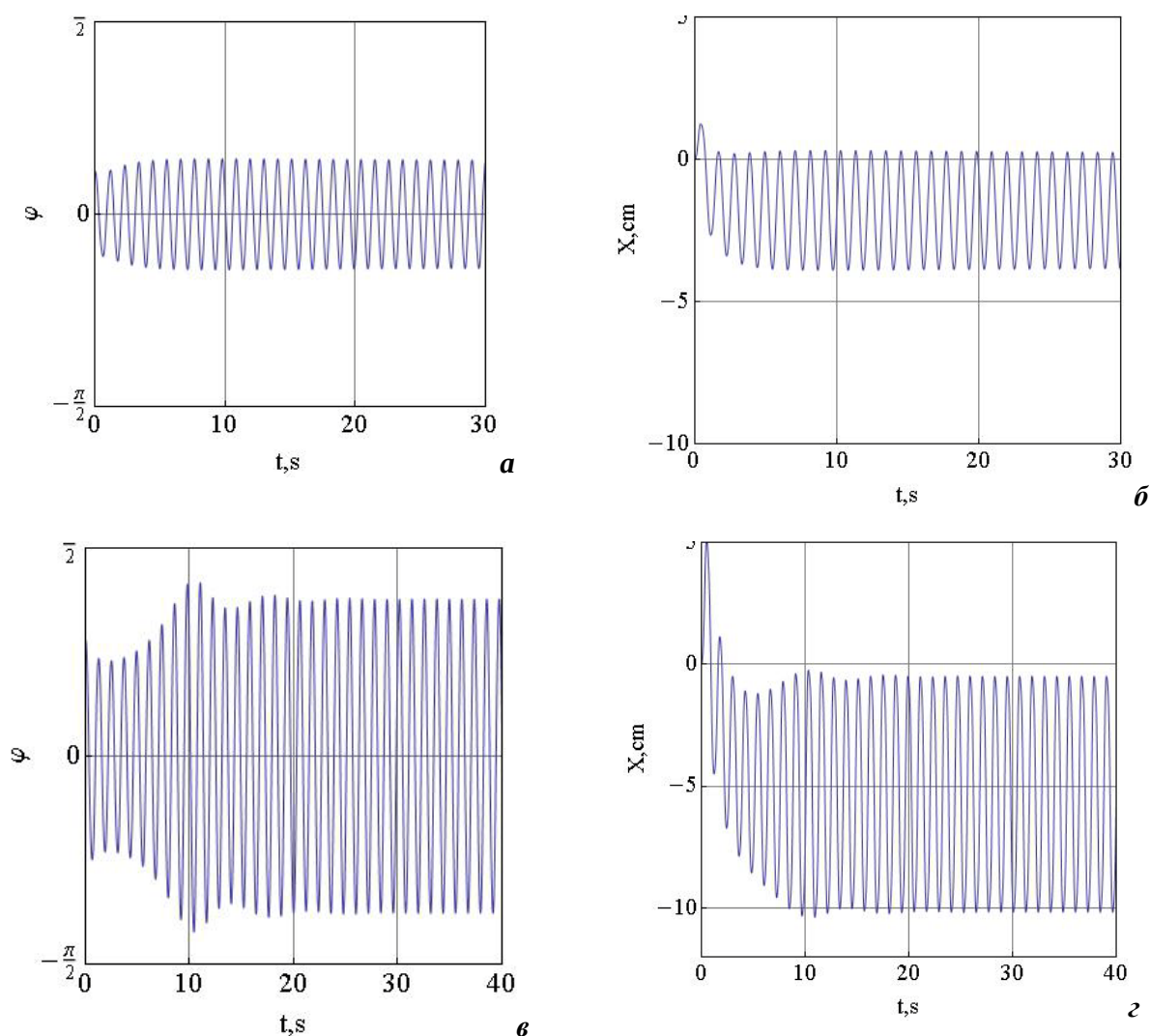


Рис. 5. Процесс установление стационарных колебаний системы маятник – тележка (результаты численного решения (2)): а, б - $\Omega = 11.80 \text{ c}^{-1}$, $\varphi_0 = 0.36$; в, г - $\Omega = 10.50 \text{ c}^{-1}$, $\varphi_0 = 0.88$ ($x_0 = 0$)

На рис. 3 также приведены результаты численного решения уравнений движения (2). Для решения использовалась стандартная процедура *NDSolve* пакета *Mathematica*. В

модели использовались экспериментальные характеристики маятника и тележки. В качестве коэффициента трения качения взята величина $\mu = 0.02$. Только для диапазона частот $\Omega = 9.125 - 11.80 \text{ с}^{-1}$ получены стационарные значения амплитуд маятника и тележки – кривая 3 на рис. 3.

Данные рис. 4 описывают взаимосвязь колебаний маятника и тележки. Видно, что с увеличением φ амплитуда тележки также растет и может достигать значительных величин порядка 6 см.

Процесс установления стационарных колебаний при различных Ω показан на рис. 5. Переходный процесс характерен и для маятника, и для тележки. Отметим существенное смещение положения, около которого происходят колебания тележки. Это наблюдалось и в эксперименте.

Заключение. Рассмотрены резонансные колебания физического маятника и маятника на тележке около нижнего положения равновесия под действием вертикальных колебаний точки подвеса.

Экспериментально исследованы резонансные зависимости и влияние диссипативных эффектов на параметрические колебания маятника. Проведено сравнение опытных данных с имеющейся теоретической моделью.

Особое внимание в экспериментах уделено случаю связанных колебаний маятника на тележке, когда точка подвеса маятника получает дополнительную степень свободы в горизонтальном направлении. Построена и численно исследована модель совместного движения систем; результаты сравниваются с экспериментальными данными.

Анализ полученных данных свидетельствует о необходимости проведения эксперимента в более широком диапазоне параметров.

Список литературы

1. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
2. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge Univ. Press, 2005. 948 p.
3. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. О срыве параметрических колебаний жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 128-136.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.