электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 536.421.1

Задача плавления в цилиндрической системе координат в ограниченном пространстве

А.К. Косакян

Студент, кафедра «Прикладная математика»
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

Научный руководитель: Г.Н. Кувыркин, д.т.н., проф., заведующий кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

МГТУ им. Н.Э. Баумана
kosakian@gmail.com

Об энергетических накопителях с фазовым переходом

В последние десятилетия явление фазового перехода все чаще используется в различных теплофизических областях – от компьютерной техники высокого класса до энергетики [11]. Как известно, при смене агрегатного состояния вещества происходит значительное выделение или поглощение теплоты при практически неизменной температуре. Благодаря этому факту тепловые аккумуляторы с применением материалов с фазовым переходом являются высокоэффективным решением, позволяющим накапливать большое количество энергии, и широко применяются в солнечной энергетике, тепловых насосах, системах термического контроля космических аппаратов. Ведутся исследования по использованию таких материалов для обогрева и охлаждения зданий.

Наиболее распространенными в современной промышленности являются тепловые накопители, имеющие форму параллелепипеда, сплошного цилиндрического контейнера или трубы, заполненной плавким материалом [9]. В последних наполнитель могут пересекать поперечные или продольные ребра радиатора для лучшего теплового контакта [5]. Встречаются также накопители и более сложной формы.

Несмотря на разнообразие форм, суть работы у большинства тепловых накопителей одна. Поясним принцип передачи теплоты в таких системах на примере цилиндрического накопителя (рис. 1).

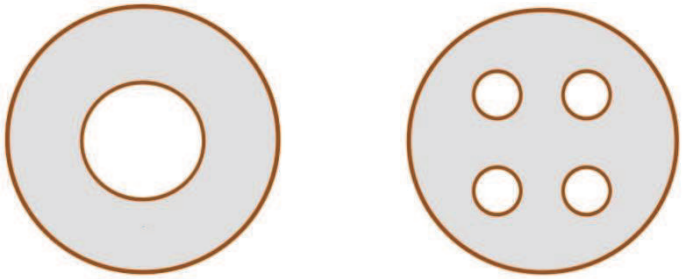

Рис. 1. Схематическое изображение поперечного сечения цилиндрического теплового накопителя с одним теплоносителем (слева) и с четырьмя теплоносителями (справа)

Тепловые аккумуляторы состоят из металлической оболочки, плавкого наполнителя (обозначен на рисунках серым цветом) и проходящих через него трубок с теплоносителем, выполненных из материала с высокой теплопроводностью, например, из меди [5]. В качестве плавкого материала обычно выбирают парафины, жирные кислоты, гидраты солей, сплавы некоторых металлов, эвтектические сплавы и пр. Более полный список применяемых составов и их характеристики можно найти в работах [5, 11].

Плавкий материал наполнителя, меняя свое агрегатное состояние под воздействием теплоносителей, поглощает энергию, тем самым выступая в роли теплового аккумулятора. Когда требуется запустить процесс в обратную сторону, наполнитель охлаждается и передает теплоту обратно в систему.

Описанный циклический процесс передачи теплоты можно использовать, например, на предприятиях, оборудование которых за рабочую смену сильно нагревается. Простаивающие механизмы рассеивают теплоту в окружающее пространство. Применение тепловых накопителей позволяет отводить теплоту в аккумуляторы, где она хранится некоторое время, после чего может быть преобразована в электрическую энергию, В конечном итоге это снижает затраты предприятия.

Большое число научно-исследовательских работ, связанных с моделированием фазовых переходов в тепловых накопителях, прямо указывает на возрастающую актуальность данной технологии. Решая задачи плавления в ограниченном пространстве, большинство авторов предлагают аппроксимации рассматриваемых явлений или приводят полностью численное решение (см., например, [6, 7, 9]), Данная работа ставит собой цель

разработать общую математическую и инженерную методику моделирования процесса плавления в тепловых накопителях цилиндрического типа с минимальным наличием физических аппроксимаций и численных расчетов для получения наиболее точного и простого с точки зрения вычислений решения.

Математическая модель

Рассмотрим цилиндр с внутренним радиусом R_{in} и внешним радиусом R_{out}, наполненный плавким материалом, имеющим в начальный момент времени температуру плавления T_m. Вследствие равномерного нагревания внутренней стенки граница, разделяющая жидкую и твердую фазы, будет осесимметрична, и в области $R_{in} \leq r < R(t)$ будет находиться жидкость, а в области $R(t) < r \leq R_{out}$ - твердое тело (рис. 2).

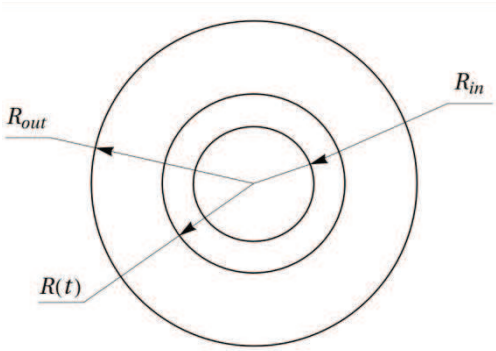

Рис. 2. Схема движения фронта разделения фаз в поперечном сечении цилиндра

Прежде чем перейти непосредственно к математической модели, перечислим допущения и обозначения (табл.), принятые в данной работе.

1. Скрытая теплота постоянна; процесс ее поглощения проходит при постоянной температуре T_m фазового перехода;
2. Тепловой контакт между теплоносителем и плавким материалом считаем прямым;
3. Фазы разделены поверхностью бесконечно малой толщины;
4. Поверхностные натяжения и эффекты кривизны па границе фаз не учитываются;
5. Теплофизические свойства материала в каждой фазе неизменны, $c_L \neq c_S$, $k_L \neq k_S$;
6. Плотность материала постоянна и не зависит от его фазы: $\rho_L = \rho_S$.

ρ	Плотность	L	Удельная теплота плавления
c	Удельная массовая теплоемкость	h	Коэффициент теплоотдачи
k	Коэффициент теплопроводности	$R(t)^-$	Поверхность *R(t)* со стороны жидкой фазы
T_m	Температура плавления	$R(t)^+$	Поверхность *R(t)* со стороны твердой фазы

Здесь индексы L и S у величин обозначают их отношение к жидкой и твердой фазе соответственно, В данной работе мы рассмотрим задачу типа однофазной задачи Стефана и для удобства опустим эти индексы у величин, обозначающих характеристики материала.

Математическая модель технической системы представлена выражениями [6]

$$\rho c T_{,t} = \frac{k}{r}\left(r T_{,r}\right)_{,r}, \quad R_{in} < r < R(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$T(R(t), t) = T_m, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\rho L R_{,t}(t) = -k T_{,r}(R(t)^-, t), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$T(R(0), 0) = T_m, \tag{4}$$

$$R(0) = R_{in} \tag{5}$$

вместе с граничным условием общего вида

$$-k T_{,r}(R_{in}, t) = h[T_L(t) - T(R_{in}, t)] + \beta q_L(t), \quad T_L(t) < T_m, \quad q_L(t) > 0, \quad t > 0, \tag{6}$$

где β - числовой коэффициент.

Представленная задача не имеет точного аналитического решения в элементарных функциях, и возникает необходимость использования аппроксимаций. В частности, предположение о квазистационарности процесса [6] позволяет вместо уравнения (1) использовать уравнение $(rT_{,r})_{,r} = 0$, имеющее решение

$$T(r, t) = A \ln r + B, \tag{7}$$

где $A = A(t)$ и $B = B(t)$ - коэффициенты, требующие определения.

Приведем три примера наиболее часто используемых граничных условий нагрева в виде частных случаев выражения (6) с соответствующими решениями.

Пример 1. Положив $h \to \infty$ и $|\beta| < \infty$, зададим температурный режим нагревания:

$$T(R_{in}, t) = T_L(t) > T_m, \quad t > 0.$$

Тогда решение поставленной задачи с предположением о квазистационарности процесса определяется выражениями [6]

$$T(r,t) = T_m + [T_L(t) - T_m]\frac{\ln\frac{r}{R(t)}}{\ln\frac{R_{in}}{R(t)}}, \quad R_{in} \le r \le R(t), \quad t > 0,$$

$$2R^2(t)\ln\frac{R(t)}{R_{in}} = R^2(t) - R_{in}^2 + \frac{4k}{\rho L}\int_0^t [T_L(s) - T_m]ds.$$

Пример 2. Положив $h = 0$ и $\beta = 1$, зададим тепловой поток:

$$-kT_{,r}(R_{in}, t) = q_L(t) > 0, \quad t > 0.$$

В этом случае имеем следующие выражения для определения распределения температуры по сечению цилиндра и положения границы раздела фаз [6]:

$$T(r,t) = T_m - \frac{q_L(t)}{k}R_{in}\ln\frac{r}{R(t)}, \quad R_{in} \le r \le R(t), \quad t > 0,$$

$$R(t) = \sqrt{R_{in}^2 + 2\frac{R_{in}}{\rho L}\int_0^t q_L(s)ds}, \quad t > 0.$$

Пример 3. Положив $|h| < \infty$ и $\beta = 0$, зададим условие конвективного теплообмена:

$$-kT_{,r}(R_{in}, t) = h[T_L(t) - T(R_{in}, t)], \quad T_L(t) > T_m, \quad t > 0.$$

Тогда решение определяется выражениями [6]

$$T(r,t) = T_m + [T_L(t) - T_m]\frac{\ln\frac{r}{R(t)}}{\ln\frac{R_{in}}{R(t)} - \frac{k}{hR_{in}}}, \quad R_{in} \le r \le R(t), \quad t > 0,$$

$$2R^2(t)\ln\frac{R(t)}{R_{in}} = \left[1 - \frac{2k}{hR_{in}}\right](R^2(t) - R_{in}^2) + \frac{4k}{\rho L}\int_0^t [T_L(s) - T_m]ds.$$

При $h \to \infty$ данное решение совпадает с решением, полученным в Примере 1.

К сожалению, предположение о квазистационарности процесса является достаточно грубой аппроксимацией и неприемлемо в рамках данной работы.

Построение решения

Случай бесконечно удаленной внешней стенки

В [6] приводится решение Неймана задачи плавления в цилиндрической системе координат в случае точечного источника. Мы повторим алгоритм при $R_{in} \neq 0$, чтобы выяснить, применим ли он в рассматриваемом нами случае.

Как известно, уравнение (1) имеет автомодельное решение [6]

$$T(r,t) = E_1\left(\frac{r^2}{4a_0 t}\right),$$

где $a_0 = k/(\rho c)$ - температуропроводность плавкого материала, $E_1(x)$ - неполная гамма-функция $\Gamma(0,x)$ [3],

$$E_1(x) = \Gamma(0,x) = \int_x^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds = -\mathrm{Ei}(x).$$

Здесь $\mathrm{Ei}(x)$ - интегральная показательная функция [3],

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^s}{s} ds.$$

В дальнейшем $E_1(x)$ мы также будем называть интегральной показательной функцией.

Построим решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (6). Введем новую переменную

$$\xi = r/\sqrt{a_0 t}$$

и будем искать решение в виде

$$T(r,t) = F(\xi)$$

с зависимостью радиальной координаты границы разделения фаз от времени

$$R(t) = R_{in} + A\sqrt{a_0 t}, \quad A \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Тогда уравнение (1) примет форму

$$-F_{,\xi}\left(\frac{\xi^2}{2} + 1\right) = \xi F_{,\xi\xi}.$$

Решив это уравнение и вернувшись к переменным r и t, получим зависимость распределения температуры по сечению цилиндра от времени:

$$T(r,t) = T_m + \frac{E_1\left(\frac{r^2}{4a_0 t}\right) - E_1\left(\frac{R^2(t)}{4a_0 t}\right)}{E_1\left(\frac{R_{in}^2}{4a_0 t}\right) - E_1\left(\frac{R^2(t)}{4a_0 t}\right) + \frac{2k}{R_{in} h}\exp\left(-\frac{R_{in}^2}{4a_0 t}\right)}\left[\frac{\beta q_L(t)}{h} + T_L(t) - T_m\right]. \tag{9}$$

Обозначим

$$\lambda(t) = \frac{R(t)}{2\sqrt{a_0 t}} = \frac{R_{in} + A\sqrt{a_0 t}}{2\sqrt{a_0 t}}, \quad \Delta T_L(t) = T_L(t) - T_m,$$

$$\mathrm{St}(t) = \frac{c\Delta T_L}{L}.$$

Величина $\mathrm{St}\big|_{t_0}$ представляет собой число Стефана [6], вычисленное в момент времени $t = t_0$. Перепишем условие Стефана (3) в виде

$$\mathrm{St}(t) = \frac{2\lambda\sqrt{a_0 t} - R_{in}}{2\sqrt{a_0 t}}\left[E_1\left(\frac{R_{in}^2}{4a_0 t}\right) - E_1(\lambda^2) + \frac{2k}{R_{in}h}\exp\left(-\frac{R_{in}^2}{4a_0 t}\right)\right]\lambda\exp(\lambda^2) - \frac{c}{L}\frac{\beta q_L(t)}{h}. \quad (10)$$

Оценим коэффициент теплоотдачи h, исходя из критериев подобия. При вынужденной конвекции в трубах имеет место зависимость [8]

$$\mathrm{Nu} = 0{,}023\mathrm{Re}^{0{,}8}\mathrm{Pr}^{0{,}4}, \quad (11)$$

где Nu – число Нуссельта, Re - число Рейнольдса, Pr - число Прандтля. При этом верны соотношения

$$\mathrm{Nu} = \frac{hl}{k}, \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho_f V_f L_f}{\eta}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\eta}{\rho_f a}, \quad (12)$$

где l и L_f - характерные размеры, ρ_f - плотность движущегося в трубе вещества, V_f - скорость потока в трубе, η – динамическая вязкость среды, a - температуропроводность. Будем считать, что в трубе радиуса R_{in} течет со скоростью $V_f = 0{,}1$ м/с смесь железа и углерода при температуре $T_f = 1400$ К.

Будем считать, что плавким материалом в цилиндре является хлорид натрия. Положив

$$l = L_f = R_{in} = 0{,}03 \text{ м}, \quad \rho_f = 7000 \text{ кг/м}^3, \quad V_f = 0{,}1 \text{ м/с}, \quad k = 0{,}0005 \text{ Вт/(м·К)},$$

$$\eta = 128 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2 \text{ [1]}, \quad a = 0{,}03 \text{ м}^2/\text{с},$$

из (11) и (12) найдем $h = 0{,}0074$ кВт/(м^2 · К).

На рис. 3-7 изображены графики зависимости правой части в (10), $f_1(\lambda, t)$, от λ для некоторых фиксированных значений времени и радиуса внутренней стенки цилиндра при $c = 0{,}88$ кДж/(кг·К), $L = 491{,}1$ кДж/кг, $\rho = 2165$ кг/м^3, $k = 1{,}12$ Вт/(м·К) [4, 10], $\Delta T_L = 600$ К при различных значениях h, β и q_L.

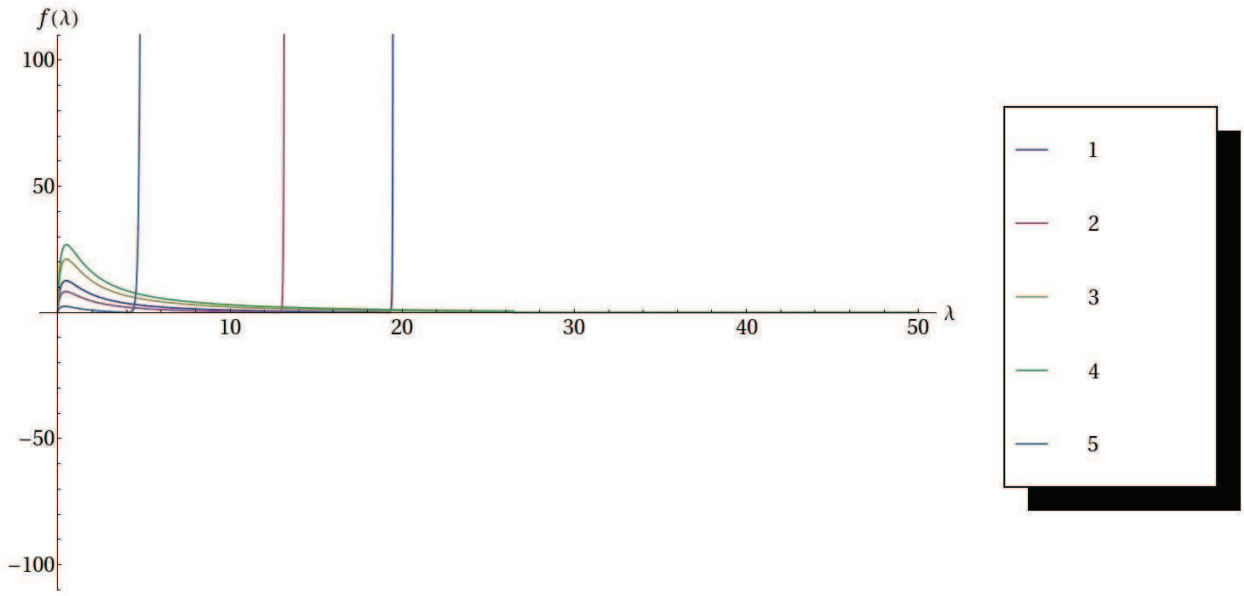

Рис. 3. График функции $f(\lambda)$ при $h \to \infty, \beta = 1$ и $q_L = 1$ Вт/м^2 для случаев: 1. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}03$ м; 2. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м; 3. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}05$ м; 4. $t = 0{,}1$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м; 5. $t = 10$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м

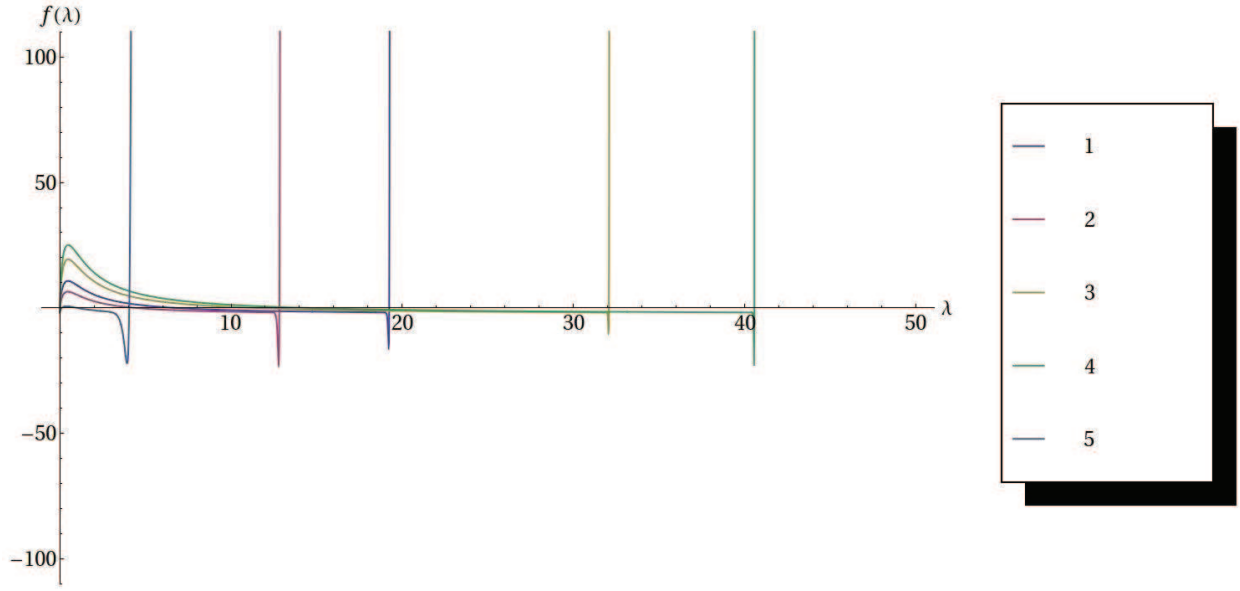

Рис. 4. График функции $f(\lambda)$ при $h \to 0$ кВт/(м$^2 \cdot$ К), $\beta = 1$ и $q_L = 1$ Вт/м^2 для случаев: 1. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}03$ м; 2. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м; 3. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}05$ м; 4. $t = 0{,}1$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м; 5. $t = 10$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м

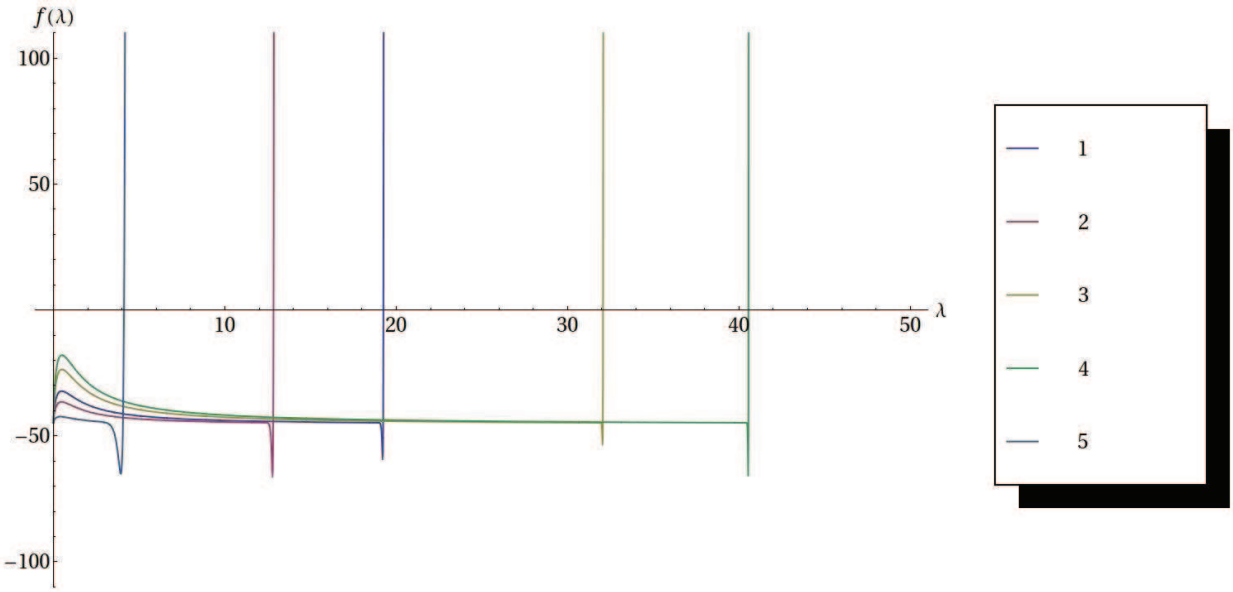

Рис. 5. График функции $f(\lambda)$ при $h \to 0$ кВт/(м$^2 \cdot$ К), $\beta = 1$ и $q_L = 25$ Вт/м^2 для случаев: 1. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}03$ м; 2. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м; 3. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}05$ м; 4. $t = 0{,}1$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м; 5. $t = 10$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м

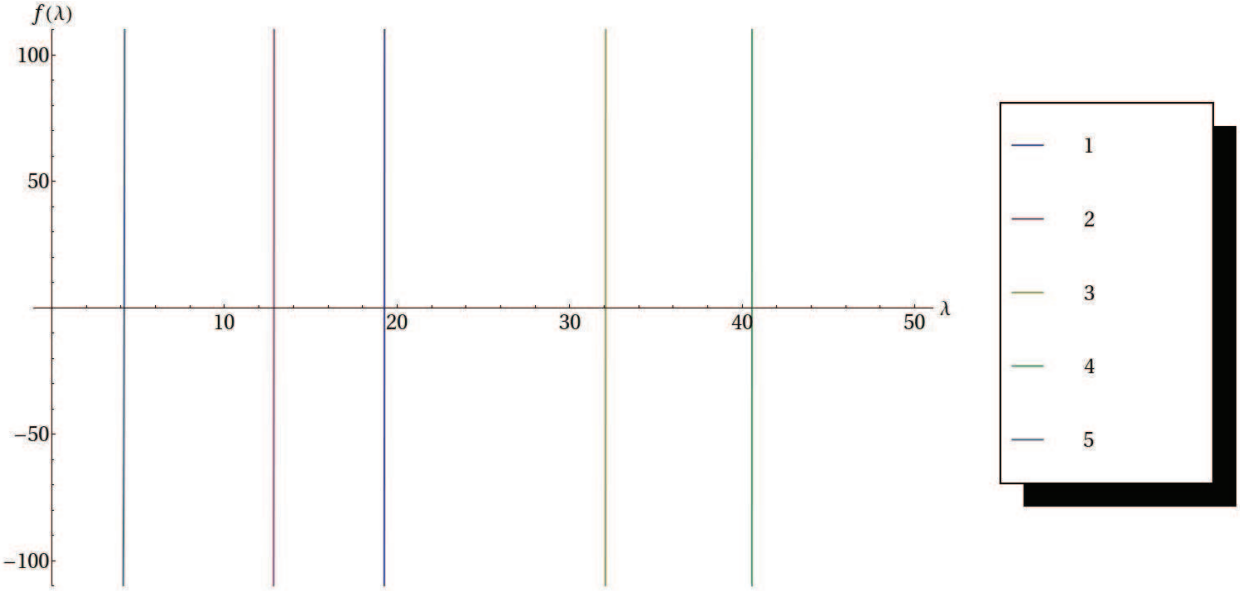

Рис. 6. График функции $f(\lambda)$ при $h \to 0$ кВт/(м$^2 \cdot$ К), $\beta = 1$ и $q_L = 100$ Вт/м^2 для случаев: 1. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}03$ м; 2. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м; 3. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}05$ м; 4. $t = 0{,}1$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м; 5. $t = 10$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м

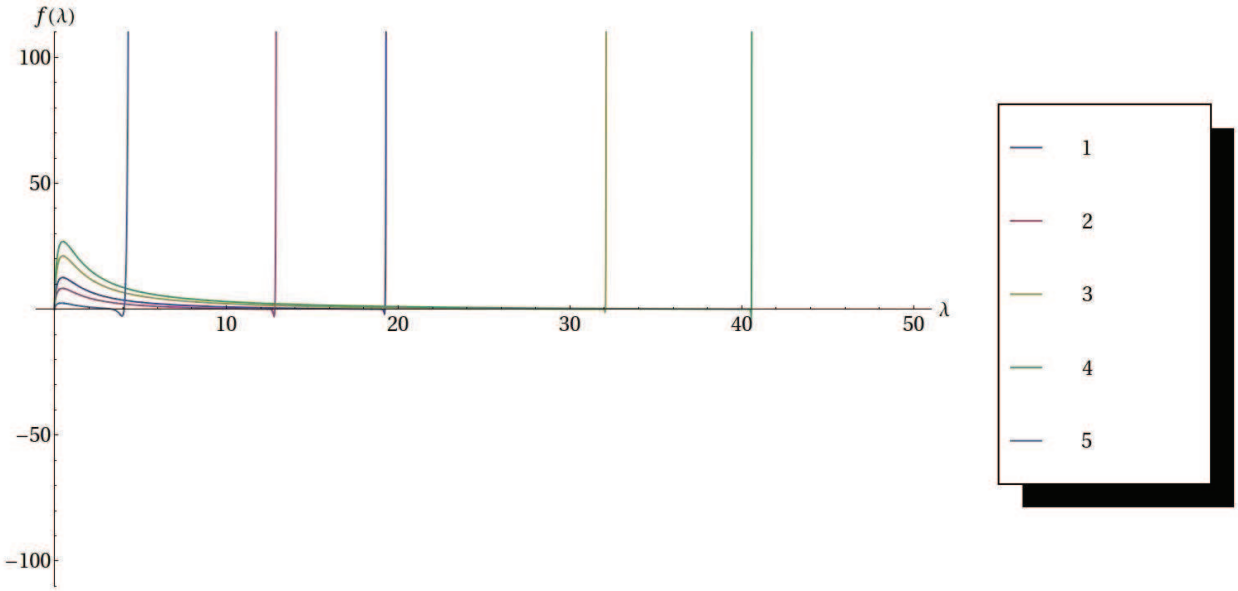

Рис. 7. График функции $f(\lambda)$ при $h = 0{,}0074$ кВт/(м$^2 \cdot$ К), $\beta = 0$ и $q_L = 1$ Вт/м^2 для случаев: 1. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}03$ м; 2. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м; 3. $t = 1$ с, $R_{in} = 0{,}05$ м; 4. $t = 0{,}1$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м; 5. $t = 10$ с, $R_{in} = 0{,}02$ м

Рис. 3 относится к частному случаю из Примера 1, рис. 4-6 – к случаю из Примера 2, а рис. 7 – к случаю из Примера 3. Как видно из представленных графиков, решение уравнения (10) относительно $\lambda(t_0)$ в большинстве случаев не обладает единственностью, так как график функции $f_1(\lambda, t_0)$ пересекает прямую $\mathrm{St}(t_0) \geq 0$ в нескольких точках в каждый фиксированный момент времени t_0. Единственностью решения обладает только случай, в котором рассмотрено наличие теплового потока, при достаточно больших значениях оного (так, при $q_L = 1$ Вт/м^2 единственности нет, а при $q_L = 25$ Вт/м^2 и $q_L = 100$ Вт/м^2 - есть).

В случае единственности корня $\lambda(t_0)$ трансцендентного уравнения (10) можно определить $T(r, t_0)$ и $R(t_0)$ по формулам (9) и (8).

Замечание. Можно показать, что $\lambda(t_0)$ не будет обладать единственностью и в том случае, если не записывать граничное условие в общем виде (6) с последующим присвоением параметрам h и β соответствующих значений, а использовать указанные выше частные случаи напрямую. Причиной тому служит тот факт, что изначально внутренний радиус принят ненулевым ($R_{in} > 0$). В случае $R_{in} = 0$ решение записывается через функцию ошибок

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds,$$

и корень $\lambda(t_0)$ оказывается единственен [6], поскольку график соответствующей функции $f_2(\lambda, t_0)$ не имеет той зоны положительности, из-за которой в случае ненулевого внутреннего радиуса R_{in} нарушается единственность решения. ■

Итак, приведенный в [6] алгоритм в нашем случае применим лишь частично.

Случай конечно удаленной внешней стенки

Проблема единственности решения в том виде, в котором она сформулирована выше, остается открытой. Одним из ее решений является рассмотрение различных корней $\lambda(t_0)$ уравнения (10) и проверка консервативности системы. Однако этот подход является достаточно трудоемким. В данном разделе мы рассмотрим применение численных методов для расчета функции $R(t)$, которые, в частности, позволяют задать сколь угодно большое значение R_{out}, что в определенной степени снимает вопрос единственности решения в случае бесконечно удаленной внешней стенки.

Используя условие Стефана (3) и выражение (9), получим дифференциальное уравнение для определения $R(t)$

$$R_{,t}(t) = \frac{2ca_0}{LR(t)} \frac{\exp\left(-\frac{R^2(t)}{4a_0 t}\right)}{E_1\left(\frac{R_{in}^2}{4a_0 t}\right) - E_1\left(\frac{R^2(t)}{4a_0 t}\right) + \frac{2k}{R_{in}h}\exp\left(-\frac{R_{in}^2}{4a_0 t}\right)} \left[\frac{\beta q_L(t)}{h} + T_L(t) - T_m\right] \qquad (13)$$

с условием (5).

Алгоритм решения уравнения (13) следующий. Сначала оно приводится к безразмерной форме, после чего применяется метод Рунге-Кутты четвертого порядка [2]. Здесь необходимо учесть, что вычисленные таким образом значения относятся к моментам времени, определяемым шагом по времени. Как следствие, температура по формуле (9) также вычисляется только в соответствующие моменты времени. Чтобы избежать таких ограничений, в указанное выражение подставляются не дискретные значения координаты раздела фаз, а интерполирующая функция, проходящая через эти точки. В качестве такой функции мы выбрали полиномы Эрмита третьего порядка.

Замечание. Предложенный способ решения не позволяет получать модели, относящиеся к строго температурному режиму нагревания или к режиму нагревания с одним только тепловым потоком ($h \to \infty$ и $h = 0$ соответственно). Однако этот недостаток не является существенным, так как в реальных условиях такие режимы обеспечить крайне сложно. Тем не менее, варьирование значения коэффициента теплоотдачи в описанном методе позволяет моделировать существенный вклад того или иного режима нагревания.■

На рис. 8 изображены графики $R(t)$ и $T(r,t)$ для значений R_{in}, R_{out}, h и прочих характеристик, определенных в предыдущем разделе. Режим нагревания считаем конвективным. Как показал численный эксперимент, граница раздела фаз достигнет внешней стенки цилиндра за 116263 с.

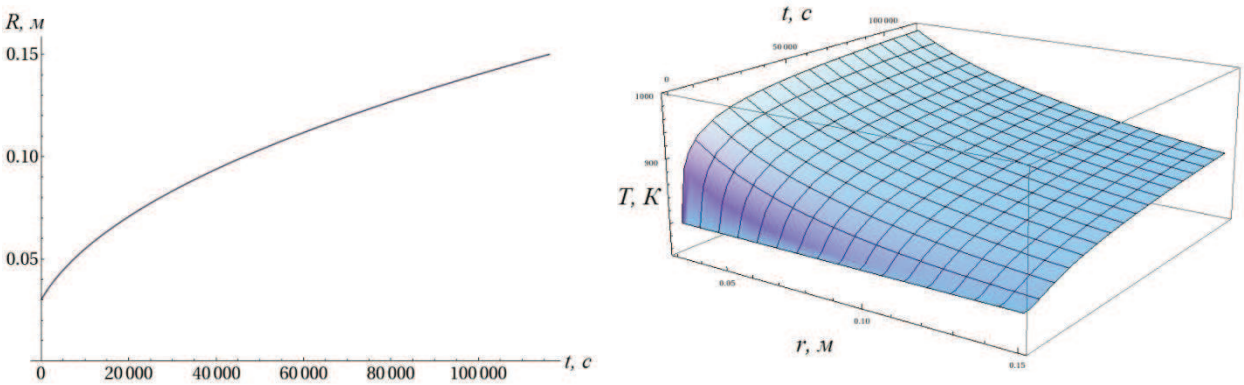

Рис. 8. Графики при конвективном теплообмене: зависимости $R(t)$ (слева) и $T(r,t)$ (справа)

На рис. 9 изображены аналогичные графики для температурного режима нагревания. Значение коэффициента β принято равным нулю, чтобы исключить влияние теплового потока. Коэффициент теплоотдачи принят равным 1000 кВт/(м$^2 \cdot$ К). В этом случае граница раздела фаз достигнет внешней стенки за 30062 с.

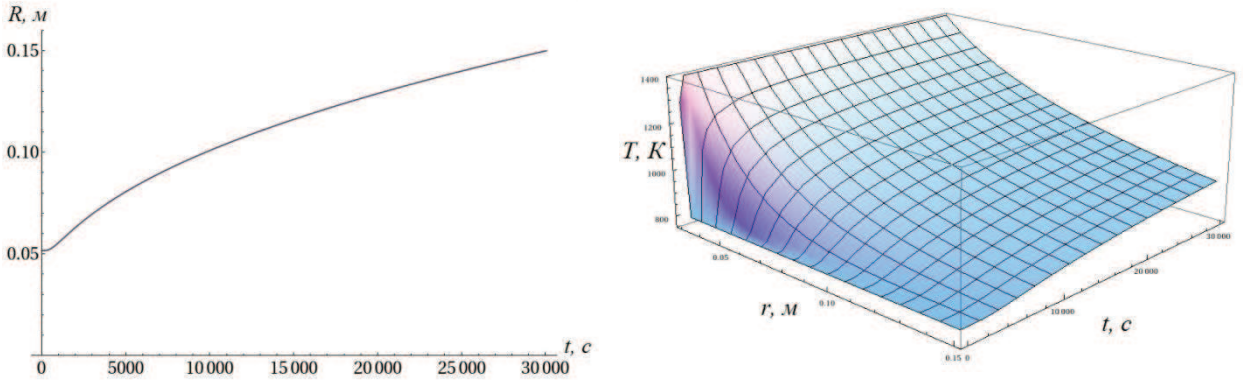

Рис. 9. Графики при температурном режиме нагревания: зависимости $R(t)$ (слева) и $T(r,t)$ (справа)

Графики на рис. 10 относятся к случаю теплового потока $q_L = 10$ Вт/м^2. Коэффициент теплоотдачи принят равным 10^{-7} кВт/(м$^2 \cdot$ К). Граница раздела фаз достигнет внешней стенки цилиндра за 49538 с.

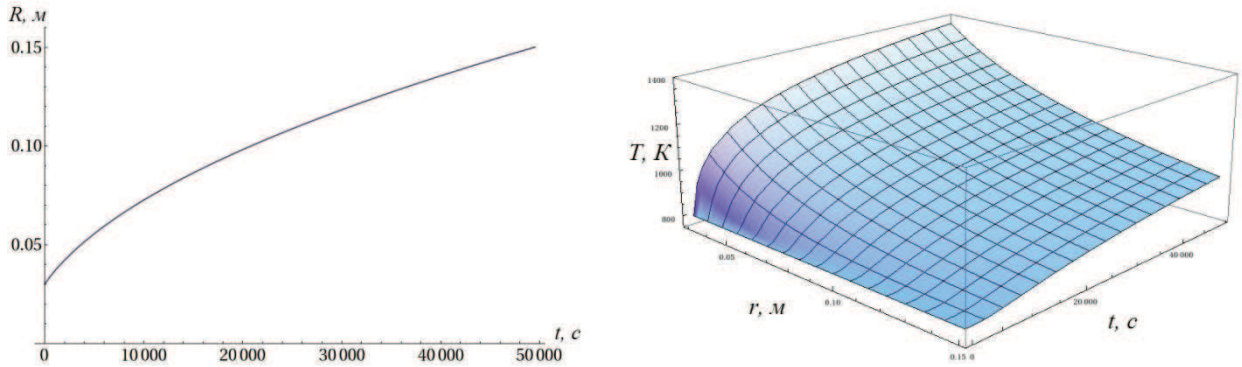

Рис. 10. Графики в условиях теплового потока: зависимости $R(t)$ (слева) и $T(r,t)$ (справа)

Одним из достоинств описанного метода является возможность задания режима нагревания смешанного типа. На рис. 11 приведены графики, аналогичные показанным выше, при $h = 0.0074$ кВт/(м$^2 \cdot$ К), $\beta = 1$ и $q_L = 10$ Вт/м^2 (значения остальных параметров сохранены). Граница раздела фаз достигнет внешней стенки цилиндра за 43825 с.

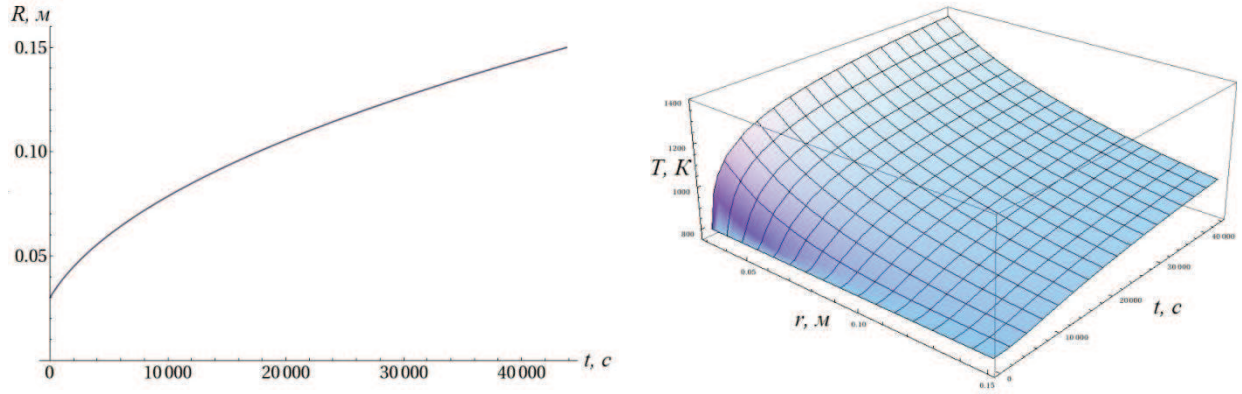

Рис. 11. Графики при смешанном режиме нагревания: зависимости $R(t)$ (слева) и $T(r,t)$ (справа)

Заключение

Несмотря на стремление к получению наиболее точного решения поставленной задачи при минимальном наличии аппроксимаций физических явлений, на начальном этапе исследования были приняты допущения, некоторые из которых являются достаточно грубыми. В будущем планируется перейти к рассмотрению задачи типа двухфазной задачи Стефана и учесть различие значений характеристик плавкого материала в жидкой и твердой фазе. Кроме того, в данной работе тепловой контакт между теплоносителем и материалом, заключенным в цилиндре, считается идеальным. На самом же деле при расчете указанной технической системы рекомендуется учесть теплофизические свойства трубок, в которых движется теплоноситель.

Данная статья является частью дипломной работы автора, в которой планируется рассмотреть случай наличия нескольких трубок с теплоносителем. Поскольку рассматриваемый накопитель расположен вертикально, расплавленная масса будет оседать. По этой причине возникает задача о движении сильно нагретой жидкости в кольцевом зазоре непостоянной ширины (одна трубка с теплоносителем) или в зазоре сложной формы (несколько трубок с теплоносителем), которая также может быть рассмотрена в рамках данного исследования.

Список литературы

1. Борнацкий И.И. Основы физической химии. Издание 2. М.: Металлургия, 1971. 344 с.
2. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
3. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации: пер. с англ. / Ю. Люк. М.: Мир, 1980. 608 с.
4. Теплофизические характеристики пищевых продуктов. Справочник. / Гинзбург А.С. [и др.] М.: Пищевая промышленность, 1980. 288 с.
5. Al-Abidi A., Sohif Bin Mat, Sopian K., Sulaiman M.Y., Lim C.H., Abdulrahman Th. Mohammad. Review on thermal energy storage for air conditioning systems // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2012. - №16. – P. 5802-5819
6. Alexiades V., Solomon A.D. Mathematical modeling of melting and freezing processes. – USA: Hemisphere Publishing Corporation, 1993. – 336 p.
7. Bauer T. Approximate analytical solutions for the solidification of PCMs in fin geometries using effective thermophysical properties // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2011. – №54. – P. 4923-4930
8. Incropera F.P., DeWitt D.P. Fundamentals of heat and mass transfer. 4th edition. – Wiley, 1996. – 886 p.
9. Manish K. Rathod, Jyotirmay Banerjee. Numerical investigation on latent heat storage unit of different configurations // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2011. – №51. – P. 813-818
10. Poling B.E. Perry's chemical engineers' handbook. 8th edition. / Poling B.E., Thomson G.H., Friend D.G., Rowley R.L., Wilding W.V. – USA: McGraw-Hill, 2008. – 521 p.

11. Sharma A., Tyagi V.V., Chen C.R., Buddhi D. Review on thermal energy storage with phase change materials and applications // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2009. – №13. – P. 318-345