электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 519.688

Использование графических ускорителей для моделирования эволюции завихренности методом вихревых элементов

С.Р. Гречкин-Погребняков

Студент, кафедра «Прикладная математика»
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

Научный руководитель: Марчевский И.К., к.ф.-м.н., доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

МГТУ им. Н.Э. Баумана
grek151@gmail.com

Введение

Численное решение большинства задач требует значительных временных затрат, связанных с пошаговым характером решения дифференциальных уравнений, и чем более точное и полное решение требуется получить, тем больший объём вычислений обычно приходится выполнять. Есть несколько путей решения этой проблемы, один из которых – использование возможностей графических процессоров. Эффективность данного пути рассмотрена на примере задачи о моделировании плоского движения вязкой несжимаемой жидкости в неограниченном пространстве методом вихревых элементов.

Постановка задачи

Рассматривается двумерное течение безграничного объема вязкой несжимаемой жидкости с постоянной плотностью $\rho = \mathrm{const}$. Требуется определить скорости точек среды в любой момент времени. Движение среды в данном случае описывается уравнением неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \tag{1}$$

и уравнениями Навье – Стокса, записанными в проекциях на оси неподвижной декартовой системы координат Oxy

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta V_x\,,$$
$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta V_y\,. \qquad (2)$$

Здесь $\vec{V} = \vec{V}(x, y, t)$ – скорость точки среды с координатами (x, y) в момент времени t, $p = p\,(x, y, t)$ – давление в этой точке, $\nu = \mathrm{const}$ – коэффициент кинематической вязкости, ρ – плотность среды, Δ – оператор Лапласа. Полагаем, что начальное распределение скоростей $\vec{V}|_{t=0} = \vec{V}_0$ и параметры невозмущенного потока на бесконечности $\vec{V}_\infty = \mathrm{const}$, $p_\infty = \mathrm{const}$, известны. С использованием векторного оператора Гамильтона ∇ уравнения (1), (2) имеют вид:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0\,, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \Delta \vec{V}\,. \qquad (4)$$

Решение задачи методом вихревых элементов

Для решения поставленной задачи был использован вихревой метод. Можно показать, что [1]

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{V}^2) - \vec{V} \times \vec{\Omega}\,,$$

где $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$ – завихренность. Тогда уравнение (4) запишется в виде

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{V} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\vec{V}^2}{2}\right) + \nu \Delta \vec{V}\,. \qquad (5)$$

Применим операцию ротора к обеим частям уравнения (5):

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{V}) = \nu \nabla \times \Delta \vec{V}\,,$$

или

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{V}) = \nu \Delta \vec{\Omega}\,, \qquad (6)$$

здесь $\nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{V}) = \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{\Omega}$ [1], так как в рассматриваемой задаче $\vec{V}$ лежит в одной плоскости, т.е. $\vec{V} \perp \vec{\Omega}$. Учитывая, что

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{\Omega} = \left.\frac{D\vec{\Omega}}{Dt}\right|_{\vec{V}}\,,$$

где $\frac{D\vec{\Omega}}{Dt}|_{\vec{V}}$ — субстанциональная (материальная) производная, получим довольно простой

вид уравнения (4):

$$\left.\frac{D\vec{\Omega}}{Dt}\right|_{\vec{V}} = \nu\Delta\vec{\Omega}\,. \tag{7}$$

Однако для численного решения запись исходного уравнения в виде (7) неудобна. Поэтому запишем уравнение Навье – Стокса в форме Гельмгольца. Для этого в уравнении (6) учтём, что $\Delta\vec{\Omega} = -\nabla\times(\nabla\times\vec{\Omega})$, и получим

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} = \nabla\times(\vec{V}\times\vec{\Omega} - \nu\,\nabla\times\,\vec{\Omega})\,. \tag{8}$$

Можно показать, что для двумерных течений

$$\nabla\times\vec{\Omega} = \frac{[\vec{\Omega}\times(\nabla\times\vec{\Omega})]\times\vec{\Omega}}{\vec{\Omega}^2},$$

тогда, совершив тождественные преобразования, получим

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla\times\left(\vec{\Omega}\times[\vec{V}+\vec{W}]\right) = 0\,, \tag{9}$$

где $\vec{W} = -\nu\frac{\vec{\Omega}\times(\nabla\times\vec{\Omega})}{\vec{\Omega}^2}$ – диффузионная скорость [2]. Обозначив $\vec{V}+\vec{W} = \vec{U}$, получим, что если рассматриваемая точка движется со скоростью $\vec{U}$, то

$$\left.\frac{D\vec{\Omega}}{Dt}\right|_{\vec{U}} = 0\,,$$

т.е. завихренность в этой точке не меняется. Можно сказать, что завихренность движется со скоростью $\vec{U}$.

В поставленной задаче область, занятая завихренностью, была разделена на участки примерно равной площади и суммарная завихренность на каждом участке «стягивалась» в центр этого участка, при этом фактически рассматривалось распределение завихренности

$$\Omega = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\,, \tag{10}$$

где $\Gamma_i = \iint_{S_i}\Omega\,(\vec{\xi})dS_\xi$, $\vec{r}_i$ – радиус-вектор центра i-го участка. Распределение завихренности, соответствующее каждому слагаемому этой суммы, называется вихревым элементом (ВЭ). Соответственно, каждый ВЭ характеризуется интенсивностью Γ_i (циркуляцией) и радиус-вектором $\vec{r}_i$.

Рассмотрим сначала движение невязкой жидкости, т.е. случай $\nu = 0$. Тогда уравнение (7) имеет вид

$$\left.\frac{D\vec{\Omega}}{Dt}\right|_{\vec{V}} = 0\,. \tag{11}$$

Получается, что новой завихренности в рассматриваемой области не образуется, а происходит движение существующих ВЭ со скоростью среды $\vec{V}$.

В соответствии с теоремой Гельмгольца о разложении векторных полей [3], полная скорость течения в любой точке будет вычисляться как сумма

$$\vec{V}(x,y,t) = \vec{V}_{\Omega}(x,y,t) + \vec{V}_{\infty}, \tag{12}$$

где $\vec{V}_{\infty}$ – скорость потока на бесконечности, известная из постановки задачи, $\vec{V}_{\Omega}$ – скорость, индуцируемая завихренностью, которую можно найти из известного распределения завихренности с помощью закона Био – Савара:

$$\vec{V}_{\Omega}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S} \frac{\vec{\Omega}(\vec{\xi},t)\times(\vec{r}-\vec{\xi})}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|^2}\,dS_{\xi}\,. \tag{13}$$

Учитывая, что рассматривается плоская задача, $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$, можно записать

$$\vec{V}_{\Omega}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S} \Omega\,(\vec{\xi},t)\,\frac{\vec{k}\times(\vec{r}-\vec{\xi})}{\left|\vec{r}-\vec{\xi}\right|^2}\,dS_{\xi}\,. \tag{14}$$

Таким образом, с учётом (10)

$$\vec{V}(\vec{r},t) = \vec{V}_{\infty} + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i\,\frac{\vec{k}\times(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}. \tag{15}$$

Однако каждое слагаемое этой суммы неограниченно возрастает по модулю в окрестности точки $\vec{r}_i$. Во избежание этого, при $|\vec{r}-\vec{r}_i| < \varepsilon$, в формуле (15) деление на $|\vec{r}-\vec{r}_i|^2$ заменим делением на ε^2 [4], где ε – так называемый радиус ВЭ.

В случае вязкой жидкости необходимо учитывать диффузионную скорость

$$\vec{W} = -\nu\,\frac{\vec{\Omega}\times(\nabla\times\vec{\Omega})}{\vec{\Omega}^2},$$

или, с учётом того, что $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$,

$$\vec{W} = -\nu\,\frac{\nabla\Omega}{\Omega}. \tag{16}$$

Однако в поставленной задаче исходное распределение $\Omega_{\text{исх}}$ не известно, известны лишь интенсивности и положения ВЭ, т.е. в задаче $\Omega_{\text{исх}}$ заменено распределением $\Omega = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$. Для вычисления $\nabla\Omega$ необходимо аппроксимировать её гладкой функцией $\widetilde{\Omega}$, так чтобы $\widetilde{\Omega}\approx\Omega_{\text{исх}}$ и $\nabla\widetilde{\Omega}\approx\nabla\Omega_{\text{исх}}$. Для этого используем функцию вида [2]

$$\widetilde{\Omega}(\vec{r}) = \frac{\iint_{\mathbb{R}^2} \Omega\left(\vec{\xi}\right) \exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{\xi}|}{\varepsilon^*}\right) dS_\xi}{\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{\xi}|}{\varepsilon^*}\right) dS_\xi} =$$

$$= \frac{\iint_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \cdot \delta\left(\vec{\xi}-\vec{r}_i\right) \exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{\xi}|}{\varepsilon^*}\right) dS_\xi}{\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{\xi}|}{\varepsilon^*}\right) dS_\xi} = \frac{1}{2\pi\varepsilon^{*2}} \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_i|}{\varepsilon^*}\right),$$

где ε^* – малый параметр, который выбирается на основании анализа взаимного расположения ВЭ. Можно убедиться, что при такой аппроксимации заданного распределения

$$\nabla\widetilde{\Omega}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^{*2}} \sum_{i=1}^{N} \left[\Gamma_i \exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_i|}{\varepsilon^*}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\varepsilon^*}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\right)\right],$$

тогда

$$\vec{W}(\vec{r}) = \nu \frac{\frac{1}{\varepsilon^*}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \exp\left(-\frac{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}{\varepsilon^*}\right) \cdot \frac{\vec{r}_j-\vec{r}_i}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}}{\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \exp\left(-\frac{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}{\varepsilon^*}\right)}. \tag{17}$$

Как отмечалось выше, новой завихренности в рассматриваемой области не образуется, а происходит движение ВЭ со скоростью $\vec{\boldsymbol{U}}$. Поэтому, чтобы смоделировать движение жидкости, необходимо найти распределение скоростей и решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{U}_j\,, \\ \vec{r}_j|_{t=0} = \vec{r}_{j\,0}, \end{cases} \tag{18}$$

где $\vec{U}_j = \vec{V}_j$ для идеальной жидкости и $\vec{U}_j = \vec{V}_j + \vec{W}_j$ для вязкой жидкости.

Для решения задачи (18) использовался метод Эйлера [5]:

$$\frac{\vec{r}_j(t+\Delta t) - \vec{r}_j(t)}{\Delta t} = \vec{U}(\vec{r}_j(t), t)\,,$$

тогда

$$\vec{r}_j(t+\Delta t) = \vec{U}(\vec{r}_j(t)) \cdot \Delta t + \vec{r}_j(t)\,. \tag{19}$$

Метод Эйлера имеет первый порядок точности, поэтому при сравнительно больших Δt полученное решение будет далеко от истинного, однако, как будет показано далее, применение параллельных вычислений на графическом процессоре позволяет решать

задачи на необходимом интервале $[0; T]$ с весьма малым шагом за приемлемое время. Для повышения точности можно использовать методы более высокого порядка, однако в данной работе основное внимание уделялось вопросам ускорения вычислений и расчёт производился методом Эйлера. Тем не менее, полученные результаты в дальнейшем могут быть перенесены на алгоритмы с применением более точных методов.

Решение задачи с использованием GPU

Численное решение большинства задач, в том числе и рассмотренной в данной работе, требует значительных временных затрат, связанных с пошаговым характером решения дифференциальных уравнений, и чем более точное и полное решение требуется получить, тем больший объём вычислений приходится выполнять. Существует несколько способов решения этой проблемы: можно использовать метод высокого порядка точности и тем самым уменьшить количество шагов по времени, однако чем выше порядок, тем больше операций требуется совершать на каждом шаге, то есть такой подход имеет ряд недостатков и ограничений. Другой подход к ускорению вычислений – это сокращение времени выполнения математических операций, то есть, как правило, увеличение частоты процессора (CPU). Этот подход также даёт некоторые результаты: за последние 30 лет частота процессора увеличились более чем в 200 раз [6], однако дальнейшее повышение частоты ограничено крайне высоким тепловыделением и технологическими параметрами. Рассмотренный же в ходе исследования метод заключается в одновременном выполнении операций, которое возможно благодаря многоядерности современных процессоров. При этом максимальное ускорение S, которое можно получить, распределив выполнение программы на K параллельно работающих ядер, определяется законом Амдала [6]:

$$S = \frac{1}{(1 - P) + \frac{P}{K}},$$

где P – это доля кода, который может быть распараллелен. Из этого закона видно, что максимальное ускорение обусловлено не только количеством вычислительных ядер, но и используемыми алгоритмами и методами.

Центральные процессоры, хоть и имеют значительные вычислительные возможности, имеют весьма ограниченное количество ядер: около 20 в экспериментальных разработках и от 4 до 8 в самых производительных процессорах серийного производства. Безусловно, это довольно много, тем более, что можно объединить несколько устройств в одной вычислительной машине, однако стоимость таких систем чрезвычайно высока. Взамен этого можно использовать графический процессор.

Современные графические процессоры (GPU) позволяют проводить

математические вычисления с двойной точностью. Отличительной особенностью вычислений на GPU является то, что одновременно могут производиться сотни и даже тысячи операций, благодаря тому что один процессор содержит соответствующее число ядер. Обратной стороной использования графического процессора является то, что он расположен на отдельном устройстве со своей оперативной памятью, куда нужно предварительно загрузить данные для вычислений и после этого выгрузить обратно для вывода результата. Это является «узким местом» такой методики, так как требует определённых временных затрат (зачастую бóльших, чем необходимо непосредственно для вычислений), поэтому при написании программного кода должно быть минимизировано количество операций обмена данными между видеокартой и оперативной памятью компьютера. Ещё одной особенностью является то, что в архитектуре графического процессора на несколько арифметико-логических устройств приходится лишь одно устройство управления [6], поэтому при разработке алгоритмов должны быть выделены части кода, в которых производятся идентичные вычисления (естественно, с разными входными данными). Для вычислений на GPU можно использовать CUDA (Compute Unified Device Architecture) – программно-аппаратную архитектуру параллельных вычислений, основанную на графических процессорах фирмы NVIDIA.

В ходе численного моделирования, во-первых, производилось сравнение полученного решения с аналитическим, а во-вторых измерялось время выполнения расчётов для анализа целесообразности использования графических ускорителей в дальнейших исследованиях.

Вычислительный эксперимент

Рассматривалась задача о диффузии круглого вихря. В момент времени T_0, который был принят за начало отсчёта в численном моделировании, исходное распределение завихренности было заменено набором из 1066 ВЭ согласно (10). Далее движение завихренности моделировалось движением этих вихревых элементов (рис. 1). При этом аналитическое решение считалось известным [7]:

$$\Omega(\vec{r}, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right).$$

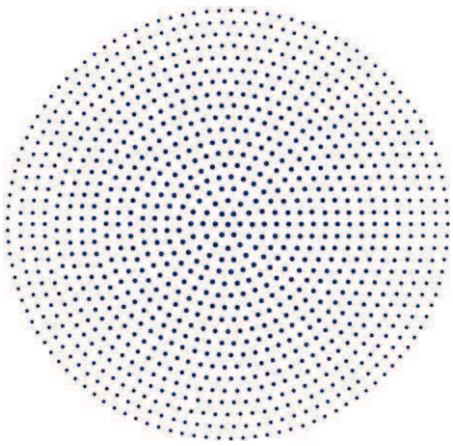

Рис. 1. Начальное расположение ВЭ.

Для сравнения с аналитическим решением вычислялась суммарная завихренность внутри окружностей фиксированного радиуса $R_i = 3$ двумя способами (численно и аналитически) и, для наглядности, строилась графическая зависимость этих величин от времени. Численно суммарную завихренность $\Gamma(R_i)$ можно построить двумя способами:

1) $\Gamma(R_i) = \sum_i \Gamma_i$, где Γ_i – интенсивности вихревых элементов, расположенных внутри круга радиуса R_i;

2) $\Gamma(R_i) = \iint_{S_R} \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \cdot \exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{\xi}|}{\varepsilon^*}\right) dS_R$, т.е. используя аппроксимацию, введённую для нахождения $\widetilde{\Omega}$ из п. 2.

Преимущество второго способа состоит в том, что он позволяет построить гладкий график, тогда как в первом способе при выходе элемента за пределы круга будет наблюдаться скачок суммарной завихренности.

Сначала была решена задача для невязкой жидкости. Были найдены скорости вихревых элементов по формуле (15), затем находились новые координаты вихревых элементов по формуле (19)

$$\vec{r}_j(t+\Delta t) = \vec{r}_j(t) + \left[\vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \frac{\vec{k}\times(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{d_{ij}^2}\right]\cdot \Delta t, \tag{20}$$

где $d_{ij} = \max\{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|, \varepsilon\}$. Зная положения и интенсивности вихревых элементов, можно одновременно считать скорости во всех интересующих точках.

Движение невязкой жидкости моделировалось на интервале времени $[0,300]$. Произведя вычисления для разных Δt получили результаты, показанные на рис. 2, 3, 4. При этом, для большей наглядности, при $\Delta t \leq 1$, строились графики разности аналитического и численного решений.

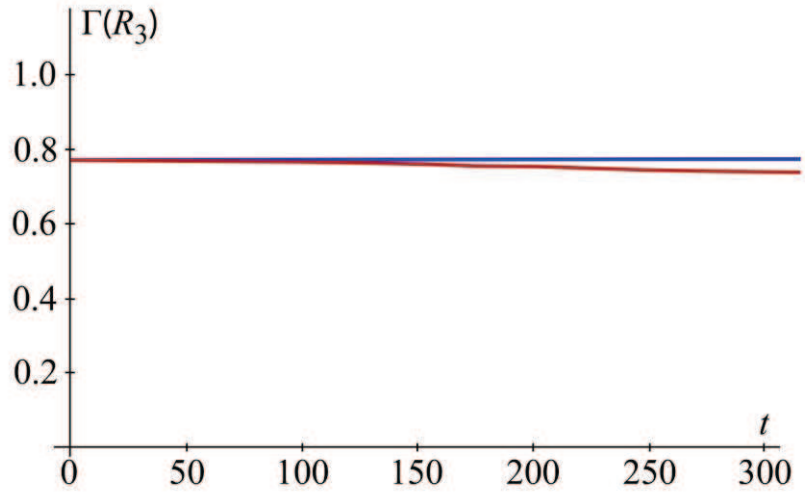

Рис. 2. Сравнение аналитического и численного решений при $\Delta t = 2$ (аналитическое решение показано синим цветом).

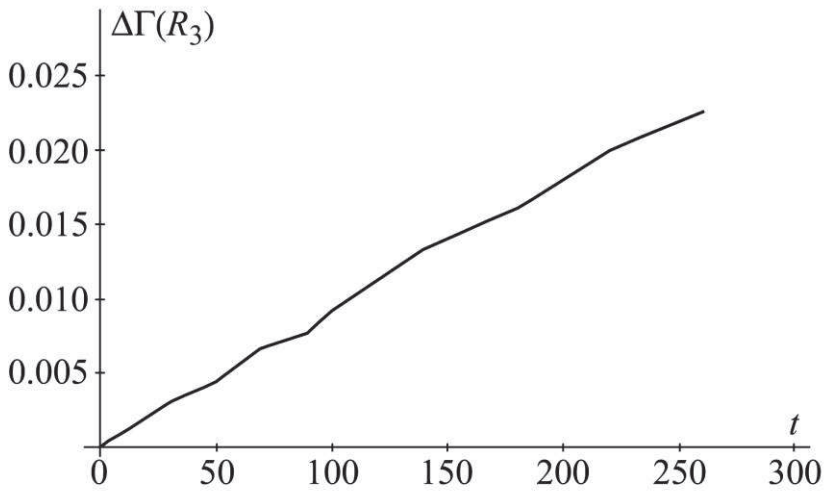

Рис. 3. Разность аналитического и численного решений при $\Delta t = 1$.

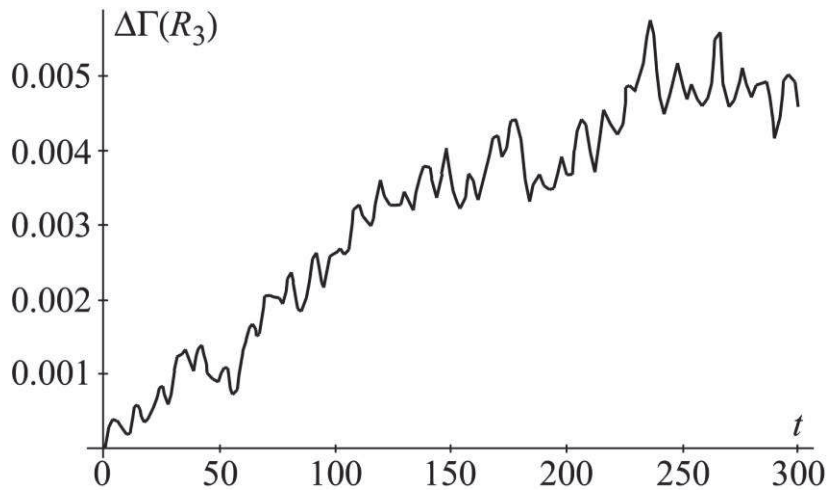

Рис. 4. Разность аналитического и численного решений при $\Delta t = 0{,}1$.

Анализ графиков показывает, что использование метода Эйлера в данной задаче на выбранном интервале времени целесообразно при $\Delta t \leq 0{,}1$.

При моделировании движения вязкой жидкости к скорости, полученной в (15), прибавлялась диффузионная скорость, рассчитываемая по формуле (17), и задача Коши (18) решалась для суммарной скорости. Поэтому, согласно (19), координаты ВЭ вычислялись по следующей формуле

$$\vec{r}_j(t+\Delta t) = \vec{r}_j(t) + \left[\vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i \cdot \frac{\vec{k}\times\left(\vec{r}_j-\vec{r}_i\right)}{d_{ij}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\nu}{\varepsilon_j^*}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i \exp\left(-\frac{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}{\varepsilon_j^*}\right)\cdot\frac{\vec{r}_j-\vec{r}_i}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}}{\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i \exp\left(-\frac{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}{\varepsilon_j^*}\right)}\right]\Delta t \qquad 21)$$

При исследовании завихренности в круге радиуса 3 для временного интервала $(0{,}6000)$ с разными Δt получили

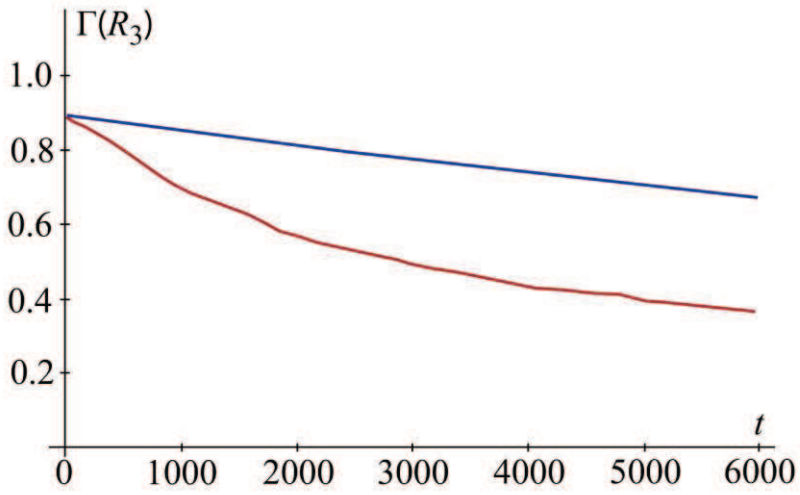

Рис. 5. Сравнение аналитического (синий график) и численного (красный график) решений при $\Delta t = 2$ в случае вязкой жидкости.

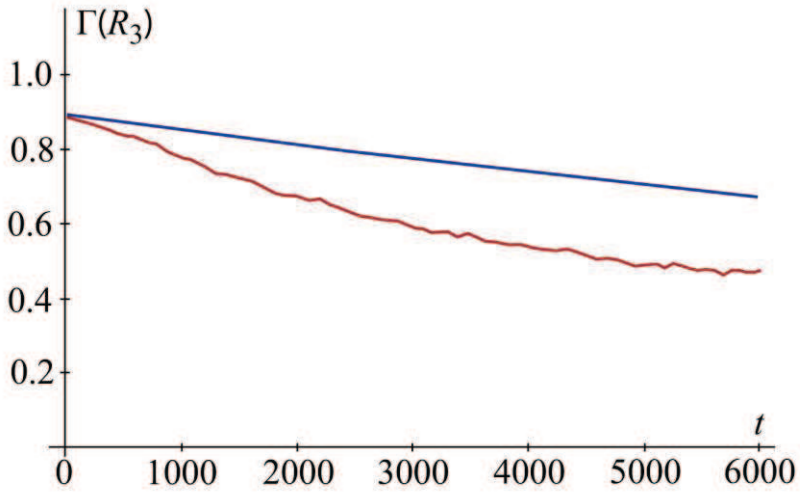

Рис. 6. Сравнение аналитического (синий график) и численного (красный график) решений при $\Delta t = 1$ в случае вязкой жидкости.

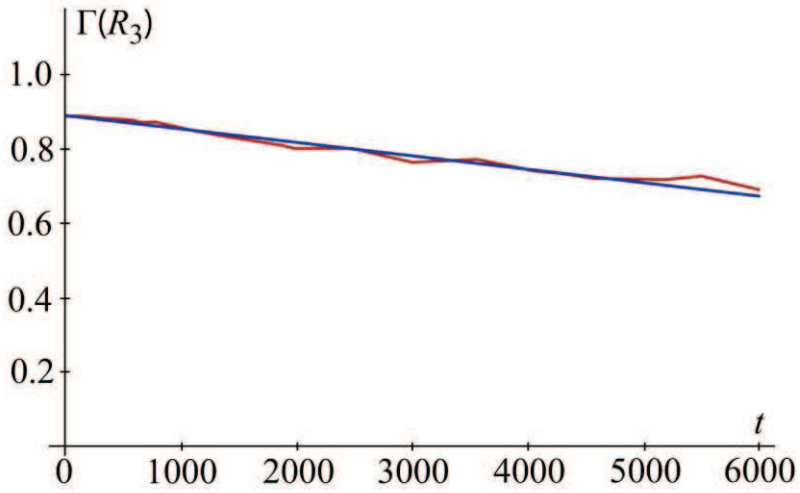

Рис. 7. Сравнение аналитического (синий график) и численного (красный график) решений при $\Delta t = 0{,}1$ в случае вязкой жидкости.

Для анализа зависимости скорости вычислений от количества ВЭ проводились расчёты 1000 шагов с разным количеством ВЭ. В результате получили практически квадратичную зависимость, которую, для наглядности, показали на рисунке (рис. 8). Синим цветом изображены параболы с разными коэффициентами при x^2, зеленым – график зависимости времени вычислений от количества ВЭ для задачи с вязкостью, красным без вязкости

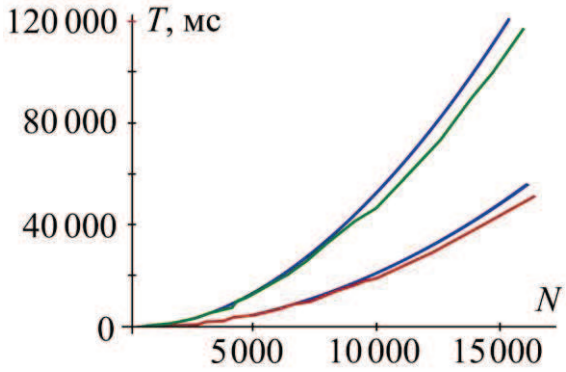

Рис.8. Зависимость времени выполнения расчета от количества ВЭ.

Также были проведены сравнительные расчёты на центральном процессоре компьютера и на графическом процессоре (1344 ядра) для определения достигнутого ускорения. В таблице представлены количество моделируемых ВЭ N, время вычислений на CPU и на GPU (в миллисекундах) и достигнутое ускорение S. Результаты осреднены по 1000 шагам алгоритма.

Без вязкости				С вязкостью			
N	CPU	GPU	S	N	CPU	GPU	S
64	30	150	0.20	64	238	215	1.11
128	110	202	0.54	128	903	320	2.82
192	240	225	1.07	192	1993	380	5.24
256	420	270	1.56	256	3512	430	8.17
512	1670	400	4.18	512	13842	690	20.06
1024	6650	720	9.24	1024	54834	1380	39.73
2048	26610	1510	17.62	2048	220010	2710	81.18
4096	106311	4385	24.24	4096	877430	9464	92.71
6144	238500	8100	29.44	6144	1949740	18700	104.26
8192	424000	14500	29.24	8192	3466100	34500	100.47
10240	662100	21106	31.37	10240	5387700	50100	107.54
12288	953200	30262	31.50	12288	7756900	72000	107.73
14336	1302300	40900	31.84	14336	10483200	97300	107.74
16384	1694200	53000	31.67	16384	13285200	123500	107.57

Из полученных результатов видно, что среднее ускорение при решении задачи без

вязкости составило 17.40, задачи с вязкостью – 63.31, однако, если не учитывать результаты при количестве ВЭ $N < 6000$, то средние ускорения расчётов будут равны 30.84 и 107.87 соответственно. В то же время, согласно полученным данным, при малом количестве ВЭ, вычисления на CPU проводятся несколько быстрее, чем на GPU. Это связано с вышеупомянутыми особенностями архитектуры графического процессора. Следовательно, применение CUDA для моделирования движения большого количества ВЭ позволяет значительно сократить время, необходимое для проведения расчётов, что, в свою очередь, позволяет достичь необходимой для инженерных целей точности при сравнительно небольших временны́х затратах.

Список литературы

1. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.
2. Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 5. С. 11-19.
3. Сэффмен Дж. Динамика вихрей. М.: Научный мир, 2000. 375 с.
4. Марчевский И.К. Математическое моделирование обтекания профиля и исследование его устойчивости в потоке по Ляпунову. Дис. кан.физ.-мат. наук. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 119 с.
5. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2010. 592 с.
6. Боресков А.В. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA: М.: Изд-во Московского университета, 2012. 336 с.
7. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.II. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
8. Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье – Стокса // ДАН. 2004. Т. 399. №1. С. 42-46.