электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

**УДК 519.632.4**

# Особенности моделировании обтекания профиля методом LS-STAG

**В.В. Пузикова**

*Студентка, кафедра «Прикладная математика»*
*МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

*Научный руководитель: Марчевский И.К., к.ф.-м.н., доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

МГТУ им. Н.Э. Баумана
valeria.puzikova@gmail.com

## Введение

В последнее время уделяется много внимания распространению методов расчёта течений на прямоугольных сетках на случаи областей сложной формы при помощи методов погруженных границ. В этих методах граница области течения не связывается с расчётной сеткой, и наиболее важным вопросом является работа с усечёнными ячейками, т. е. ячейками неправильной формы, которые образуются при пересечении прямоугольных ячеек с границей области течения, поскольку решающую роль для точности и устойчивости расчёта играет дискретизация уравнений именно в этих ячейках. Кроме того, дискретизация уравнений в усечённых ячейках должна строиться таким образом, чтобы сохранялась высокая вычислительная эффективность решателя на структурированных сетках.

Методы погруженных границ могут быть разделены на два основных класса в зависимости от способа работы с усечёнными ячейками. В классических методах погруженных границ [1] используют конечно-объёмные или конечно-разностные методы построения разностных аналогов исходных дифференциальных уравнений на структурированных сетках с прямоугольными ячейками вне нерегулярных границ, а на

усеченных ячейках дискретизация уравнений не производится. Вместо этого используются специальные методы интерполяции, которые позволяют получить на этих ячейках значения переменных, описывающих течение. Таким образом, выполнения балансовых соотношений вблизи нерегулярной границы добиться не удаётся. Наиболее серьёзным проявлением этих недостатков является возникновение бездивергентных паразитных скоростей или нефизичных осцилляций давления вблизи погруженной границы [2]. Для повышения точности и устойчивости этого класса методов погруженных границ предлагаются различные улучшенные схемы интерполяции [3].

Второй класс методов погруженных границ (также называемых методами усечённых ячеек или просто методами прямоугольных сеток [4]) предполагает фактическую дискретизацию уравнений движения в усечённых ячейках. Она обычно осуществляется при помощи специального подхода, больше похожего не на методы работы с прямоугольными сетками, а на методы, применяемые при работе с криволинейными или неструктурированными сетками. Наиболее известными являются методы объединения ячеек [5], в которых усечённые ячейки объединяются с соседними прямоугольными ячейками и образуют новую многоугольную ячейку с более чем четырьмя соседями. Таким образом, шаблон дискретизации на такой вновь созданной ячейке теряет пятиточечную структуру (в двумерном случае), необходимую для методов прямоугольных сеток. Такие подходы к работе с усечёнными ячейками вызывают ряд особенностей дискретизации уравнений движения и их решения, к тому же трудно оценить их влияние на вычислительную сложность всего процесса моделирования течения.

На сегодняшний день одним из наиболее эффективных методов погруженных границ представляется метод LS-STAG. Метод предложен в статье [6] как развитие MAC-метода (метода маркеров и ячеек [7]) и обладает, как показывают вычислительные эксперименты, вторым порядком точности. Явное представление погруженной границы достигается путём использования знакопеременной функции расстояния (функции уровня [8]) для её явного представления. Использование функций уровня позволяет легко вычислять все необходимые геометрические характеристики ячеек сетки. При таком подходе затраты машинного времени на обработку ячеек сложной формы уменьшаются.

В отличие от классических методов погруженных границ, описывающие течение величины непосредственно вычисляются в усечённых ячейках, а не интерполируются. Более того, метод LS-STAG позволяет дискретизировать потоки в прямоугольных и усечённых ячейках единообразно: нет необходимости в получении специальных формул

для усечённых ячеек, которые были бы полностью отличными от формул базовой MAC-дискретизации на прямоугольных ячейках. В основу построения LS-STAG-дискретизации положены численные аналоги законов сохранения полной массы, импульса и кинетической энергии во всей области течения, что является определяющим для получения физически правдоподобного численного решения [9]. Для достижения этих консервативных свойств на усечённых ячейках, в глобальных законах сохранения были корректно учтены условия на погруженных границах, как в непрерывном, так и в дискретном виде. С учётом этих требований конвективные и вязкие потоки, а также градиент давления определяются однозначно.

LS-STAG-дискретизация позволят сохранить пятиточечную структуру шаблона MAC-метода. Это даёт возможность использовать эффективные методы предобуславливания [10] для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами без построения специальных модификаций для учёта погруженных границ.

В данной работе построена LS-STAG-дискретизация для моделирования обтекания различных профилей потоком вязкой несжимаемой среды.

**Постановка задачи**

Рассмотрим внешнее обтекание профиля с характерным размером $\overline{D}$ и границей $K$ равномерным потоком вязкой несжимаемой среды постоянной плотности $\overline{\rho}$ (здесь и далее: $\overline{A}$ – размерная физическая величина, $A$ – соответствующая ей безразмерная комбинация) в расчётной области $\Omega$ (рис. 1) с внешней границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

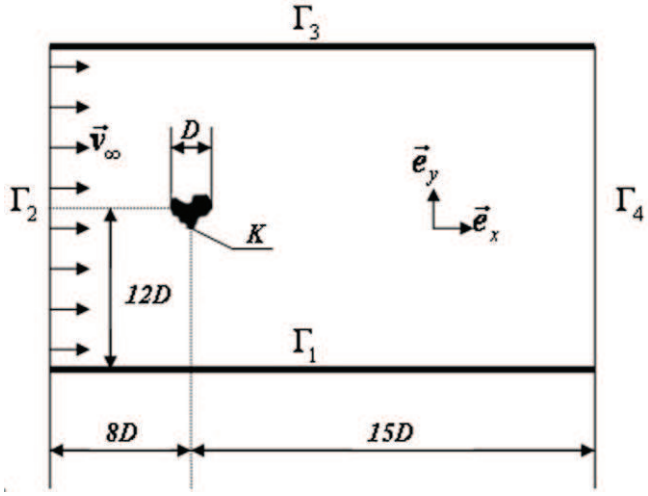


Рис. 1. Расчётная область

Математическая постановка задачи в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \nabla p - \nu \Delta \vec{v} = 0, \\ \vec{v}(x, y, 0) = \vec{v}_0(x, y), \\ \vec{v}\,|_{\Gamma \setminus \Gamma_4} = \vec{V}_\infty, \vec{v}\,|_K = \vec{v}^{ib}, \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_4} = \vec{0}, \dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma \cup K} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x, y$ – безразмерные координаты ($x = \bar{x}/\bar{D}$, $y = \bar{y}/\bar{D}$, $D = 1$), $t = \bar{t}\,\bar{V}_\infty/\bar{D}$ – безразмерное время, $p = \bar{p}/(\bar{\rho}\,\bar{V}_\infty^2) = p(x, y, t)$ – безразмерное давление, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, t) = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_y$ – безразмерная скорость (в качестве характерной скорости выбираем скорость набегающего потока: $u = \bar{u}/\bar{V}_\infty$, $v = \bar{v}/\bar{V}_\infty$, $V_\infty = \bar{V}_\infty/\bar{V}_\infty = 1$), $\nu = 1/\mathrm{Re}$ – безразмерный коэффициент кинематической вязкости, $\mathrm{Re} = \bar{V}_\infty \bar{D}/\bar{\nu}$ – число Рейнольдса, $\vec{n}$ – внешняя нормаль.

**MAC-сетка для области прямоугольной формы**

При построении LS-STAG-дискретизации будем использовать интегральную формулировку задачи (1). Пусть $\Omega^*$ – некоторая ячейка сетки, $\Gamma^*$ – ее граница. Тогда можно переписать в интегральной форме уравнение неразрывности

$$\int_{\Gamma^*} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = 0 \tag{2}$$

и уравнение импульса в проекциях на оси $Ox$ и $Oy$ соответственно

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega^*} u\, dV + \int_{\Gamma^*} (\vec{v} \cdot \vec{n}) u\, dS + \int_{\Gamma^*} p\vec{e}_x \cdot \vec{n}\, dS - \int_{\Gamma^*} \nu \nabla u \cdot \vec{n}\, dS = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega^*} v\, dV + \int_{\Gamma^*} (\vec{v} \cdot \vec{n}) v\, dS + \int_{\Gamma^*} p\vec{e}_y \cdot \vec{n}\, dS - \int_{\Gamma^*} \nu \nabla v \cdot \vec{n}\, dS = 0. \tag{4}$$

Прямоугольная расчётная область $\Omega$ делится на прямоугольные ячейки $\Omega_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$ с объёмами $V_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j$ и центрами $\vec{x}^c_{i,j} = (x^c_i, y^c_j)$. Граница $\Gamma_{i,j}$ ячейки $\Omega_{i,j}$ разбивается на четыре элементарные грани: $\Gamma_{i,j} = \Gamma^e_{i,j} \cup \Gamma^w_{i,j} \cup \Gamma^n_{i,j} \cup \Gamma^s_{i,j}$ (используются обозначения сторон света: $e$ – восток, $w$ – запад, $n$ – север, $s$ – юг). $\Omega_{i,j}$ является контрольным объёмом, который используется

для дискретизации уравнения неразрывности (2), а $\Omega^u_{i,j} = (x^c_i, x^c_{i+1}) \times (y_{j-1}, y_j)$ и $\Omega^v_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y^c_j, y^c_{j+1})$ – контрольными объёмами для уравнений импульса (3) и (4) соответственно. Положения точек, в которых вычисляются неизвестные величины показаны на рис. 2.

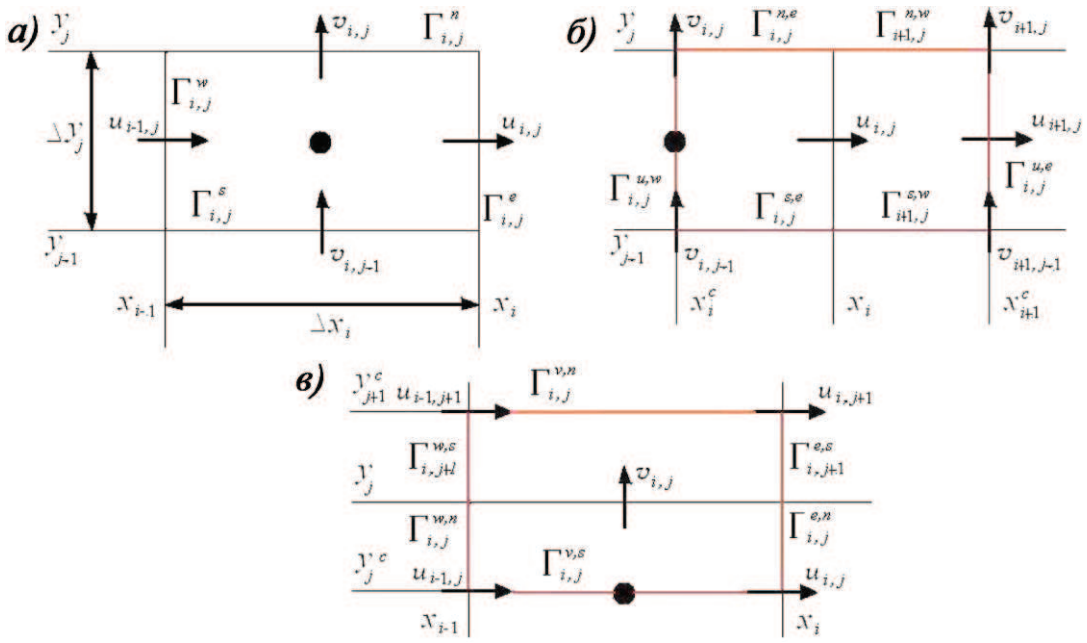


Рис. 2. Контрольные объёмы, используемые в MAC-методе: а) $\Omega_{i,j}$; б) $\Omega^u_{i,j}$; в) $\Omega^v_{i,j}$

**LS-STAG-сетка для области с погруженной границей**

Рассмотрим твёрдое тело нерегулярной формы $\Omega^{ib}$, помещённое в расчётную область $\Omega$, так что $\Omega^f = \Omega \setminus \{\Omega^{ib} \cup \Gamma^{ib}\}$ является областью, занятой жидкостью. Для описания положения нерегулярной границы $\Gamma^{ib}$ введём знакопеременную функцию расстояния $\varphi(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y)$, равную нулю на $\Gamma^{ib}$, принимающую отрицательные значения в $\Omega^f$ и положительные – в $\Omega^{ib}$. Это приводит к LS-STAG-сетке – модификации MAC-сетки, которая показана на рис. 3. В каждой усечённой ячейке $\Omega_{i,j}$ погруженная граница представляется отрезком прямой, положения концов которого определяются линейной интерполяцией величины $\varphi_{k,s}$, которая принимает значение функции уровня $\varphi(x_k, y_s)$ в правом верхнем углу соответствующей ячейки $\Omega_{k,s}$.

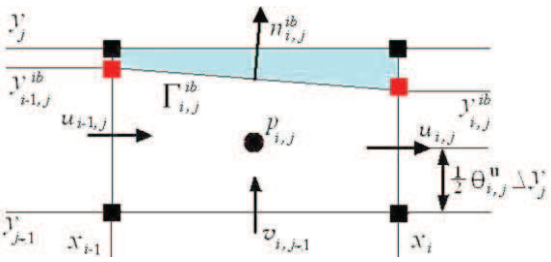

Рис. 3. Усечённая ячейка $\Omega_{i,j}$ LS-STAG-сетки

Используем обозначения граней усечённых ячеек, аналогичные тем, что применялись для прямоугольных ячеек, например, для ячейки $\Omega_{i,j}$ на рис. 3 $\Gamma_{i,j} = \Gamma^{e}_{i,j} \cup \Gamma^{w}_{i,j} \cup \Gamma^{s}_{i,j} \cup \Gamma^{ib}_{i,j}$, где через $\Gamma^{ib}_{i,j}$ обозначена северная твёрдая грань усечённой ячейки. На рис. 3 точка вычисления давления $p_{i,j}$ расположена на пересечении линий, содержащих точки вычисления скоростей. Такое положение выбрано исключительно для наглядности и не будет использовано при дискретизации уравнений: давление аппроксимируется кусочно-постоянной функцией на каждой усечённой ячейке, и поэтому точно указывать положение данной точки на усечённой ячейке не требуется.

Для определения типа усечённых ячеек введём коэффициенты заполнения ячеек $\vartheta^{u}_{i,j}$ и $\vartheta^{v}_{i,j}$, которые принимают значения из отрезка $[0;1]$ и показывают часть ячейки, занятую жидкостью на гранях $\Gamma^{e}_{i,j}$ и $\Gamma^{n}_{i,j}$ соответственно. Определим их, используя одномерную линейную интерполяцию функций $\varphi(x_i, y)$ на отрезке $[y_{j-1}, y_j]$ и $\varphi(x, y_j)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\vartheta^{u}_{i,j} = \frac{\min(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j})}{\min(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j}) - \max(\varphi_{i,j-1}, \varphi_{i,j})}, \quad \vartheta^{v}_{i,j} = \frac{\min(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j})}{\min(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j}) - \max(\varphi_{i-1,j}, \varphi_{i,j})}.$$

В двумерном случае усечённые ячейки можно разделить на трапециевидные, пятиугольные и треугольные (примеры ячеек каждого типа изображены на рис. 4).

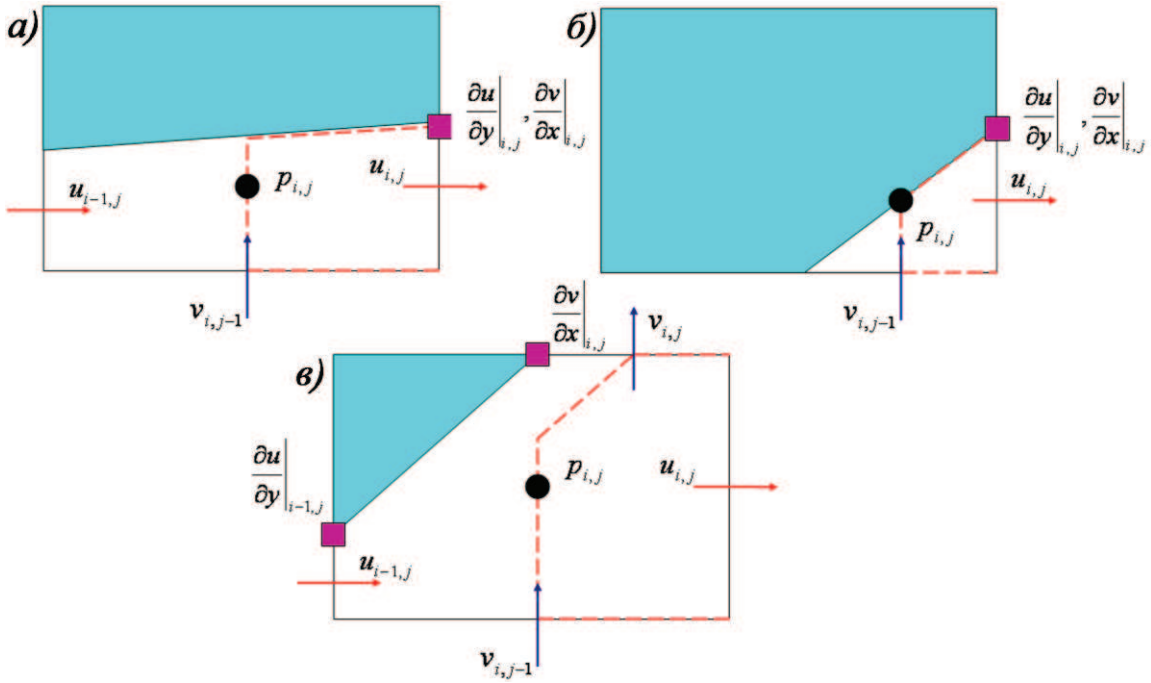


Рис. 4. Примеры усечённых ячеек: *а)* северная трапеция; *б)* северо-западный треугольник; *в)* северо-западный пятиугольник

**LS-STAG-дискретизация уравнения неразрывности**

Для любой ячейки $\Omega_{i,j}$ обозначим её грани $\Gamma_{i,j} = \Gamma^e_{i,j} \cup \Gamma^w_{i,j} \cup \Gamma^s_{i,j} \cup \Gamma^n_{i,j} \cup \Gamma^{ib}_{i,j}$ и выделим в уравнении неразрывности отдельные потоки массы через эти грани:

$$\dot{m}^{i,j} = \bar{u}_{i-1,j} - \bar{u}_{i,j} + \bar{v}_{i,j-1} - \bar{v}_{i,j} - \overline{U}^{ib}_{i,j} = 0.$$

Здесь

$\overline{U}^{ib}_{i,j} = \int\limits_{\Gamma^{ib}_{i,j}} \vec{v}^{ib} \cdot \vec{n}^{ib}_{i,j}\, dS \approx u^{ib}_{i,j}[n_x \Delta S]^{ib}_{i,j} + v^{ib}_{i,j}[n_y \Delta S]^{ib}_{i,j}$, где $[n_x \Delta S]^{ib}_{i,j} = (\vartheta^u_{i-1,j} - \vartheta^u_{i,j})\Delta y_j$,

$[n_y \Delta S]^{ib}_{i,j} = (\vartheta^v_{i,j-1} - \vartheta^v_{i,j})\Delta x_i$, $\vec{n}^{ib}_{i,j}$ – внешняя нормаль к усечённой ячейке, скорость $\vec{v}^{ib}$ на погруженной границе предполагается известной из граничных условий. Потоки через остальные грани получаем при помощи квадратурной формулы центральных прямоугольников. Тогда дискретный аналог уравнения неразрывности принимает вид

$$\dot{m}^{i,j} = \Delta y_j(\vartheta^u_{i-1,j} u_{i-1,j} - \vartheta^u_{i,j} u_{i,j}) + \Delta x_i(\vartheta^v_{i,j-1} v_{i,j-1} - \vartheta^v_{i,j} v_{i,j}) - \overline{U}^{ib}_{i,j} = 0.$$

Далее будем записывать дискретный аналог уравнения неразрывности в матричной форме:

$$DU + \overline{U}^{ib} = 0 \Leftrightarrow D^x u + D^y v + \overline{U}^{ib} = 0. \qquad (5)$$

Здесь матрицы $D^x$ и $D^y$ строятся по следующим шаблонам ($i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,M}$):

$$D_P^x(i,j)=\vartheta_{i,j}^u\Delta y_j,\ D_W^x(i,j)=-\vartheta_{i-1,j}^u\Delta y_j,\ D_P^y(i,j)=\vartheta_{i,j}^v\Delta x_i,\ D_S^y(i,j)=-\vartheta_{i,j-1}^v\Delta x_i.$$

Отметим, что здесь в строке с номером $(i,j)$ элемент с индексом $P$ стоит на диагонали, элемент с индексом $W$ находится в столбце с номером, равным номеру контрольного объёма, граничащего с $\Omega_{i,j}$ с запада, с индексом $S$ – с юга.

**LS-STAG-дискретизация уравнений импульса**

Уравнения импульса (3), (4) после дискретизации имеют следующий матричный вид:

$$\frac{d}{dt}(M^x u)+C^x[\bar{u}]u+G^x P-\nu K^x u+S_x^{ib,c}-\nu S_x^{ib,\nu}=0, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}(M^y v)+C^y[\bar{v}]v+G^y P-\nu K^y v+S_y^{ib,c}-\nu S_y^{ib,\nu}=0. \tag{7}$$

Здесь матрицы $C^x[\bar{u}]$ и $C^y[\bar{v}]$ задают численные аналоги конвективных потоков, $K^x$ и $K^y$ описывают вязкую диффузию, $G^x=(D^x)^T$ и $G^y=(D^y)^T$, $M^x$ и $M^y$ – матрицы с элементами $M_P^x(i,j)=\frac{1}{2}V_{i,j}+\frac{1}{2}V_{i+1,j}$ и $M_P^y(i,j)=\frac{1}{2}V_{i,j}+\frac{1}{2}V_{i,j+1}$, вектор $P$ – давление в ячейках, векторы $S_x^{ib,c}$, $S_x^{ib,\nu}$, $S_y^{ib,c}$, $S_y^{ib,\nu}$ – значения источниковых членов, возникающих в силу граничных условий из конвективных и вязких членов соответственно. Элементы матриц конвективных потоков вычисляются по формулам

$$C^x[\bar{U}]_P(i,j)=\frac{1}{4}\dot{m}^{i,j}+\frac{1}{4}\dot{m}^{i+1,j}\equiv 0,\quad i=\overline{1,N-1},\ j=\overline{1,M},$$

$$C^x[\bar{U}]_E(i,j)=\frac{1}{4}\bar{u}_{i,j}+\frac{1}{4}\bar{u}_{i+1,j},\qquad C^x[\bar{U}]_W(i,j)=-\frac{1}{4}\bar{u}_{i-1,j}-\frac{1}{4}\bar{u}_{i,j},$$

$$C^x[\bar{U}]_N(i,j)=\frac{1}{4}\bar{v}_{i,j}+\frac{1}{4}\bar{v}_{i+1,j},\qquad C^x[\bar{U}]_S(i,j)=-\frac{1}{4}\bar{v}_{i,j-1}-\frac{1}{4}\bar{v}_{i+1,j-1},$$

$$C^y[\bar{U}]_P(i,j)=\frac{1}{4}\dot{m}^{i,j}+\frac{1}{4}\dot{m}^{i,j+1}\equiv 0,\quad i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M-1},$$

$$C^y[\bar{U}]_E(i,j)=\frac{1}{4}\bar{u}_{i,j}+\frac{1}{4}\bar{u}_{i,j+1},\qquad C^y[\bar{U}]_W(i,j)=-\frac{1}{4}\bar{u}_{i-1,j}-\frac{1}{4}\bar{u}_{i-1,j+1},$$

$$C^y[\bar{U}]_N(i,j)=\frac{1}{4}\bar{v}_{i,j}+\frac{1}{4}\bar{v}_{i,j+1},\qquad C^y[\bar{U}]_S(i,j)=-\frac{1}{4}\bar{v}_{i,j-1}-\frac{1}{4}\bar{v}_{i,j}.$$

Отметим, матрицы $C^x[\bar{u}]$ и $C^y[\bar{v}]$ кососимметричны.

Дискретизацию вязких членов на усечённых ячейках необходимо проводить так, чтобы сохранить пятиточечную структуру шаблона MAC-метода. Прежде всего необходимо сделать различие между дискретизацией потоков нормальных и касательных напряжений. Положение точек их вычисления для различных типов усечённых ячеек показано на рис. 4. Для нормальных напряжений учитываем, что эти слагаемые с математической точки зрения аналогичны давлению. Следовательно, их представление должно быть согласовано с дискретизацией давления: будем считать, что нормальные напряжения принимают постоянные значения в усечённых ячейках и не требуется точно указывать точку их вычисления внутри усечённой ячейки, поэтому поток нормальных напряжений должен дискретизироваться при помощи выражения, аналогичного формуле для градиента давления. Слагаемые с касательными напряжениями дискретизируются при помощи квадратурной формулы центральных прямоугольников с учётом типа усечённой ячейки.

**Интегрирование по времени и решение СЛАУ**

Интегрирование по времени получающейся после дискретизации по пространству дифференциально-алгебраической системы (5), (6) и (7) производится с помощью полунеявного метода, основанного на схеме типа Адамса-Башфорта второго порядка с дифференцированием назад (AB/BDF 2). Шаг предиктора приводит к решению разностного аналога уравнения Гельмгольца для $\widetilde{U}$

$$M\frac{3\widetilde{U}-4U^{n}+U^{n-1}}{2\Delta t}+2(C[\overline{U}^{n}]U^{n}+S^{ib,c,n})-C[\overline{U}^{n-1}]U^{n-1}-S^{ib,c,n-1}-D^{T}P^{n}-\nu K\widetilde{U}-\nu S^{ib,\nu}=0,$$

где $\widetilde{U}$ – это прогноз скорости в момент времени $t_{n+1}=(n+1)\Delta t$. Шаг корректора

$$\frac{3}{2}M\frac{U^{n+1}-\widetilde{U}}{\Delta t}-D^{T}(P^{n+1}-P^{n})=0,\qquad DU^{n+1}+\overline{U}^{ib,n+1}=0$$

приводит к решению разностного аналога уравнения Пуассона для функции давления $\Phi=\dfrac{2\Delta t(P^{n+1}-P^{n})}{3}$: $A\Phi=D\widetilde{U}+\overline{U}^{ib,n+1}$, где

$$A=-D^{x}(M^{x})^{-1}(D^{x})^{T}-D^{y}(M^{y})^{-1}(D^{y})^{T}.$$

Затем определяются скорости и давление в момент времени $t_{n+1}$ по следующим формулам:

$$U^{n+1}=\widetilde{U}+M^{-1}D^{T}\Phi,\qquad P^{n+1}=\frac{3}{2\Delta t}\Phi+P^{n}.$$

**Заключение**

Построена LS-STAG-дискретизация уравнений импульса и неразрывности для всех возможных типов усечённых ячеек в двумерном случае, при которой выполняются дискретные аналоги законов сохранения полной массы, импульса и, в случае отсутствия вязкости, кинетической энергии. Для верификации метода проведено численное моделирование обтекания неподвижных профилей различный форм [11]. Полученные в результате моделирования безразмерные стационарные аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъёмной силы сравнивались с многочисленными экспериментальными и расчётными данными. Результаты, полученные методом LS-STAG даже на сравнительно грубых сетках, хорошо согласуются с известными в литературе результатами.

**Список литературы**


1. Fadlun E.A., Verzicco R., Orlandi P., Mohd-Yusof J. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations // J. Comput. Phys. 2000. № 161. P. 35-60.
2. Muldoon F., Acharya S. A divergence-free interpolation scheme for the immersed boundary method // Int. J. Numer. Method Fluid. 2008. № 56. P. 1845-1884.
3. Peller N., Le Duc A., Tremblay F., Manhart M. High-order stable interpolations for immersed boundary methods // Int. J. Numer. Method Fluid. 2006. № 52. P. 1175-1193.
4. Ye T., Mittal R., Udaykumar H.S., Shyy W. An accurate Cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries // J. Comput. Phys. 1999. № 156. P. 209-240.
5. Chung M.H. Cartesian cut cell approach for simulating incomressible flows with rigid bodies of arbitrary shape // Comput. Fluid. 2006. № 35. P. 607-623.
6. Cheny Y., Botella O. The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties // J. Comput. Phys. 2010. № 229. P. 1043-1076.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.
8. Osher S., Fedkiw R.P. Level set methods and dynamic implicit surfaces. N. Y.: Springer, 2003. 273 p.
9. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Part I // J. Comput. Phys. 1996. № 1. P. 119-143.

10. Пузикова В.В. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом BiCGStab с предобуславливанием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2011. Спец. выпуск «Прикладная математика». С. 124-133.
11. Пузикова В.В. Построение функции уровня для профиля произвольной формы при моделировании его обтекания методом LS-STAG // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. 2012. Спец. выпуск № 2 «Математическое моделирование в технике». С. 163–173.