НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Уточненная формула для вычисления коэффициентов передаточной матрицы в задачах статистической динамики

03, март 2013
DOI: 10.7463/0313.0543198

Дмитриев С. Н., Хамидуллин Р. К.

УДК 534.1

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
dim.sm2@yandex.ru

При исследовании вынужденных стационарных случайных колебаний линейных систем с конечным числом степеней свободы n [1, 2, 3, 4] широко используются функции частоты, связывающие перемещение в некоторой точке системы с воздействием в какой-либо другой точке при установившихся гармонических колебаниях. Эти функции называют передаточными функциями, динамическими податливостями, гармоническими коэффициентами влияния или элементами матрицы Грина в пространстве Фурье [2, 3].

Передаточная функция $g_{i,j}^{(D)}(p)$ зависит от угловой частоты внешнего воздействия p и определяет перемещение i-той степени свободы на гармоническое воздействие, приложенное по j-той степени свободы. Номера степеней свободы i, j принимают значения $i, j = 1,2,3,\ldots,n$. Коэффициенты $g_{i,j}^{(D)}(p)$ при различных значениях номеров степеней свободы могут быть собраны в некоторую матрицу $G^{(D)}(p)$ размером $n \times n$, которую называется матрицей передаточных функций, матрицей гармонических коэффициентов влияния или матрицей динамических податливостей.

Наиболее распространенным способом вычисления коэффициентов матрицы $G^{(D)}(p)$ является способ, основанный на использовании собственных частот и форм колебаний [1]. Число учитываемых тонов колебаний r является при этом ограниченным, для больших конечно-элементных моделей обычно $r << n$. Естественно, возникает вопрос о погрешности усечения ряда. В настоящей статье применительно к вычислению матрицы динамических податливостей, найденной с учетом классического внутреннего демпфирования, определяется поправка, позволяющая существенно снизить погрешность усечения.

1.Получение передаточной матрицы для системы с демпфированием

Для вычисления матрицы передаточных функций рассмотрим задачу о стационарных колебаниях системы с n степенями свободы с учетом демпфирования [1,3,5]. Динамическое уравнение движения в матричной форме имеет вид:

$$M \cdot \ddot{u} + D \cdot \dot{u} + K \cdot u = P_0 \cdot \exp\bigl(i \cdot (pt + \varphi)\bigr) \tag{1}$$

Здесь M - матрица массы, D - матрица демпфирования, K - матрица жесткости. $\ddot{u}$, $\dot{u}$ и u, соответственно, векторы ускорений, скоростей и перемещений узловых точек, P_0 - амплитуда вынуждающей силы, p – угловая частота внешнего воздействия, φ - начальная фаза, i - мнимая единица.

Демпфирование предполагается классическим, то есть пропорциональным матрице жесткости (внутреннее демпфирование [3]):

$$D = \eta \cdot K \tag{2}$$

или матрице массы (внешнее демпфирование):

$$D = \varsigma \cdot M \,, \tag{3}$$

где η и ς - некоторые коэффициенты.

Установившиеся колебания происходят по гармоническому закону с частотой вынуждающей силы. Поэтому решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$u(t) = u_0 \cdot \exp\bigl(i \cdot (pt + \varphi)\bigr), \tag{4}$$

где u_0 - n-мерный вектор комплексных значений амплитуд колебаний узловых точек.

Подставляя (4) в (1) получим:

$$-p^2 \cdot M \cdot u_0 + i \cdot p \cdot D \cdot u_0 + K \cdot u_0 = P_0 \tag{5}$$

В случае классического демпфирования динамические уравнения движения могут быть преобразованы с использованием форм колебаний системы без демпфирования, то есть можно представить вектор амплитудных значений перемещений u_0 в виде разложения в ряд по собственным формам колебаний:

$$u_0 = \Phi \cdot q \tag{6}$$

Здесь q - комплексный n-мерный вектор координат форм, Φ действительная матрица форм колебаний, в которой собственные векторы φ^j, являющиеся решением симметричной обобщенной проблемы собственных значений (7):

$$-\omega_j^2 \cdot M \cdot \varphi^j + K \cdot \varphi^j = 0\,, \qquad j = 1,2,3,\ldots,n \tag{7}$$

расположены по столбцам в порядке возрастания соответствующей им угловой частоты собственных колебаний ω_j (j - номер тона колебаний):

$$\Phi = \left[\varphi^1 \mid \varphi^2 \mid \varphi^3 \mid \ldots \mid \varphi^n\right] \tag{8}$$

Предполагается, как обычно, что формы колебаний удовлетворяют соотношениям K - и M - ортогональности:

$$\begin{gathered}\Phi^T \cdot K \cdot \Phi = \Lambda \\ \Phi^T \cdot M \cdot \Phi = E\end{gathered} \tag{9}$$

Λ - диагональная матрица собственных чисел $\lambda_j = \omega_j^2$:

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n) \tag{10}$$

E - единичная матрица.

Для получения уравнения вынужденных стационарных колебаний в координатах форм, подставим (6) в (5), полученное выражение умножим слева на Φ^T и используем соотношения ортогональности (9). В итоге приходим к уравнению:

$$-p^2 \cdot q + i \cdot p \cdot R \cdot q + \Lambda \cdot q = Q_0 \tag{11}$$

Матрица R - диагональная. Для случая, когда матрица демпфирования пропорциональна матрице жесткости:

$$R = diag(\eta\lambda_1, \eta\lambda_2, \ldots \eta\lambda_n) \tag{12}$$

В случае пропорциональности матрице массы:

$$R = \varsigma \cdot E \tag{13}$$

Q_0 - вектор амплитудных значений обобщенных сил, определяется формулой:

$$Q_0 = \Phi^T \cdot P_0 \tag{14}$$

Из уравнения (11) можно найти вектор q комплексных значений координат форм:

$$q = \left(-p^2 \cdot E + i \cdot p \cdot R + \Lambda\right)^{-1} \cdot Q_0 \tag{15}$$

Матричное выражение, стоящее в круглых скобках, является диагональной матрицей. Легко найти матрицу обратную диагональной:

$$\begin{gathered}\left(-p^2 \cdot E + i \cdot p \cdot R + \Lambda\right)^{-1} = \\ = diag\left(\frac{1}{-p^2 + i \cdot p \cdot R_1 + \lambda_1}, \frac{1}{-p^2 + i \cdot p \cdot R_2 + \lambda_2}, \ldots, \frac{1}{-p^2 + i \cdot p \cdot R_n + \lambda_n}\right) = \\ = diag\left(\frac{(\lambda_1 - p^2) - i \cdot p \cdot R_1}{(\lambda_1 - p^2)^2 + p^2 \cdot R_1^2}, \frac{(\lambda_2 - p^2) - i \cdot p \cdot R_2}{(\lambda_2 - p^2)^2 + p^2 \cdot R_2^2}, \ldots, \frac{(\lambda_n - p^2) - i \cdot p \cdot R_n}{(\lambda_n - p^2)^2 + p^2 \cdot R_n^2}\right)\end{gathered} \tag{16}$$

Коэффициенты демпфирования R_j, $j = 1,2,3,\ldots,n$ определяются по формулам (12) или (13), в зависимости от используемой модели демпфирования.

Связь между вектором амплитудных значений перемещений u_0 и вектором амплитудных значений сил P_0 может быть найдена путем подстановки в (15) формулы (6), связывающей перемещения и координаты форм, и (14), определяющей обобщенные силы:

$$u_0 = \Phi \cdot \left(-p^2 \cdot E + i \cdot p \cdot R + \Lambda\right)^{-1} \cdot \Phi^T \cdot P_0 \tag{17}$$

Матрица, связывающая между собой вектор амплитудных значений перемещений u_0 с вектором амплитудных значений сил P_0, и является искомой матрицей передаточных функций $G^{(D)}(p)$. Из (17) следует:

$$G^{(D)}(p) = \Phi \cdot \left(-p^2 \cdot E + i \cdot p \cdot R + \Lambda\right)^{-1} \cdot \Phi^T = \tag{18}$$

$$= \Phi \cdot diag\left(\frac{\left(\lambda_1 - p^2\right) - i \cdot p \cdot R_1}{\left(\lambda_1 - p^2\right)^2 + p^2 \cdot R_1^2}, \frac{\left(\lambda_2 - p^2\right) - i \cdot p \cdot R_2}{\left(\lambda_2 - p^2\right)^2 + p^2 \cdot R_2^2}, \ldots, \frac{\left(\lambda_n - p^2\right) - i \cdot p \cdot R_n}{\left(\lambda_n - p^2\right)^2 + p^2 \cdot R_n^2}\right) \cdot \Phi^T$$

Как видно, матрица передаточных функций является комплексной, ее можно представить в виде суммы действительной $G^{(R)}(p)$ и мнимой $G^{(I)}(p)$ частей:

$$G^{(D)}(p) = G^{(R)}(p) + i \cdot G^{(I)}(p) \tag{19}$$

Действительная часть:

$$G^{(R)}(p) = \Phi \cdot diag\left(\frac{\lambda_1 - p^2}{\left(\lambda_1 - p^2\right)^2 + p^2 \cdot R_1^2}, \frac{\lambda_2 - p^2}{\left(\lambda_2 - p^2\right)^2 + p^2 \cdot R_2^2}, \ldots \frac{\lambda_n - p^2}{\left(\lambda_n - p^2\right)^2 + p^2 \cdot R_n^2}\right) \cdot \Phi^T \tag{20}$$

мнимая часть:

$$G^{(I)}(p) = \Phi \cdot diag\left(\frac{-p \cdot R_1}{\left(\lambda_1 - p^2\right)^2 + p^2 \cdot R_1^2}, \frac{-p \cdot R_2}{\left(\lambda_2 - p^2\right)^2 + p^2 \cdot R_2^2}, \ldots \frac{-p \cdot R_n}{\left(\lambda_n - p^2\right)^2 + p^2 \cdot R_n^2}\right) \cdot \Phi^T \tag{21}$$

Отдельные коэффициенты матриц определяются суммой ряда по номеру тона колебаний. Коэффициенты $g_{i,j}^{(R)}(p)$ действительной части матрицы динамических податливостей:

$$g_{i,j}^{(R)}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\lambda_k - p^2\right) \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + p^2 \cdot R_k^2} \tag{22}$$

Коэффициенты $g_{i,j}^{(I)}(p)$ мнимой части матрицы динамических податливостей:

$$g_{i,j}^{(I)}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{-p \cdot R_k \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + p^2 \cdot R_k^2} \tag{23}$$

k - номер тона колебаний, i и j - номера степеней свободы.

2.Учет вклада отброшенных тонов колебаний в случае внутреннего демпфирования

При практических расчетах колебаний систем с большим числом степеней свободы, как правило, для учета демпфирования используется модель классического внутреннего демпфирования. Тогда коэффициенты демпфирования определяются формулой (12), а коэффициенты матрицы динамических податливостей

$$g_{i,j}^{(R)}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\lambda_k - p^2\right) \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + \eta^2 \cdot p^2 \cdot \lambda_k^2} \tag{24}$$

$$g_{i,j}^{(I)}(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{-p \cdot \eta \cdot \lambda_k \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + \eta^2 \cdot p^2 \cdot \lambda_k^{\,2}} \tag{25}$$

При вычислении коэффициентов матрицы динамических податливостей с помощью формул (24) и (25), так как конечно-элементная модель имеет большую размерность, используются не все n частот и форм колебаний, а только ограниченная часть спектра - $r < n$ тонов колебаний. Вклад отброшенных тонов можно учесть приближенно, причем с хорошей точностью, используя подход, предложенный в работе [6] применительно к построению сокращенной модальной модели в системе без демпфирования. Так как для отброшенных тонов $\lambda_k >> p^2$, то при вычислении остатка ряда при $k > r$ в формулах (24) и (25) можно пренебречь p^2 по сравнению с λ_k положить $p = 0$. Разделяя ряды в (24) и (25) на две части запишем:

$$g_{i,j}^{(R)}(p) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\left(\lambda_k - p^2\right) \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + \eta^2 \cdot p^2 \cdot \lambda_k^2} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\left(\lambda_k - p^2\right) \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + \eta^2 \cdot p^2 \cdot \lambda_k^2} \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{r} \frac{\left(\lambda_k - p^2\right) \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + \eta^2 \cdot p^2 \cdot \lambda_k^2} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\lambda_k} \tag{26}$$

$$g_{i,j}^{(I)}(p) = \sum_{k=1}^{r} \frac{-p \cdot \eta \cdot \lambda_k \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + \eta^2 \cdot p^2 \cdot \lambda_k^2} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{-p \cdot \eta \cdot \lambda_k \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + \eta^2 \cdot p^2 \cdot \lambda_k^2} \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{r} \frac{-p \cdot \eta \cdot \lambda_k \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + \eta^2 \cdot p^2 \cdot \lambda_k^2} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{-p \cdot \eta \cdot \lambda_k \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\lambda_k^{\,2}} =$$

$$= -p \cdot \eta \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} \frac{\lambda_k \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + \eta^2 \cdot p^2 \cdot \lambda_k^2} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\lambda_k} \right) \tag{27}$$

Остаток ряда, соответствующий отброшенным тонам колебаний содержит сумму

$$g_{i,j}^{(O)} = \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\lambda_k} \tag{28}$$

Такая же сумма встречается в [6], где она названа остаточной податливостью. Для нахождения $g_{i,j}^{(O)}$ используем следующий прием. Если положить в формуле (26) $p = 0$, мы получим значение податливости $g_{i,j}$ для статической задачи:

$$g_{i,j}^{(R)}(0) = g_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\lambda_k} \tag{29}$$

Коэффициенты этой матрицы могут быть найдены путем решения соответствующей задачи статики: $g_{i,j}$ равно перемещению по $i-$той степени свободы при приложении единичной силы по $j-$той степени свободы.

Сравнивая (28) и (29) запишем

$$g_{i,j}^{(O)} = g_{i,j} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\lambda_k} \tag{30}$$

Согласно формуле (30) поправка получается путем вычитания из $g_{i,j}$ статического вклада r тонов колебаний, учтенных в расчете. Таким образом, получаются следующие формулы для вычисления действительной и мнимой частей коэффициентов матрицы передаточных функций:

$$g_{i,j}^{(R)}(p) \approx \sum_{k=1}^{r} \frac{\left(\lambda_k - p^2\right) \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + \eta^2 \cdot p^2 \cdot \lambda_k^2} + g_{i,j}^{(O)} \tag{31}$$

$$g_{i,j}^{(I)}(p) \approx -p \cdot \eta \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} \frac{\lambda_k \cdot \varphi_i^{(k)} \cdot \varphi_j^{(k)}}{\left(\lambda_k - p^2\right)^2 + \eta^2 \cdot p^2 \cdot \lambda_k^2} + g_{i,j}^{(O)} \right) \tag{32}$$

В полученных формулах учитывается вклад отброшенных тонов колебаний. В отличие от [6], рассмотрение проведено с учетом демпфирования. Передаточная матрица является комплексной, и поправки вносятся как в действительную, так и в мнимую часть.

3.Пример вычисления коэффициентов передаточной матрицы

Проиллюстрируем формулы, полученные в настоящей статье, на примере консольной балки. Передаточные функции для балки можно найти не только по формулам (31) и (32), но и, при отсутствии демпфирования, аналитически. Пусть балка заделана на левом конце, а на правом свободна. Найдем матрицу, связывающую перемещение и угол поворота на свободном конце балки с соответствующими силовыми факторами. Эта матрица имеет порядок 2×2 и в силу симметрии имеет три независимых коэффициента, которые мы обозначим $g_{1,1}^{(D)}$, $g_{1,2}^{(D)}$ и $g_{2,2}^{(D)}$. Эти коэффициенты связывают между собой амплитудные значения силовых факторов и компонент перемещений при гармоническом воздействии: $g_{1,1}^{(D)}$- поперечное перемещение с поперечной силой, $g_{1,2}^{(D)}$- поперечное смещение с моментом, $g_{2,2}^{(D)}$ - угол поворота с моментом. При аналитическом решении задач о собственных колебаниях балок [3,5,7] используется безразмерный параметр $(\alpha \cdot l)$, связанный с угловой частотой колебаний p формулой:

$$p = \frac{a \cdot (\alpha l)^2}{l^2} \tag{33}$$

l-длина балки, $a = \sqrt{\dfrac{EJ}{\rho F}}$, E - модуль упругости, ρ- плотность, F- площадь поперечного сечения, J - момент инерции.

Точные значения коэффициентов передаточной матрицы могут быть найдены путем аналитического решения задачи о вынужденных стационарных колебаниях консольной балки нагруженной на свободном конце силовыми факторами, изменяющимися по гармоническому закону. Последовательно решая задачи о нагружении единичной поперечной силой и единичным моментом, получим следующие аналитические выражения для передаточных функций как функций параметра $(\alpha \cdot l)$, заменяющего частоту p:

$$g_{1,1}^{(D)} = \frac{l}{(\alpha l)^3} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{ch \cdot (\alpha l) \cdot \sin(\alpha l) - \cos(\alpha l) \cdot sh(\alpha l)}{1 + ch(\alpha l) \cdot \cos(\alpha l)} \tag{34}$$

$$g_{1,2}^{(D)} = \frac{l}{(\alpha l)^2} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{sh(\alpha l) \cdot \sin(\alpha l)}{1 + ch(\alpha l) \cdot \cos(\alpha l)} \tag{35}$$

$$g_{2,2}^{(D)} = \frac{l}{(\alpha l)} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{\cos \cdot (\alpha l) \cdot sh(\alpha l) + ch(\alpha l) \cdot \sin(\alpha l)}{1 + ch(\alpha l) \cdot \cos(\alpha l)} \tag{36}$$

Для определения коэффициентов динамической податливости методом суммирования вкладов тонов колебаний форм необходимо вычислить частоты формы собственных колебаний. Значения $(\alpha \cdot l)$, соответствующие собственным частотам консольной балки являются корнями характеристического уравнения [7]:

$$\cos(\alpha \cdot l) \cdot ch(\alpha \cdot l) = -1 \tag{37}$$

Таблица первых шести корней уравнения (37) приведена в [7], для высших тонов корни находились численно. Собственные числа после этого определялись по формуле:

$$\lambda_k = \frac{a^2 \cdot (\alpha l)_k^4}{l^4} \tag{38}$$

k – номер тона колебаний. Для вычисления передаточных функций используются формы колебаний $\varphi_k(x)$, нормированные по массе. Применительно к балке условие нормирования :имеет вид:

$$\rho F \cdot \int_0^l \varphi_k^2(x) dx = 1 \tag{39}$$

Значение перемещения на свободном конце балки:

$$\varphi_k(l) = \frac{2}{\sqrt{\rho \cdot F \cdot l}} \tag{40}$$

Угол поворота:

$$\frac{d\varphi_k}{dx}(l) = \frac{2 \cdot (\alpha l)_k}{l \cdot \sqrt{\rho \cdot F \cdot l}} \cdot \frac{ch(\alpha l)_k + \cos(\alpha l)_k}{sh(\alpha l)_k + \sin(\alpha l)_k} \tag{41}$$

Значения статических податливостей, необходимые для вычисления поправок, равны

$$g_{1,1} = \frac{l^3}{3 \cdot EJ}; \quad g_{1,2} = \frac{l^2}{2 \cdot EJ}; \quad g_{2,2} = \frac{l}{EJ} \tag{42}$$

Сравнение численного и аналитического решений, а так же оценка влияния статической поправки проводилось в следующей последовательности. Вначале передаточные функции $g_{1,1}^{(D)}$, $g_{1,2}^{(D)}$, $g_{2,2}^{(D)}$ вычислялись без учета демпфирования и значения, полученные суммированием вкладов тонов колебаний, сравнивались результатами расчета по формулам (34), (35), (36). Затем проводились расчеты с учетом демпфирования при разном числе учитываемых тонов колебаний, так же с учетом и без учета найденной поправки. Вычисления поводились при единичных значениях EJ, ρF и l, так как эти параметры не оказывают влияния на скорость сходимости рядов и точность решения.

4.Сравнение точных и приближенных значений коэффициентов в системе без демпфирования

Наименьшие погрешности приближенных формул наблюдаются при частотах резонансов, наибольшие при частотах антирезонансов. Частоты резонансов, очевидно, для всех передаточных функций одинаковы, частоты антирезонансов (перехода значения коэффициента через нуль) у каждой функции свои. Значения безразмерного параметра $(\alpha \cdot l)$, соответствующие частотам резонансов и антирезонансов приведены в таблице 1:

Таблица 1. Частоты резонансов и антирезонансов.

Номер тона	$(\alpha \cdot l)$ резонанса	$(\alpha \cdot l)$ антирезонанса для $g_{1,1}^{(D)}$.	$(\alpha \cdot l)$ антирезонанса для $g_{1,2}^{(D)}$.	$(\alpha \cdot l)$ антирезонанса для $g_{2,2}^{(D)}$.
1	1.875104068712	3.926602312051	3.14159265359	2.365020372434
2	4.694091132974	7.068582745625	6.283185307177	5.497803919001
3	7.854757438238	10.210176122819	9.424777960776	8.639379828695

В таблицах 2-4 указаны погрешности расчета действительной части коэффициентов динамической податливости. В таблице 2 - $g_{1,1}^{(R)}$, таблице 3 - $g_{1,2}^{(R)}$, таблице 4 - $g_{2,2}^{(R)}$. Точные значения коэффициентов $g_{i,j}^{(D)}$ находятся по формулам (38), (39), (40); приближенные $g_{i,j}^{(R)}$ по формуле (31), погрешность по формуле:

$$\varepsilon_{i,j}{}^{(R)} = \left| \frac{g_{i,j}^{(D)} - g_{i,j}^{(R)}}{g_{i,j}^{(D)}} \right| \cdot 100\% \tag{43}$$

при этом при определении $g_{i,j}^{(R)}$ коэффициент η был принят равным нулю (система без демпфирования). Значения коэффициентов передаточных матриц в таблицах найдены при нескольких значениях безразмерного параметра $(\alpha \cdot l)$ (второй столбец таблиц) в окрестности первых трех резонансов, антирезонансов и в промежуточных точках. Если значение параметра, соответствует частоте резонанса или антирезонанса, то это указывается в первых столбцах таблиц буквами «Р» или «А». Число тонов колебаний r, учитываемых при вычислениях, менялось от 1 до 50, оно указано во второй строке заголовка таблиц. В строках таблиц указаны значения погрешностей в процентах - без скобок при вычислении коэффициентов передаточных матриц без учета остаточной податливости, в скобках с учетом. Для сокращения размеров таблиц и наглядности погрешности менее 0,01 % заменены на нулевые значения, если значение погрешности превышает 100 % (это возможно при расчетах с без учета остаточных податливостей в окрестности антирезонанса) значение заменяется на «>100»). Если значение число тонов колебаний не достаточно (частота наивысшего учитываемого тона меньше частоты, при которой производится расчет) в ячейке ставится прочерк.

Таблица 2. Значения погрешностей при определении $g_{1,1}^{(R)}$ без учета и с учетом остаточной податливости при отсутствии диссипации в системе.

		Значение погрешности $\varepsilon_{1,1}^{(R)}$ в % при η=0					
	αl	r=1	r=3	r=5	r=10	r=20	r=50
	0	2.93 (0)	0.14 (0)	0.03 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
Р	1.875	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	2.905	-	0.85 (0)	0.19 (0)	0.02 (0)	0 (0)	0 (0)

A	3.141	- -	>100 (25.12)	>100 (0.8)	64.65 (0)	8.05 (0)	0.49 (0)
	4.306	- -	2.75 (0.04)	0.6 (0)	0.08 (0)	0 (0)	0 (0)
P	4.694	- -	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	5.884	- -	7.34 (0.41)	1.56 (0.01)	0.2 (0)	0.02 (0)	0 (0)
A	7.068	- -	>100 (>100)	>100 (54.56)	>100 (0.45)	51.3 (0)	3.11 (0)
	7.461	- -	16.68 (2.49)	3.23 (0.07)	0.4 (0)	0.05 (0)	0 (0)
P	7.854	- -	0.02 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	9.027	- -	- -	5.82 (0.26)	0.71 (0)	0.09 (0)	0 (0)
A	10.2	- -	- -	>100 (44.77)	71.94 (0.34)	8.92 (0)	0.5 (0)

Таблица 3. Значения погрешностей при определении $g_{1,2}^{(R)}$ без учета и с учетом остаточной податливости при отсутствии диссипации в системе.

		Значение погрешности $\varepsilon_{1,2}^{(R)}$ в % при η=0					
	αl	r=1	r=3	r=5	r=10	r=20	r=50
	0	10.92 (0)	1.39 (0)	0.51 (0)	0.13 (0)	0.03 (0)	0 (0)
P	1.875	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	2.51	- -	4.87 (0)	1.78 (0)	0.44 (0)	0.11 (0)	0.01 (0)
A	3.15	- -	>100 (2.75)	78.13 (0.14)	69.48 (0)	16.88 (0)	2.23 (0)
	3.92	- -	10.36 (0.09)	3.76 (0)	0.94 (0)	0.23 (0)	0.03 (0)
P	4.694	- -	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	5.49	- -	21.67 (0.73)	7.69 (0.04)	1.91 (0)	0.46 (0)	0.06 (0)
A	6.28	- -	>100 (>100)	>100 (3.98)	>100 (0.39)	>100 (0)	23.49 (0)
	7.07	- -	38.59 (3.74)	12.91 (0.17)	3.19 (0)	01.77 (0)	0.1 (0)
P	7.854	- -	0.04 (0)	0.01 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	8.64	- -	- -	19.61 (0.58)	4.77 (0)	1.16 (0)	0.15 (0)
A	9.42	- -	- -	>100 (>100)	>100 (2.85)	>100 (0.04)	33.85 (0)

Таблица 4. Значения погрешностей при определении $g_{2,2}^{(R)}$ без учета и с учетом остаточной податливости при отсутствии диссипации в системе.

		Значение погрешности $\varepsilon_{2,2}^{(R)}$ в % при η=0					
	αl	r=1	r=3	r=5	r=10	r=20	r=50
	0	38.44 (0)	13.04 (0)	7.7 (0)	3.66 (0)	1.63 (0)	0.42 (0)
P	1.875	0.01 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	2.120	- -	22.57 (0.01)	13.33 (0)	6.33 (0)	2.82 (0)	0.73 (0)
A	2.360	- -	>100 (0.95)	>100 (0.08)	>100 (0)	>100 (0)	42.78 (0)
	3.530	- -	30.91 (0.11)	18.21 (0)	8.64 (0)	3.84 0	1 0
P	4.694	- -	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	5.070	- -	40.81 (0.64)	23.79 (0.05)	11.28 (0)	5.01 (0)	1.31 (0)
A	5.450	- -	>100 (12.59)	>100 (1.01)	>100 (0.03)	72.82 (0)	18.95 (0)
	6.650	- -	67.06 (3.27)	37.95 (0.25)	17.91 (0)	7.96 (0)	2.07 (0)
P	7.854	- -	0.09 (0)	0.05 (0)	0.02 (0)	0 (0)	0 (0)
	8.240	- -	- -	42.94 (0.67)	20.09 (0.02)	8.93 (0)	2.32 (0)
A	8.550	- -	- -	>100 (5.24)	>100 (0.16)	59.82 (0)	15.57 (0)

Результаты расчетов, записанные в таблицах 2-4, показывают, что наибольшие погрешности возникают при определении коэффициента $g_{2,2}^{(R)}$. Для всех рассмотренных коэффициентов наибольшие погрешности присущи областям антирезонансов. Учет остаточной податливости приводит к значительному повышению точности определения коэффициентов. Если без учета остаточной податливости для определения коэффициентов передаточной матрицы с приемлемой точностью в частотном диапазоне от 0 до третьей собственной частоты может потребоваться порядка 20 – 50 тонов колебаний, то при учете статической поправки достаточно 5-10 тонов.

5.Анализ точности вычисления коэффициентов при наличии демпфирования

Проанализируем теперь точность определения коэффициентов без учета и с учетом статической поправки для консольной балки при наличии демпфирования. Для этого сравним погрешности при вычислении амплитудно частотной и фазо частотной характеристик при тех же значениях частот, что и ранее. Коэффициент демпфирования возьмем равным $\eta = 0.01\ {}^{1}\!/_{Гц}$.

Взяв достаточно большое количество тонов колебаний (n=100), посчитаем коэффициенты динамической податливости для мнимой и действительной частей по формулам (24) и (25) и примем полученные значения за точные. Расчет амплитуды и фазы осуществляется по формулам

$$g_{i,j}^{(A)}(\alpha l) = \sqrt{g_{i,j}^{(R)}(\alpha l)^2 + g_{i,j}^{(I)}(\alpha l)} \tag{44}$$

$$\psi_{i,j}(\alpha l) = arctg(\frac{g_{i,j}^{(I)}(\alpha l)}{g_{i,j}^{(R)}(\alpha l)}) \tag{45}$$

Погрешности определения амплитуды и фазы

$$\varepsilon_{i,j}{}^{(A)} = \left| \frac{g_{i,j}^{(A)}{}_{(n=100)} - g_{i,j}^{(A)}{}_{(n=r)}}{g_{i,j}^{(A)}{}_{(n=100)}} \right| \cdot 100\% \tag{46}$$

$$\varepsilon_{ij}{}^{(\psi)} = \left| \frac{\psi_{ij\,(n=100)} - \psi_{ij\,(n=r)}}{\psi_{ij\,(n=100)}} \right| \cdot 100\% \tag{47}$$

Результаты расчетов погрешностей амплитуды при различном числе учитываемых тонов r даны в таблицах 5, 7, 9, фазы - в таблицах 6, 8, 10..

Таблица 5. Значения погрешности при определении амплитуды $g_{1,1}^{(A)}$ без учета и с учетом остаточной податливости для системы с демпфированием.

		Значение погрешности $\varepsilon_{1,1}^{(A)}$ в % при η=0.01					
	αl	r=1	r=3	r=5	r=10	r=20	r=50
	0	2.93 (0)	0.14 (0)	0.03 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
P	1.875	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	2.905	- -	0.84 (0)	0.19 (0)	0.02 (0)	0 (0)	0 (0)
A	3.141	- -	1.64 (0.03)	0.29 (0)	0.03 (0)	0 (0)	0 (0)
	4.306	- -	2.13 (0.03)	0.47 (0.01)	0.06 (0)	0 (0)	0 (0)
P	4.694	- -	0.05 (0)	0.01 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	5.884	- -	5.34 (0.42)	1.14 (0.13)	0.14 (0.02)	0.02 (0)	0 (0)
A	7.068	- -	6.54 (1.65)	1.31 (0.32)	0.16 (0.04)	0.02 (0)	0 (0)

	7.461	- -	3.63 (1.76)	0.73 (0.23)	0.09 (0.03)	0.01 (0)	0 (0)
P	7.854	- -	2.67 (2.17)	0.6 (0.24)	0.07 (0.03)	0 (0)	0 (0)
	9.027	- -	- -	1.25 (0.84)	0.16 (0.1)	0.02 (0.01)	0 (0)

Таблица 6. Значения погрешности при определении фазы $\psi_{1,1}$ без учета и с учетом остаточной податливости для системы с демпфированием.

		Значение погрешности $\varepsilon_{1,1}^{(\psi)}$ в % при η=0.01					
	αl	r=1	r=3	r=5	r=10	r=20	r=50
	0	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
P	1.875	0.07 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	2.905	- -	2.6 (0)	0.58 (0)	0.07 (0)	0 (0)	0 (0)
A	3.141	- -	7.19 (0.09)	1.61 (0.04)	0.2 (0)	0.03 (0)	0 (0)
	4.306	- -	2.19 (0.05)	0.48 (0.02)	0.06 (0)	0 (0)	0 (0)
P	4.694	- -	0.9 (0.02)	0.2 (0)	0.02 (0)	0 (0)	0 (0)
	5.884	- -	13 (0.52)	2.83 (0.31)	0.36 (0.04)	0.04 (0)	0 (0)
A	7.068	- -	20.32 (2.45)	4.3 (1)	0.54 (0.13)	0.07 (0.02)	0 (0)
	7.461	- -	18.89 (3.04)	3.87 (1.12)	0.49 (0.15)	0.06 (0.02)	0 (0)
P	7.854	- -	19.29 (3.89)	3.86 (1.37)	0.48 (0.18)	0.06 (0.02)	0 (0)
	9.027	- -	- -	7.02 (4.37)	0.87 (0.58)	0.11 (0.07)	0 (0)

Таблица 7. Значения погрешности при определении амплитуды $g_{1,2}^{(A)}$ без учета и с учетом остаточной податливости для системы с демпфированием.

		Значение погрешности $\varepsilon_{1,2}^{(A)}$ в % при η=0.01					
	αl	r=1	r=3	r=5	r=10	r=20	r=50
	0	10.92 (0)	1.39 (0)	0.51 (0)	0.13 (0)	0.03 (0)	0 (0)
P	1.875	0.02 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
-	2.51	- -	4.81 (0.01)	1.76 (0)	0.44 (0)	0.11 (0)	0.01 (0)

A	3.15	- -	22.62 (0.02)	1.42 (0.03)	0.48 (0)	0.17 (0)	0.02 (0)
		- -	10.31 (0.15)	3.75 (0.08)	0.94 (0.02)	0.23 (0)	0.03 (0)
P	4.694	- -	0.84 (0.01)	0.32 (0.01)	0.08 (0)	0.02 (0)	0 (0)
		- -	13.05 (0.84)	4.48 (0.38)	1.09 (0.1)	0.26 (0.02)	0.03 (0)
A	6.28	- -	12.09 (1.05)	1.75 (0.04)	0.14 (0)	0.02 (0)	0 (0)
	7.07	- -	17.84 (2.44)	7.44 (1.91)	1.98 (0.51)	0.49 (0.12)	0.06 (0.02)
P	7.854	- -	12.63 (1.72)	4.82 (1.91)	1.28 (0.5)	0.32 (0.12)	0.04 (0.02)
	8.64	- -	- -	2.99 (2.14)	0.89 (0.55)	0.23 (0.13)	0.03 (0.02)

Таблица 8. Значения погрешности при определении фазы $\psi_{1,2}$ без учета и с учетом остаточной податливости для системы с демпфированием.

		Значение погрешности $\varepsilon_{1,2}^{(\psi)}$ при η=0.01					
	αl	r=1	r=3	r=5	r=10	r=20	r=50
	0	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
P	1.875	0.28 (0)	0.04 (0)	0.01 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	2.51	- -	8.95 (0.02)	3.36 (0.01)	0.85 (0)	0.21 (0)	0.03 (0)
A	3.15	- -	>100 (0.33)	>100 (0.18)	>100 (0.05)	>100 (0.01)	0.15 (0)
	3.92	- -	6.84 (0.13)	2.33 (0.05)	0.56 (0.01)	0.14 (0)	0.02 (0)
P	4.694	- -	>100 (0.08)	0.86 (0.04)	0.21 (0.01)	0.05 (0)	0 (0)
	5.49	- -	22.48 (1.24)	8.57 (0.76)	2.2 (0.2)	0.54 (0.05)	0.07 (0)
A	6.28	- -	40.61 (4.32)	15.12 (2.26)	3.8 (0.59)	0.92 (0.14)	0.12 (0.02)
	7.07	- -	>100 (4.49)	>100 (1.99)	2.13 (0.52)	0.51 (0.13)	0.07 (0.02)
P	7.854 7	- -	25.43 (6.28)	7.91 (2.7)	1.88 (0.7)	0.45 (0.17)	0.06 (0.02)
	8.64	- -	- -	12.74 (6.45)	3.06 (1.68)	0.74 (0.41)	0.1 (0.05)

Таблица 9. Значения погрешности при определении амплитуды $g_{2,2}^{(A)}$ без учета и с учетом остаточной податливости для системы с демпфированием.

		Значение погрешности $\varepsilon_{2,2}^{(A)}$ в % при η=0.01					
	αl	r=1	r=3	r=5	r=10	r=20	r=50
	0	38.44 (0)	13.04 (0)	7.7 (0)	3.66 (0)	1.63 (0)	0.42 (0)
P	1.875	0.12 (0)	0.04 (0)	0.03 (0)	0.01 (0)	0 (0)	0 (0)
	2.12	- -	22.1 (0.03)	13.04 (0.02)	6.19 (0.01)	2.75 (0)	0.72 (0)
A	2.360	- -	>100 (0.18)	>100 (0.13)	50.41 (0.06)	16.15 (0.03)	2.86 (0)
	3.53	- -	31 (0.37)	18.27 (0.27)	8.67 (0.13)	3.86 (0.06)	1 (0.02)
P	4.694	- -	4.78 (0.18)	3 (0.15)	1.49 (0.08)	0.68 (0.03)	0.18 (0)
	5.07	- -	14.74 (0.58)	7.35 (0.34)	2.98 (0.16)	1.21 (0.07)	0.3 (0.02)
A	5.450	- -	22.99 (1.64)	5.08 (0.79)	0.96 (0.38)	1.2 (0.16)	0.43 (0.04)
	6.65	- -	56.82 (9.26)	35.29 (7.03)	17.22 (3.43)	7.74 (1.53)	2.03 (0.4)
P	7.854	- -	40.62 (13.51)	25.19 (10.49)	12.65 (5.08)	5.77 (2.25)	1.52 (0.58)
	8.24	- -	- -	24.76 (13.36)	12.82 (6.42)	5.91 (2.83)	1.57 (0.73)

Таблица 10. Значения погрешности при определении фазы $\psi_{2,2}$ коэффициента без учета и с учетом остаточной податливости для системы с демпфированием.

		Значение погрешности $\varepsilon_{2,2}^{(\psi)}$ в % при η=0.01					
	αl	r=1	r=3	r=5	r=10	r=20	r=50
	0	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
P	1.875	1.44 (0.02)	0.48 (0)	0.28 (0)	0.13 (0)	0.06 (0)	0.02 (0)
	2.12	- -	23.76 (0.04)	15.16 (0.03)	7.66 (0.02)	3.52 (0)	0.94 (0)
A	2.360	- -	83.45 (0.59)	71.69 (0.44)	49.82 (0.22)	27.3 (0.1)	7.87 (0.03)
	3.53	- -	13.81 (0.19)	6.92 (0.09)	2.94 (0.04)	1.24 (0.02)	0.31 (0)
P	4.694	- -	9.79 (0.35)	5.62 (0.26)	2.62 (0.13)	1.16 (0.06)	0.3 (0.01)
	5.07	- -	29.87 (1.67)	18.42 (1.26)	9.05 (0.61)	4.09 (0.27)	1.07 (0.07)
A	5.450	- -	56.08 (4.19)	35.7 (3.04)	17.34 (1.49)	7.66 (0.67)	1.98 (0.17)

	6.65	- -	79.69 (6.00)	29.77 (3.49)	10.96 (1.71)	4.37 (0.78)	1.07 (0.2)
P	7.854	- -	>100 (10.05)	23.74 (6.01)	9.54 (3.01)	3.92 (1.38)	0.98 (0.36)
	8.24	- -	- -	>100 (7.82)	10.53 (3.97)	4.33 (1.83)	1.08 (0.48)

Анализ результатов расчета коэффициентов динамической податливости в системе с наличием демпфирования показывает, что учет остаточной податливости приводит к существенному уточнению и амплитуды и фазы. Как и в случае отсутствия демпфирования с увеличением значения безразмерного параметра (αl) отмечается повышение погрешности, погрешность при этом нарастает в меньшей степени, чем в системе с демпфированием. В областях близких к антирезонансам погрешности по фазе получаются существенно больше, чем погрешности по амплитуде.

Таким образом, во всех случаях статическая поправка, предложенная в настоящей статье, дает заметное увеличение точности вычислений. Если при этом выполняется частотный критерий – частота последнего учитываемого тона колебаний превышает верхнюю границу частотного диапазона, то точность вычислений оказывается вполне удовлетворительной.

Список литературы

1. Гусев А.С. Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 223 с.

2. Светлицкий В.А. Статистическая механика и теория надежности. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. 504 с.

3. Вибрации в технике. Справочник. В 6 т. Т. 1 / под ред. В.Н. Челомея. М.: Машиностроение. 352 с.

4. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. В 3 т. Т. 3 /под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 507 с.

5. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 271 с.

6. Крейг Р., Чжан К. Методы свободных границ для связывания субконструкций при исследовании динамики // Ракетная техника и космонавтика (русск. перевод журнала American Institute of Aeronautics and Astronautics). 1976. Т. 14, № 11. [Craig R., Chang C.-J. Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis // AIAA Journal. 1976. Vol. 14, no. 11. P. 1633-1635. DOI: 10.2514/3.7264].

7. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Improved formula for calculating coefficients of transfer matrix in statistical dynamics problems

03, March 2013

DOI: 10.7463/0313.0543198

Dmitriev S.N., Khamidullin R.K.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

dim.sm2@yandex.ru

In this paper the authors propose improved formulas for calculating coefficients of transfer matrix in the presence of damping. The authors consider a classical damping which means the damping matrix is proportional to the stiffness matrix. These formulas are designed for large finite-element models. Preliminary determination of the lower bound for natural frequencies and oscillation modes is expected. Approximate formulas are used only to calculate coefficients of obtained bending modes. In the revised formula contribution of higher vibration tones is taken into account; corrections for both real and imaginary parts of coefficients of the transfer matrix were also found. Contribution of rejected vibration tones is considered to be static, but within a given range of frequencies in the lower part of the spectrum accuracy is quite acceptable, and the effect of correction is significant.

Publications with keywords: dynamics, the transfer matrix, finite element, damping, dynamic compliance, a stationary random process

Publications with words: dynamics, the transfer matrix, finite element, damping, dynamic compliance, a stationary random process

References

1. Gusev A.S. *Verojatnostnye metody v mehanike mashin i konstrukcij* [Probabilistic methods in the mechanics of machines and constructions]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2009. 223 p.

2. Svetlickij V.A. *Statisticheskaja mehanika i teorija nadezhnosti* [Statistical mechanics and reliability theory]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2002. 504 p.

3. Chelomej V.N., ed. *Vibracii v tehnike. Spravochnik. V 6 t. T. 1* [Vibration in engineering. Reference book. In 6 vols. Vol. 1]. Moscow, Mashinostroenie. 352 p.

4. Birger I.A., Panovko Ja.G., eds. *Prochnost'. Ustojchivost'. Kolebanija. Spravochnik. V 3 t. T. 3* [Strength. Sustainability. Oscillations. Reference book. In 3 vols. Vol. 3]. Moscow, Mashinostroenie, 1968. 507 p.

5. Il'in M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Ju.S. *Teorija kolebanij* [Theory of oscillations]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2003. 271 p.

6. Craig R., Chang C.-J. Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 1976, vol. 14, no. 11, pp. 1633-1635. DOI: 10.2514/3.7264 (Russ. trans.: Krejg R., Chzhan K. Metody svobodnyh granic dlja svjazyvanija subkonstrukcij pri issledovanii dinamiki. *Raketnaja tehnika i kosmonavtika*, 1976, vol. 14, no. 11.).

7. Timoshenko S.P. *Kolebanija v inzhenernom dele* [Fluctuations in engineering]. Moscow, Nauka, 1967. 444 p.