НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами

03, март 2013
DOI: 10.7463/0313.0541146

Красинская Э. М., Красинский А. Я.

УДК 531.36

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
Россия, Московский государственный университет пищевых производств
krasinsk@mail.ru

1.Введение. Современный уровень развития силовой и микроэлектроники, информационных технологий, а также исполнительных приводов (в частности, создание высокомоментных электродвигателей с ранее не достижимыми массогабаритными характеристиками) вызывает все более широкое распространение управляемых механических и, особенно, мехатронных систем. Как известно, мехатронным является любое устройство, основная функция которого осуществляется за счет целенаправленного механического движения под действием управления, формируемого на основе обработки в реальном времени текущей измерительной информации.

В настоящее время для систем этого класса, имеющих в своем составе микроконтроллеры, оказывается возможной реализация в режиме реального времени алгоритмов управления практически любой сложности. Высокая конкуренция приводит к необходимости создания таких типов мехатронных систем, которые в наибольшей степени позволяли бы использовать особенности именно выбранного конкретного варианта устройства для уменьшения числа исполнительных устройств и сокращения объема необходимой для формирования управления измерительной информации, превращая эти особенности в преимущества перед другими возможными вариантами конструкций.

Этим обусловлено то, что многие проблемы динамики сложных систем, исследование которых ранее могло представлять только абстрактно-теоретический интерес (таких, например, как общие задачи устойчивости и стабилизации стационарных движений неголономных систем), превратились в задачи актуальной технической практики (например, задача стабилизации стационарного движения робота на твердых колесах с дифференциальным приводом).

В этой связи особую актуальность приобретает рассмотрение свойств устойчивости исследуемых движений: именно устойчивость желаемого режима функционирования определяет работоспособность управляемой системы. Очевидно, что и для мехатронных систем (с самой совершенной структурой и аппаратным исполнением системы управления) изучение динамики механической составляющей системы, как ее важнейшей части совершенно необходимо.

Таким образом, потребности современной технической практики приводят к необходимости создания теоретически строго обоснованных, эффективных и наиболее простых при практическом применении приемов для возможно более полного использования свойств собственных (без приложения дополнительных воздействий) движений (режимов работы) объекта. При этом в мехатронике, как и вообще в любой области науки и техники, объединяющей достижения разных направлений, достаточно часто оказывается, что существующий уровень развития того или иного направления не вполне достаточен для решения возникшей из запросов практики проблемы.

Именно так обстоит дело с исследованием систем с избыточными координатами. В то время, как проблемы математического описания динамики таких систем издавна привлекали внимание и составили предмет рассмотрения многих работ по аналитической механике, задачи устойчивости и стабилизации установившихся движений этого класса систем изучены недостаточно, несмотря на их не только большое теоретическое значение, но и обоснованную нуждами технической практики необходимость их строгого рассмотрения.

Ниже приводится краткий обзор результатов по аналитической механике систем с избыточными координатами и обосновываются преимущества (в применении к задачам устойчивости и стабилизации) используемого в данной работе способа получения уравнений движения таких систем.

Обзор предшествующих результатов. Для исследования динамики механических систем традиционно используется наиболее универсальный формализм, основанный на введении обобщенных (независимых) координат. Но процедура выбора таких координат может оказаться далеко непростой задачей, т.к. в механике приходится рассматривать, в основном, не свободные системы, а системы с наложенными на них связями.

Во многих актуальных технических задачах, в частности, управления многозвенными манипуляторами и другими мехатронными системами, целесообразно [1-6] задавать конфигурацию механической системы параметрами $q_1,\ldots,q_{n+m}$, взятыми в числе, превосходящем необходимое n - число степеней свободы системы. Тогда m из этих $n+m$ параметров называются избыточными координатами. Между $n+m$ параметрами $q_1,\dots,q_n,\dots,q_{n+m}$ существуют m независимых соотношений (которые, вообще говоря, даже в практических задачах могут [7] содержать и время)

$$F_k(q_1,\dots,q_{n+m}) = 0 \quad (k = \overline{1,m}), \qquad rank\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(q_1,\dots,q_{n+m})} = m \tag{1}$$

Исключение из этих выражений лишних зависимых координат во многих случаях приводит к громоздким формулам, особенно когда в уравнениях связей присутствуют тригонометрические функции ([2], с. 20-21). Зачастую это имеет место в задачах управления манипуляторами, например, когда объект, удерживаемый в схвате робота, перемещается по поверхности, описываемой уравнениями связи ([7], с. 288).

Использование избыточных координат требует дать другую постановку задач динамики [1-3]. Нельзя будет пользоваться уравнениями Лагранжа второго рода, так как при их выводе предполагается введение независимых обобщенных координат, вариации которых будут также независимы. Для рассматриваемых систем можно пользоваться уравнениями Лагранжа первого рода в декартовых координатах или уравнениями Лагранжа с множителями связей в избыточных криволинейных координатах [1-3] (в приложении к задачам управления манипуляционными роботами - [7]). Общее число уравнений становится равным сумме числа переменных и числа связей. Непосредственное интегрирование такой системы уравнений является достаточно сложной задачей.

Если в исследованиях не предполагается определение реакций связей, то естественно возникает необходимость исключения неопределенных множителей из полученных уравнений. Такое исключение может быть выполнено различными методами [1-5].

В частности, предлагался ([3], с. 328-331) следующий подход к исключению множителей связей: уравнения геометрических связей предлагалось дифференцировать два раза и один раз – уравнения дифференциальных связей, а затем подставлять в эти условные уравнения ускорения как линейные функции множителей связи из уравнений движения. Множители находятся из полученной линейной алгебраической неоднородной системы уравнений. В [4] этот способ исключения множителей развивается применительно к новому классу задач. Аналитические выражения для множителей впервые получены и исследованы А.М. Ляпуновым [5] и Г.К. Сусловым [3].

Исключение множителей связей возможно осуществить и при однократном дифференцировании уравнений геометрических связей [1, 2, 6]. Отметим, что такое использование продифференцированных геометрических (голономных) связей для исключения множителей связей предлагалось еще в [2] (с. 319-321). Однако широкого распространения этот подход не получил, возможно, потому, что этот метод излагался Лурье А.И. применительно к уравнениям Лагранжа с множителями для неголономных систем (систем с неинтегрируемыми дифференциальными связями), и просто отмечалось, что среди дифференциальных связей могли быть и интегрируемые.

Методика, связанная с однократным дифференцированием геометрических связей и применением уравнений движения, получаемых из общих теорем динамики, отрабатывалась в [6].

Гораздо более простой и эффективный для практического применения метод получения свободных от множителей связей уравнений движения систем с избыточными координатами разработан М.Ф. Шульгиным в [1]. В связи с тем, что [1] является библиографической редкостью, далее вывод уравнений движения систем с избыточными координатами в форме М.Ф. Шульгина будет изложен в соответствующем разделе.

В данной статье разрабатывается методика использования такой формы уравнений движения применительно к задачам устойчивости и стабилизации положений равновесия систем с избыточными координатами.

Выбор именно этого подхода связан не только с простотой получения этих уравнений. Дело в том, что использование продифференцированных уравнений геометрических связей в задачах устойчивости неизбежно приводит к появлению у характеристического уравнения системы первого приближения нулевых корней в числе, не меньшем числа связей. Таким образом, устойчивость равновесий систем с избыточными координатами возможна только в критических случаях [8-10].

Поэтому гораздо больше объективных оснований для такого выбора дает то обстоятельство, что именно используемая в данной работе форма уравнений движения допускает применение в этих задачах ранее полученных [11-13] результатов, основанных на теории критических случаев. Выполненные в этих работах исследования задач устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем в ситуациях, когда число нулевых корней равно размерности соответствующего многообразия, основаны на начатом еще в [14] (ср. [15]) систематическом применении векторно-матричных уравнений возмущенного движения с выделенным первым приближением [16-21].

Особо нужно упомянуть о том, что во всех работах [11-14, 16-21] применение принципа сведения [8-10] теории критических случаев приводило ситуацию к особенному случаю и, соответственно, к заключению лишь о неасимптотической устойчивости по отношению ко всем переменным. При этом, согласно природе рассмотренных в упомянутых работах задач, на начальные возмущения соответствующих нулевым корням переменных не накладывалось никаких условий.

Разумеется, для систем с геометрическими связями можно было, имея в виду практически полное отсутствие результатов по систематическому исследованию устойчивости их движений, сняв условия, накладываемые связями на начальные возмущения, рассматривать более задачи об устойчивости равновесий в специальной постановке, сводящей такие задачи к уже исследованным в [11-14, 16-21] задачам. Именно такие исследования выполнены в [22-23]. Однако следует обратить внимание на то, что таким методом для систем с избыточными координатами могут быть получены только положительные заключения о неасимптотической устойчивости (поскольку при наличии безусловной устойчивости наложение любых связей на начальные возмущения не может привести к неустойчивости). Достаточные условия асимптотической устойчивости на этом пути не могут быть получены в принципе.

Необходимость выполненных в данной работе дополнительных исследований по устойчивости равновесия систем с избыточными координатами была обусловлена не только незавершенностью чисто теоретического рассмотрения этой проблемы. Не меньшее значение для авторов имело следующее обстоятельство. Одной из наиболее популярных во всем мире лабораторных установок для изучения теории и методов формирования управления в инженерном образовании является [24] система «шар и балка» (Ball and Beam) в различных конструктивных модификациях, в частности, **GBB1005 Ball&Beam Educational Control System** [25]. Система управления этой реальной мехатронной установки обеспечивает асимптотическую по всем переменным устойчивость заданного положения равновесия шарика. При этом ни в одной из многочисленных (многие десятки) работ не было ни одного строго доказанного результата о такой устойчивости равновесия этой и аналогичных (таких, как Quanser Model SRV02 and BB01) систем (см., напр., [26, 27] с большим количеством библиографических ссылок).

Несмотря на усилия многочисленных исследователей, изучение проблемы стабилизации в этой систем далеко от завершения. Это связано с тем, что, как отмечено в [27], динамика этой системы характеризуется «высокой нелинейностью», система обладает «внутренней неустойчивостью». Однако во всех работах при получении математической модели, так или иначе, без всякого обоснования используется линеаризация сложной нелинейной геометрической связи. Поэтому используемые во всех опубликованных работах модели являются неточными, что имеет принципиальное значение, особенно при исследовании устойчивости.

Таким образом, несмотря на большое количество исследований, динамика системы Ball and Beam требует дальнейшего рассмотрения, в том числе и в отношении устойчивости. Как и любую систему со сложными геометрическими связями (которые не дают возможности исключения зависимых координат), гораздо выгоднее рассматривать эту систему, как систему с избыточными координатами, используя продифференцированные (линейные относительно скоростей!) уравнения связей. Но для такого рассмотрения возникла необходимость в анализе результатов по аналитической механике систем с избыточными координатами и систематическом исследовании их устойчивости, что и является целью настоящей работы.

В данной работе на основе выполненного анализа различных форм уравнений движения систем с геометрическими связями показано, что рассмотрение таких систем, как систем с избыточными координатами, при использовании продифференцированных один раз уравнений связей и уравнений М.Ф. Шульгина позволяет достаточно просто получить точные математические модели. Тем самым создана общая методология исследования устойчивости и стабилизации систем с геометрическими связями.

В полной постановке рассмотрена задача об устойчивости равновесия систем с избыточными координатами.

Впервые на основе теории критических случаев доказана теорема об асимптотической устойчивости равновесия систем с избыточными координатами, если число нулевых корней характеристического уравнения равно числу связей, а действительные части остальных его корней отрицательны.

Впервые установлено, что, несмотря на формальное сведение задачи к особенному случаю критического случая нулевых корней, число которых равно числу связей, многообразие равновесий отсутствует из-за условий, накладываемых связями на начальные возмущения.

Таким образом, учет ограничений, накладываемых связями на начальные возмущения, дал новый результат: для равновесий систем с избыточными координатами доказана условная асимптотическая устойчивость в смысле классического определения Ляпунова.

Выделены классы систем, в которых правильные заключения об устойчивости могут быть получены из рассмотрения упрощенной за счет учета только первого приближения уравнений связей задачи.

Эффективность предлагаемого подхода в приложении к системам с избыточными координатами подтверждена строгим рассмотрением задачи стабилизации до асимптотической устойчивости положения равновесия в реальном мехатронном стенде

GBB1005 Ball&Beam Educational Control System. При учете динамики электропривода доказана принципиальная разрешимость этой задачи.

Отметим, что при необходимости для определения управляющих воздействий может быть использована процедура решения соответствующей линейно-квадратичной задачи стабилизации [28]. Имеется оригинальная программная реализация разрабатываемого метода [29], апробированная на различных задачах устойчивости и стабилизации (например, в том числе, и для неголономных систем с избыточными координатами [30]).

2.Вывод уравнений М.Ф. Шульгина. Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы., конфигурация которой определяется параметрами $q_1,\ldots,q_{n+m}$, взятыми в числе, превосходящем необходимое. Допустим, что между $n+m$ параметрами $q_1,\ldots,q_n,\ldots,q_{n+m}$ существуют m независимых соотношений (1), причем таких, что, как отмечалось выше, исключение из этих выражений лишних зависимых координат оказывается нецелесообразным. Пусть, кроме того, в исследованиях не предполагается определение реакций связей.

Обсудим, какими способами предлагалось получать уравнения движения, не содержащие множителей связей и обоснуем выбор именно уравнений Шульгина, как наиболее подходящий для решения задач устойчивости и стабилизации движений систем с избыточными координатами.

Если продифференцировать по времени уравнения геометрических связей, наложенных на систему с избыточными координатами, получим кинематические (голономные) связи в виде

$$\sum_{s=1}^{n+m} b_{ks}\dot{q}_s = 0 \quad (k = \overline{1,m}) \tag{2}$$

Геометрические связи (1) или связи (2) налагают на вариации координат следующие условия

$$\sum_{s=1}^{n+m} b_{ks}\delta q_s = 0 \quad (k = \overline{1,m})$$

Здесь $b_{ks} = \dfrac{\partial F_k}{\partial q_s}$, причем $\dfrac{\partial b_{ks}}{\partial q_r} = \dfrac{\partial b_{kr}}{\partial q_s}$, так как связи интегрируемы и представимы в виде (1).

Пусть $T(q_1,\dots,q_{n+m},\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_{n+m})$ кинетическая энергия без учета связей, а $\tilde{Q}_s$ (потенциальные и непотенциальные) силы, отнесенные к координатам q_s. Тогда из принципа Даламбера-Лагранжа получим [1-3] уравнения движения системы с избыточными координатами с множителями связей

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \tilde{Q}_s + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_{ks} \quad , \quad s = \overline{1, n+m} \tag{3}$$

С другой стороны, допуская, исходя из (1), без ограничения общности, что в рассматриваемой области пространства

$$\det\left[\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(q_{n+1},\dots,q_{n+m})}\right] \neq 0 \tag{4}$$

можем представить связи (2) в разрешенном относительно скоростей зависимых координат виде

$$\dot{q}_k = \sum_{j=1}^{n} B_{kj}(q_1,\dots,q_{n+m})\dot{q}_j \quad k = \overline{n+1, n+m} \tag{5}$$

Тогда из последних m уравнений (3) для множителей имеем выражения

$$\lambda_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \tilde{Q}_k \quad k = \overline{n+1, n+m}\ ,$$

подставляя которые в уравнения для остальных координат, будем иметь не содержащие множителей связей уравнения в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j - \sum_{k=n+1}^{n+m} B_{kj}(q_1,\dots,q_{n+m})\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \tilde{Q}_k\right), \quad j = \overline{1, n} \tag{6}$$

В несколько ином виде аналогичные уравнения получены в [2] (с. 320-321).

Хотя Лурье А.И. и предполагает разрешимость уравнений (2) относительно зависимых скоростей, он не записывает их в виде (5). Поэтому уравнения для множителей (7.10.8) и, соответственно, полученные Лурье А.И. уравнения движения (7.10.9) ([2] с. 320) без множителей имеют более сложный вид, чем вышеприведенные (6). На этом этапе рассмотрение Лурье А.И. излагаемого метода заканчивается.

Шульгин М.Ф. проводит дальнейшие преобразования уравнений (6), делающие использование получаемых при этом уравнений гораздо более простым, нежели (6).

Исключим, следуя [1], из $T(q_1,\ldots,q_{n+m},\dot q_1,\ldots,\dot q_{n+m})$ зависимые скорости с помощью уравнений связей (5). Обозначая полученное выражение кинетической энергии через $T^*(q_1,\ldots,q_{n+m},\dot q_1,\ldots,\dot q_n)$, сравнивая соответствующие производные от T и T^* и учитывая интегрируемость кинематических связей (2), получим уравнения движения системы в избыточных координатах М.Ф. Шульгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial T^*}{\partial q_j}-\sum_{k=n+1}^{n+m}B_{kj}(q_1,\ldots,q_{n+m})\frac{\partial T^*}{\partial q_k}=\tilde Q_j+\sum_{k=n+1}^{n+m}B_{kj}(q_1,\ldots,q_{n+m})\tilde Q_k,\ j=\overline{1,n} \tag{7}$$

Уравнения (7) не содержат множителей связей, и их число равно числу степеней свободы системы. Эти уравнения следует рассматривать совместно с уравнениями связей (5).

Следует обратить особое внимание на следующее весьма важное, на наш взгляд, обстоятельство. Система уравнений (7), может быть рассматриваться как частный случай уравнений движения неголономных систем с однородными связями в форме Воронца, в предположении интегрируемости уравнений кинематических связей (5), когда члены неголономности в уравнениях Воронца обращаются в нуль [1, 31, 32]. Отметим, что это позволяет применять к исследованию динамики систем с избыточными координатами все методы, разработанные для изучения динамики неголономных систем. Но, вместе с тем, кроме принципиально иной структуры (из-за отсутствия членов неголономности), эти уравнения имеют и другие особенности, которые требуют дальнейшего изучения и использования.

Поэтому, прежде, чем переходить к векторно-матричным уравнениям, сначала в общем случае далее будут составлены скалярные уравнения Шульгина с выделенным в окрестности исследуемого равновесия первым приближением. Особое внимание будет обращено на отличия их структуры от соответствующих уравнений как голономных, так и неголономных систем.

3. Явный вид уравнений движения с избыточными координатами М.Ф. Шульгина в скалярной форме. Первоначальная кинетическая энергия без учета связей (1), которая в общем случае равна

$$T=T_2+T_1+T_0=\frac{1}{2}A_{\gamma\nu}(q)\dot q_\gamma\dot q_\nu+A_\gamma(q)\dot q_\gamma+T_0(q) \tag{8}$$

после исключения зависимых скоростей с помощью (5) получит вид

$$T^*=\frac{1}{2}a_{s\rho}(q)\dot q_s\dot q_\rho+d_s(q)\dot q_s+T_0(q)=T_2^*+T_1^*+T_0(q) \tag{9}$$

$$a_{s\rho}(q) = A_{s\rho} + A_{\mu s} B_{\mu\rho} + A_{\mu\rho} B_{\mu s} + A_{\mu\sigma} B_{\mu\rho} B_{\sigma s}\ , \quad d_s(q) = A_s + A_\mu B_{\mu s}$$

Здесь и далее по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование. Индексы меняются следующим образом: $\gamma, \nu = \overline{1, n+m}$; $i, j, s, \rho = \overline{1, n}$; $\mu, k = \overline{n+1, n+m}$. Уравнения Шульгина (7) представим в явной форме:

$$\begin{gathered} a_{is}\ddot{q}_s + \frac{\partial a_{is}}{\partial q_j}\dot{q}_s\dot{q}_j + \frac{\partial a_{is}}{\partial q_\mu} B_{\mu\rho}\dot{q}_s\dot{q}_\rho - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{s\rho}}{\partial q_i}\dot{q}_s\dot{q}_\rho - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{s\rho}}{\partial q_\mu} B_{\mu i}\dot{q}_s\dot{q}_\rho + \\ + \left(\frac{\partial d_i}{\partial q_s} - \frac{\partial d_s}{\partial q_i} + B_{\mu s}\frac{\partial d_i}{\partial q_\mu} - B_{\mu i}\frac{\partial d_s}{\partial q_\mu}\right)\dot{q}_s + \frac{\partial W}{\partial q_i} + B_{\mu i}\frac{\partial W}{\partial q_\mu} = Q_i + B_{\mu i} Q_\mu \\ \dot{q}_\mu = B_{\mu i}\dot{q}_i \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь $W(q) = \Pi(q) - T_0(q)$ - измененная (приведенная) потенциальная энергия, $\Pi(q)$ - потенциальная энергия, через Q_i, Q_μ теперь обозначены непотенциальные силы, соответствующие координатам $q_{i,} q_\mu$ при их избыточном введении.

Уравнения равновесия можно получить из этих уравнений, полагая все $\dot{q} = 0$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} + B_{\mu i}\frac{\partial W}{\partial q_\mu} = Q_{i(\dot{q}=0)} + \left(B_{\mu i} Q_\mu\right)_{(\dot{q}=0)} \tag{11}$$

При $T_0(q) = 0$ и отсутствии непотенциальных сил получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + B_{\mu i}\frac{\partial \Pi}{\partial q_\mu} = 0$$

<u>*Замечание 1.*</u> Отсюда следует, что положение равновесия при использовании избыточных координат может не быть стационарной точкой потенциальной энергии. Однако, если потенциальная энергия может быть выражена через независимые обобщенные координаты $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$, то для нее при отсутствии непотенциальных позиционных сил все $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \qquad i = \overline{1, n}$.

<u>*Замечание*</u> 2. В общем случае при отсутствии непотенциальных позиционных сил положение равновесия определяется из уравнений для приведенной потенциальной энергии $W(q)$. Эти уравнения будут уравнениями относительного равновесия. Например,

при сложном движении механической системы $T_o(q)$ представляет собой кинетическую энергию переносного движения системы [2].

Очевидно, уравнений (10) недостаточно для определения положений равновесия. К ним необходимо еще присоединить уравнения геометрических связей (1).

4.Структура уравнений возмущенного движения. Пусть система допускает положение равновесия.

$$q_i = q_{i0}, \quad q_\mu = q_{\mu 0} \tag{12}$$

Введем возмущения, составим уравнения возмущенного движения и выделим в них первое приближение

$$q_{i0} = q_{i0} + x_i \, , q_\mu = q_{\mu o} + y_\mu$$

$$\begin{gathered} a_{is}(0)\ddot{x}_s + \left[\left(\frac{\partial d_i}{\partial q_s}\right)_0 - \left(\frac{\partial d_s}{\partial q_i}\right)_0 + B_{\mu s}(0)\left(\frac{\partial d_i}{\partial q_\mu}\right)_0 - \left(\frac{\partial d_s}{\partial q_\mu}\right)_0 B_{\mu i}(0)\right]\dot{x}_s + \\ \cdot\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_s}\right)_0 + B_{\mu i}(0)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_\mu \partial q_s}\right)_0 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_\mu}\right)_0\left(\frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_s}\right)_0\right]x_s + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 y_k + \\ + B_{\mu i}(0)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial q_\mu}\right)_0 y_k + \left(\frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_k}\right)_0\left(\frac{\partial W}{\partial q_\mu}\right)_0 y_k = X_i^{(2)}(\dot{x}, x, y) \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $X_i^{(2)}(\dot{x}, x, y)$ нелинейные члены; верхний индекс в скобках означает порядок младших членов в разложении соответствующего выражения. Добавим к этим уравнениям уравнения дифференциальных связей с выделенным первым приближением

$$\begin{gathered} \dot{y}_k = B_{jk}(0)\dot{x}_k + B_{jk}^{(1)}(x, y)\dot{x}_k \, ; \, B_{jk}^{(1)}(x, y) = B_{jk}(q_{i0} + x, q_{\mu 0} + y) - B_{jk}(q_{i0}, q_{\mu 0}); \\ B_{jk}(q_{i0}, q_{\mu 0}) = B_{jk}(0) \end{gathered} \tag{14}$$

Если в системе (13), (14) провести линейную замену [31, 32]

$$z_k = y_k - B_{kj}(0)x_j \, , \tag{15}$$

то уравнения связей примут вид

$$\dot{z}_k = B_{kj}^{(1)}(x, z + B(0)x)\dot{x}_k \, , \tag{16}$$

Очевидно, переменным z_k соответствуют нулевые корни характеристического уравнения, т.к. справа в уравнениях (16) после замены (15) отсутствуют линейные члены.

Уравнения (13) для простоты составлены без учета непотенциальных сил. Пусть теперь на систему, кроме потенциальных, действуют еще непотенциальные позиционные силы и силы, зависящие от скоростей. Выделяя в них первое приближение и используя векторно-матричную форму записи, будем иметь

$$Q_\gamma = g_{\gamma j}\dot{q}_j + g_{\gamma\mu}\dot{q}_\mu + p_{\gamma j}q_j + p_{\gamma\mu}q_\mu + \ldots$$

Исключая из этих сил зависимые скорости, и, выполнив замену (15), для ненулевых корней характеристического уравнения системы первого приближения при действии непотенциальных сил получим

$$\det[A\lambda^2 + (\Gamma + D)\lambda + C_1 + C_2 B + B' C_3 + B' C_4 B + C^B + P] = 0 \qquad (17)$$

$$D = \left\| g_{ij} + g_{i\mu}B_{\mu j} + g_{\mu j}B_{\mu i} + g_{\mu k}B_{\mu i}B_{kj} \right\|; \quad P = \left\| p_{ij} + p_{i\mu}B_{\mu j} + B_{\mu j}p_{\mu j} + B_{\mu i}p_{\mu k}B_{kj} \right\|$$

$$A = \left\| a_{ij}(0) \right\|; \Gamma = \left\| \gamma_{is}(0) \right\|; \quad C_1 = \left\| \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_s} \right)_0 \right\|; \quad C_2 = \left\| \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_\mu} \right)_0 \right\|; C_4 = \left\| \left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_\mu \partial q_\sigma} \right)_0 \right\|; C_3 = C_2';$$

$$C^B = \left\| \left(\frac{\partial W}{\partial q_\mu} \right)_0 \left(\frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_s} \right)_0 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_\mu} \right)_0 \left(\frac{\partial B_{\mu i}}{\partial q_k} \right)_0 B_{ks}(0) \right\|; \quad B = \left\| B_{\mu i}(0) \right\|;$$

$$\gamma_{is}(0) = \left[\left(\frac{\partial d_i}{\partial q_s} \right)_0 - \left(\frac{\partial d_s}{\partial q_i} \right)_0 + B_{\mu s}(0) \left(\frac{\partial d_i}{\partial q_\mu} \right)_0 - \left(\frac{\partial d_s}{\partial q_\mu} \right)_0 B_{\mu i}(0) \right]$$

Замечание 3. Если среди корней характеристического уравнения (17) имеется хотя бы один с положительной действительной частью, положение равновесия будет неустойчиво, например, в случае, когда

$$\det\left[C_1 + C_2 B + B' C_3 + B' C_4 B + C^B + P\right] < 0$$

В последнем случае свободный член характеристического уравнения отрицателен и среди корней имеется хотя бы один с положительной действительной частью. Доказательство следует из теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

5.Достаточное условие асимптотической устойчивости равновесия систем с избыточными координатами. В силу того, что полное характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^m \det[A\lambda^2 + (\Gamma + D)\lambda + C_1 + C_2 B + B' C_3 + B' C_4 B + C^B + P] = 0 \qquad (18)$$

Устойчивость положений равновесия систем с избыточными координатами возможна лишь в критических случаях, когда число корней характеристического уравнения на мнимой оси не меньше числа геометрических связей. При этом вопрос об устойчивости (неасимптотической) формально, казалось бы, решается с помощью теоремы Ляпунова-

Малкина [8-10] об устойчивости в особенном случае. Именно такие результаты получены в [21-23] при условии, что на начальные возмущения никаких условий (в том числе и геометрических связей) не наложено.

Но, как известно, в особенных случаях исследуемые движения являются не изолированными, а располагаются на многообразиях соответствующих размерностей. Другими словами, в таких случаях, вообще говоря, при сколь угодно малом начальном возмущении система не может вернуться в исходное равновесие, а только в некоторое другое, отличное от невозмущенного. В то же время, очевидно, если геометрические связи независимы, равновесия таких систем с избыточными координатами являются изолированными (как например, в системе Ball&Beam при действии стабилизирующего управления). А такие равновесия могут быть при соответствующем расположении корней только асимптотически устойчивыми. Ни одного строго доказанного результата об асимптотической устойчивости равновесия систем с избыточными координатами до сих пор установлено не было.

В данной работе в избыточных координатах ставится задача об устойчивости положения равновесия систем с геометрическими связями, находящихся под действием потенциальных и непотенциальных сил. Впервые доказано, что для систем с избыточными координатами, в отличие от неголономных систем, несмотря на формальное сведение задачи к особенному случаю, имеет место асимптотическая устойчивость равновесия по отношению ко всем координатам и скоростям. Принципиальную роль в приводимом доказательстве играет проведенный строгий анализ условий на начальные возмущения, вытекающих из выполнения геометрических связей.

Теорема. Для системы с геометрическими связями (1), находящейся под действием произвольных потенциальных и непотенциальных сил положение равновесия (12) устойчиво асимптотически, если действительные части всех корней характеристического уравнения (17) системы первого приближения уравнений возмущенного движения отрицательны.

Доказательство: Перейдем к векторно-матричным уравнениям возмущенного движения в нормальной форме, для чего введем обозначения

$$F_k(q_1,...,q_{n+m}) = 0; \quad k = \overline{1,m}; \quad \frac{\partial\left(F_1,\ldots F_m\right)}{\partial\left(q_{n+1},...,q_{n+m}\right)} \neq 0;$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial F}{\partial s}\dot{s} = 0; \qquad F'(q) = (F_1(q),\ldots,F_m(q));$$

$$q=\begin{pmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_{n+m}\end{pmatrix};\quad q=\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix};\quad r=\begin{pmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix};\quad s=\begin{pmatrix}q_{n+1}\\ \vdots\\ q_{n+m}\end{pmatrix};\qquad Q_r=\begin{pmatrix}Q_1\\ \vdots\\ Q_n\end{pmatrix};Q_s=\begin{pmatrix}Q_{n+1}\\ \vdots\\ Q_{n+m}\end{pmatrix};$$

$$\dot{s}=B(r,s)\dot{r};\quad B(r,s)=-\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) \tag{5'}$$

Запишем положение равновесия (12) в векторных переменных

$$r=r_0;\quad s=s_0, \tag{19}$$

которое, естественно, удовлетворяет уравнению связей, так что

$$F(r_0,s_0)=0. \tag{20}$$

Введем возмущения

$$r=r_0+x;\quad \dot{r}=x_1;\quad s=s_0+y;$$

и составим уравнения возмущенного движения в окрестности положения равновесия (19), выделив в них первое приближение и приведя их к нормальной форме:

$$\begin{aligned}&\dot{x}=x_1;\\ &\dot{x}_1=ax+bx_1+hy+X_1^{(2)}(x,x_1,y);\\ &\dot{y}=B(x,y)x_1\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь a,b,c постоянные матрицы соответствующих размерностей, известным образом [11-14] выражающиеся через кинетическую энергию, действующие потенциальные и непотенциальные силы и матрицу коэффициентов в уравнениях связей. После неособенной линейной замены, приводящей уравнения к специальному виду Ляпунова теории критических случаев [8-10]

$$y=z+B(0)x;\quad B(0)=B(r_0,s_0) \tag{22}$$

уравнение связи – последнее уравнение системы (21) получит форму

$$\dot{y}=\dot{z}+B(0)x_1=(B(0)+\tilde{B}^{(1)}(x,z))x_1;\ \tilde{B}^{(1)}(x,z)=B^{(1)}(x,z+B(0)x)$$

или

$$\dot{z}=\tilde{B}^{(1)}(x,z)x_1; \tag{23}$$

Тогда система (21) примет вид

$$\begin{aligned}&\dot{x}=x_1;\\ &\dot{x}_1=ax+bx_1+h(z+B(0)x)+\tilde{X}_1^{(2)}(x,x_1,z);\\ &\dot{z}=\tilde{B}^{(1)}(x,z)x_1;\end{aligned} \tag{24}$$

В задаче об устойчивости положения равновесия

$$x = 0; \quad x_1 = 0; \quad z = 0; \tag{25}$$

этой системы, соответствующего в исходных переменных положению равновесия (19), имеет место критический случай m нулевых корней, соответствующих переменной z, если действительные части всех корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} E_n\lambda & -E_n \\ -a - hB(0) & E_n\lambda - b \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

отрицательны. При таком расположении корней всегда существует [8-10] нелинейная замена

$$x = \xi + u(z), \tag{27}$$

исключающая свободно входящие критические переменные и сводящая этот критический случай к особенному случаю m нулевых корней. При этом $u(z)$ определяется из уравнения

$$(a + hB(0))u + hz + \tilde{X}_1^{(2)}(u, 0, z) = 0 \tag{28}$$

Таким образом, положение равновесия (25), согласно принципу сведения, оказывается, вообще говоря, не изолированным, а расположенным на многообразии

$$\xi = 0; \quad z = z_0 = const; \quad x_1 = 0; \tag{29}$$

и возмущенное движение асимптотически стремится к положению равновесия

$$z = \tilde{z}; \quad x = u(\tilde{z}); \quad x_1 = 0; \tag{30}$$

При этом, согласно общей теории критических случаев, вообще говоря, $z = z_0 = const \neq 0$. Поэтому формальное применение теории особенных случаев, без подробного анализа условий, налагаемых связями на возмущения переменной z, гарантирует, как минимум, неасимптотическую [8-10, 33] устойчивость положения равновесия (25).

Исследуем вопрос о том, может ли переменная z быть отличной от нуля. Согласно уравнению связей, начальные возмущения x^*, y^* должны удовлетворять условию

$$F(r_0 + x^*, s_0 + y^*) = 0 \tag{31}$$

Разлагая левую часть (31) в ряд в окрестности точки (25) и выделяя члены первого порядка, получаем

$$0 = F(r_0 + x^*, s_0 + y^*) = F(r_0, s_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_0 x^* + \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_0 y^* + F^{(2)}(x^*, y^*)$$

откуда, приравнивая нулю члены первого порядка, имеем в силу (4)

$$y^* = -\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_0^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_0 x^* \tag{32}$$

С другой стороны, согласно соотношениям (22) и (5’), для начальных возмущений получаем

$$z* = y* + \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_0^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_0 x*$$

Отсюда, в силу (32), следует, что для того, чтобы начальные возмущения исходных переменных удовлетворяли связям, для начальных возмущений переменной z возможно только значение

$$z* = 0 \tag{33}$$

Более того, переменная z должна оставаться тождественно равной нулю и во все время движения, если оно происходит в области, где выполнено условие (4). Так как, согласно ранее доказанному, положение равновесия (25) устойчиво, по крайней мере, неасимптотически, изображающая точка во все время движения остается в малой окрестности равновесия (25), причем во все время движения связи должны выполняться. Если предположить, что существует такой момент времени $t*$, что находящийся в силу устойчивости в локальной окрестности равновесия (25) вектор $z(t*) \neq 0$, то в силу связей (1), должно быть выполнено условие

$$0 = F(r_0 + x(t*), s_0 + y(t*)) = F(r_0 + x(t*), s_0 + z(t*) + B(0)x(t*)) = F(r_0, s_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_0 x(t*) +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_0 z(t*) + \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_0 B(0)x(t*) + F^{(2)}(x(t*), z(t*))$$

Приравнивая нулю члены первого порядка и учитывая (20) и то, что $B(0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_0^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_0$, имеем

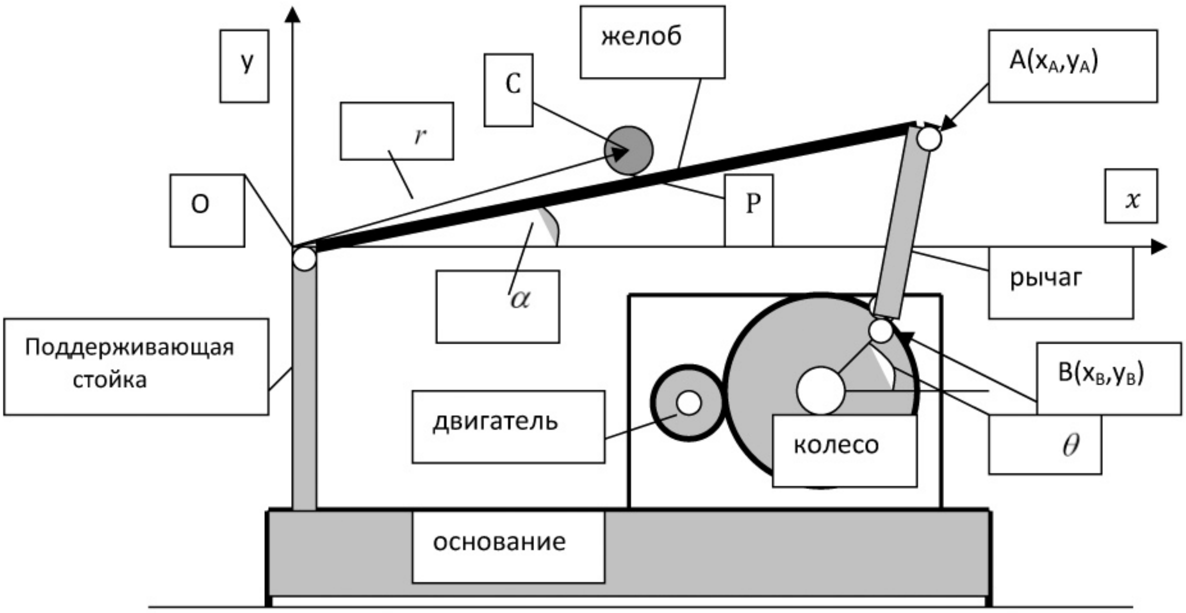
$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_0 z(t*) = 0 \tag{34}$$

Вследствие условия (4) определитель матрицы коэффициентов этой системы линейных однородных алгебраических соотношений между компонентами вектора $z(t*)$ отличен от нуля. В таком случае система линейных уравнений (34) относительно $z(t*)$ имеет только нулевое решение. Таким образом, доказано, что переменная $z(t) \equiv 0$. Вследствие этого многообразие (30) вырождается в точку $z = 0; \quad x =; \quad x_1 = 0;$

Отсюда следует асимптотическая устойчивость положения равновесия (25), если действительные части всех корней уравнения (26) отрицательны. Изложенные выше результаты частично докладывались на конференциях [34, 35].

6.Пример применения предлагаемой методики. Стабилизация равновесия системы GBB1005 Ball&Beam Educational Control System («Шар и желоб») [24]**.**

Ball & Beam – достаточно универсальный инструмент для изучения динамики нелинейных управляемых объектов. В этой системе электропривод за счет наклона желоба может перекатить шарик в любое наперед заданное положение на желобе и стабилизировать это равновесие. Управление реализовано в виде обратной связи по информации о положении $r(t)$ шарика на желобе, и угле поворота колеса $\theta(t)$.



Шарик может катиться без проскальзывания свободно по всей длине желоба. Желоб присоединен к неподвижной поддерживающей стойке с одной стороны, и к подвижному рычагу с другой. При $\alpha = 0$ и $\theta = 0$, рычаг AB вертикален. Движение рычага управляется двигателем постоянного тока.

Для механической части системы, включающей шар и ротор двигателя с редуктором, кинетическая и потенциальная энергии имеют вид

$$\left.\mathrm{T} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m(r\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} J\left(\frac{\dot{r}}{R} - \dot{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2} J_0\dot{\theta}^2 ; \Pi = mgr\sin\alpha \quad \right\}$$

R - радиус шара ; m - его масса; J - момент инерции шара; J_0 - - момент инерции всей системы, приведённый к двигателю. Здесь, в отличие от [25], за полную угловую скорость шарика вокруг центра масс принято выражение $\frac{\dot{r}}{R} - \dot{\alpha}$.

Замечание 4. Принятые в данной работе выражения для T и Π будут справедливы в предположении $R/r << 1$ (когда для рассматриваемого положения равновесия $r_0 >> R$). В более строгой постановке, вообще говоря, надо учесть, что расстояние OC от начала координат O до центра шара C и расстояние OP от начала координат до точки P соприкосновения шара с желобом связаны соотношением $OC^2 = OP^2 + R^2$ и выражения для кинетической и потенциальной энергий определяются тем, что именно принято в качестве обобщенной координаты r - величины OC или OP. И в том, и в другом случае более точные выражения для T и Π будут отличаться от принятых в данном рассмотрении.

6.1.Упрощенное моделирование с учетом линейной связи. Для описания механической части системы **Ball&Beam** практически во всех работах вводятся три координаты, одна из них является избыточной (лишней). Будем в этом разделе считать, как и в [24-27], что уравнение связи имеет вид $\alpha \approx \frac{d}{L}\theta$, L - длина желоба, d - радиус колеса. Рассмотрение только первого приближения в уравнении связи здесь оказывается достаточным, поскольку, как будет показано далее, заключение об устойчивости получается, по существу по первому приближению, на основании анализа расположения корней характеристического уравнения.

Для построения замкнутой системы уравнений системы необходимо добавить уравнение Кирхгофа, описывающего динамику коллекторного двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, первое приближение которого можно представить в виде

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v; \qquad e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

e_v - напряжение на выходе усилителя, подающего питание на якорную обмотку двигателя; e_b - напряжение противо-ЭДС ; K_3 - постоянная двигателя ; L_a - индуктивность обмотки якоря; R_a - его сопротивление ; K_1 - коэффициент преобразователя питания. Отметим, что здесь, в отличие от [24, 26, 27], не будем пренебрегать первым членом в этом уравнении, то есть будем учитывать влияние индуктивности якорной обмотки на динамику электропривода.

Исключая с помощью приближенного уравнения связи и избыточную координату α, и ее скорость, будем иметь систему с обобщенными координатами, для которой составим уравнения Лагранжа

$$\left.\begin{aligned}&\left(m+\frac{J}{R^2}\right)\ddot{r}-\frac{Jd}{LR}\ddot{\theta}-mr\left(\frac{d}{L}\dot{\theta}\right)^2+mg\sin\left(\frac{d}{L}\theta\right)=0;\\&\left(J_0+\frac{d^2}{L^2}\left(mr^2+J\right)\right)\ddot{\theta}-\frac{Jd}{LR}\ddot{r}+2mr\left(\frac{d}{L}\right)^2\dot{r}\dot{\theta}+mgr\frac{d}{L}\cos\left(\frac{d}{L}\theta\right)=-b_0\dot{\theta}+K_2 i_a.\end{aligned}\right\}$$

b_0 - коэффициент сопротивления вращению, приведенный к двигателю; K_2 - электромеханическая постоянная двигателя. В таком случае при $r_0 \neq 0$ система уравнений допускает равновесие:

$$\left.r_0 \neq 0;\ \theta_0=0;\quad i_a^0=\frac{mgr_0\frac{d}{L}}{K_2};\quad e_v^0=\frac{R_a i_a^0}{K_1}=\frac{mgr_0\frac{d}{L}R_a}{K_1K_2}.\right\} \qquad (35)$$

Полученные уравнения и допускаемое ими равновесие отличаются от уравнений (Equation 3-2, 3-6, 3-7) в [25] не только из-за уточненного выражения угловой скорости шарика. Отметим, что в [25], кроме того, уравнения движения составлены неправильно вследствие того, что приближенное уравнение связи учтено не при составлении функции Лагранжа, а после ее дифференцирования – т.е. по существу, после получения уравнения Лагранжа второго рода для r (хотя α зависимая координата).

Введём следующие обозначения (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - возмущения, u - дополнительное напряжение на якоре двигателя, обеспечивающее стабилизацию заданного равновесия $r_0 \neq 0$).

$$\left.r=r_0+x_1;\ \dot{r}=x_2;\ \theta=\theta_0+x_3;\ \dot{\theta}=x_4;\ i_a=i_a^0+x_5;\ e_v=e_v^0+u\right\} \qquad (36)$$

Система первого приближения уравнений возмущенного движения системы с двумя обобщенными координатами получит форму

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2;\quad \left(m+\frac{J}{R^2}\right)\dot{x}_2-\frac{Jd}{LR}\dot{x}_4+mg\frac{d}{L}x_3=0;\\&\dot{x}_3=x_4;\quad \left(J_0+\frac{d^2mr_0^2}{L^2}+J\frac{d^2}{L^2}\right)\dot{x}_4-\frac{Jd}{LR}\dot{x}_2+mg\frac{d}{L}x_1+b_0x_4-K_2x_5=0;\\&\dot{x}_5=\frac{K_1u-R_ax_5-K_3x_4}{L_a}.\end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Замечание 5.Обратим внимание на то, что здесь за управление выбран не механический момент, действующий со стороны двигателя, как в [24-27], а напряжение, за счет которого в соответствии с законом Кирхгофа меняется создающий этот момент ток. Поэтому последнее уравнение системы (37) можно рассматривать, как динамический регулятор по терминологии [36]. Другими словами, в данной работе, по сравнению с регуляторами, предлагаемыми в [24-27], совершается, по существу, переход к системе непрямого управления, что, как известно, существенно расширяет возможности системы управления.

Нетрудно проверить, что для системы (37) выполнено условие управляемости – достаточное условие разрешимости методом [28] линейно-квадратичной задачи стабилизации равновесия (35) до асимптотической устойчивости по первому приближению. При практическом решении, которое в данной работе не приведено, в качестве подынтегральной функции в критерии качества удобно взять [28] квадратичную форму

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + u^2$$

Численное определение коэффициентов стабилизирующего управления, при заданных значениях параметров конкретной системы может быть выполнено с применением [29].

При действии найденного таким способом управления обеспечивается асимптотическая устойчивость заданного равновесия рассматриваемой в этом разделе упрощенной модели системы **Ball&Beam.** Однако, как будет показано далее, определенное из упрощенной модели управление решает задачу и в полной постановке, когда строго строится модель системы с нелинейной геометрической связью.

6.2.Точное моделирование системы Ball&Beam. Проведем теперь строгое рассмотрение задачи с использованием аналитической механики систем с избыточными координатами и доказанной в настоящей работе теоремы об асимптотической устойчивости. В действительности вместо приближенной линейной связи $\alpha \approx \frac{d}{L}\theta$ имеет место следующая нелинейная связь (*l* длина стержня, соединяющего желоб и колесо):

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2 \quad \text{или} \quad \left(L(\cos\alpha - 1) + d(1-\cos\theta)\right)^2 + \left(L\sin\alpha + l - d\sin\theta\right)^2 = l^2,$$

Дифференцируя эту связь по времени, получим

$$\dot{\alpha} = \underbrace{\frac{d\left(L\sin(\alpha-\theta) + (L-d)\sin\theta + l\cos\theta\right)}{L\left(d\sin(\alpha-\theta) + (L-d)\sin\alpha + l\cos\alpha\right)}}\dot{\theta} = B(\alpha,\theta)\dot{\theta}; \quad B(\alpha,\theta)_0 = \frac{d}{L}$$

Кинетическая энергия после исключения зависимой скорости будет иметь вид

$$\mathrm{T}^{*}=\frac{1}{2}(m+\frac{J}{R^{2}})\dot{r}^{2}+\frac{1}{2}\left[\left(mr^{2}+J\right)B^{2}(\alpha,\theta)+J_{0}\right]\dot{\theta}^{2}-JB(\alpha,\theta)\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{R}$$

Запишем уравнения Шульгина (7) для координат r, θ данной системы с избыточной координатой

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{r}}-\frac{\partial T^{*}}{\partial r}=-\frac{\partial\Pi}{\partial r}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{*}}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial T^{*}}{\partial\theta}-B(\alpha,\theta)\frac{\partial T^{*}}{\partial\alpha}=Q_{\theta}-B(\alpha,\theta)\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}$$

Первое приближение этих двух уравнений получит форму (здесь $\alpha=\alpha_0+x_6=x_6$)

$$(m+\frac{J}{R^{2}})\dot{x}_{2}-\frac{J}{R}B(0)\dot{x}_{4}+mgx_{6}=0$$
$$\left[J_{0}+(mr_{o}^{2}+J)B^{2}(0)\right]\dot{x}_{4}-\frac{JB(0)}{R}\dot{x}_{2}+b_{0}x_{4}-K_{2}x_{5}+B(0)mgx_{1}=0 \quad (38)$$

Добавляя к этим уравнениям первое приближение уравнения связей

$$\dot{x}_{6}=B(0)\dot{x}_{3},$$

проведем в полученной системе замену (22)

$$x_{6}=z+B(0)x_{3}=z+{}^{d}\!/_{L}\,x_{3}$$

После чего первое приближение уравнения связи примет вид

$$\dot{z}=0$$

Тогда в характеристическом уравнении полученной системы выделяется нулевой корень, соответствующий переменной z, уравнение для определения остальных корней после замены (22) полностью совпадает с характеристическим уравнением системы (37), поскольку в рассматриваемом примере

$$B(0)=\frac{d}{L},\quad\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)_{0}=0 .$$

Управление, разрешающее задачу стабилизации до асимптотической устойчивости положения равновесия (35) системы (37), обеспечивает асимптотическую устойчивость равновесия

$$
\left.\theta_0 = 0; \quad \alpha_0 = 0; \quad i_a^0 = \frac{mgr_0 \dfrac{d}{L}}{K_2}; \quad e_\nu^0 = \frac{R_a i_a^0}{K_1} = \frac{mgr_0 \dfrac{d}{L} R_a}{K_1 K_2}.\right\}
$$

системы с избыточной координатой α. Справедливость такого утверждения следует из доказанной выше теоремы, поскольку действительные части всех корней (кроме одного нулевого) характеристического уравнения системы (38), замкнутой определенным из решения линейно-квадратичной задачи стабилизации системы (37) управлением, отрицательны. Обратим внимание на то, что введение в управление дополнительного линейного по переменной x_6 (или по z после замены) члена обеспечить асимптотическую по первому приближению устойчивость не может, поскольку по этой переменной управляемости нет.

Таким образом, вопрос об устойчивости положений равновесия этой системы **Ball&Beam** с геометрической связью может быть полностью решен следующим образом:

1. В уравнениях связи в окрестности рассматриваемого равновесия выделяется первое приближение и с помощью этих соотношений зависимые координаты (а с помощью продифференцированного первого приближения уравнений связей - и их скорости) исключаются из рассмотрения.

2. Для полученной этим способом системы с обобщенными координатами с использованием уравнений Лагранжа второго рода составляются уравнения возмущенного движения. Рассмотрение задачи об устойчивости равновесия такой упрощенной системы в рассматриваемом примере в случае, когда действительные части всех корней характеристического уравнения системы первого приближения отрицательны, полностью решает вопрос об асимптотической устойчивости рассматриваемого равновесия исходной системы с избыточной координатой.

<u>*Замечание 6*</u>. Такой подход при действии только потенциальных сил может быть использован лишь при условии $C^B = 0$ в уравнении (17) (что возможно, в частности, при отсутствии линейных членов в приведенной потенциальной энергии). При действии по избыточным координатам еще и непотенциальных сил линейные по координатам члены в уравнениях возмущенного движения могут появиться из произведений $B_{\mu i} Q_\mu$, если в непотенциальных силах есть постоянные составляющие, и, кроме того, $\left(\dfrac{\partial B}{\partial q}\right)_0 \neq 0$.

В общем же случае линейные члены уравнений возмущенного движения, получаемые при учете только первого приближения геометрических связей, существенно отличаются от соответствующих членов, получаемых из точной модели. Необходимо пользоваться уравнениями Шульгина в избыточных координатах и уравнениями связей в дифференциальной форме. При этом в задаче об устойчивости положений равновесия систем с избыточными координатами, несмотря на формальное сведение к особенному случаю критического случая нулевых корней в количестве, равном числу геометрических связей, нет многообразия положений равновесия и, соответственно, имеет место асимптотическая устойчивость. Изолированность исследуемого равновесия обеспечивается условиями, накладываемыми связями как на начальные возмущения, так и вообще на координаты системы в любой момент времени.

Заключение. В данной работе в избыточных координатах ставится задача об устойчивости положения равновесия систем с геометрическими связями, находящихся под действием потенциальных и непотенциальных сил.

Впервые доказано, что для систем с избыточными координатами, в отличие от неголономных систем, несмотря на формальное сведение задачи методами теории критических случаев к особенному случаю, имеет место асимптотическая устойчивость равновесия по отношению ко всем координатам и скоростям, если число нулевых корней характеристического уравнения равно числу связей, а действительные части остальных его корней отрицательны..

Принципиальную роль в приводимом доказательстве играет проведенный строгий анализ условий на начальные возмущения, вытекающих из выполнения геометрических связей. Таким образом, установлено, что при таком расположении корней многообразия равновесий нет и имеет место условная асимптотическая устойчивость.

Определены условия, при которых условия асимптотической устойчивости равновесия могут быть найдены при переходе к упрощенной системе за счет исключения из рассмотрения зависимых координат и их скоростей путем учета первого приближения уравнений геометрических связей.

Тем самым создана общая методология исследования устойчивости и стабилизации систем с избыточными координатами.

Эффективность разработанного метода показана на примере строгого решения задачи о стабилизации равновесия в системе **Ball&Beam** линейным управлением, определенным решением методом Н.Н. Красовского линейно-квадратичной задачи стабилизации.

В заключение авторы выражают благодарность участникам семинара механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова “Динамика относительного движения” (рук. чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкий, проф. Ю.Ф. Голубев) за полезные замечания и обсуждение постановки задачи и результатов работы.

Список литературы

1. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Ташкент: Издательство САГУ, 1958. 183 с. (Труды Среднеазиатского государственного университета им. В.И. Ленина, вып. 144).
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
3. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: ОГИЗ, 1946. 656 с.
4. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Физматлит, 2005. 272 с.
5. Ляпунов А.М. Лекции по теоретической механике. Киев: Наукова думка, 1982. 632 с.
6. Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Уравнения движения механических систем в избыточном наборе переменных // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М., 1987. Вып.18. С. 62-66.
7. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 480 с.
8. Ляпунов А.М. Собрание сочинений. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 472 с.
9. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1952. 432 с.
10. Каменков Г.В. Избранные труды. В 2 т. Т. 2. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1972. 211 с.
11. Красинский А.Я., Атажанов Б., Красинская Э.М., Хайдаров И.К., Умаров А.Т., Юлдашева И.А. Аналитическая механика неголономных систем и устойчивость их движений: отчет о НИР / ФФИ ГКНТ Узбекистана. Ташкент, 2003. 187 с. № ГР 01.01.0011346.
12. Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем // Избранные труды VIII Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2004. С. 97-103. Режим доступа: http://www.ipu.ru/semin/arhiv/stab04 (дата обращения 12.12.2012).
13. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем. Голономные

системы // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. Ульяновск: УлГТУ, 2011. С. 301-322.
14. Красинская-Тюменева Э.М., Красинский А.Я. О влиянии структуры сил на устойчивость положений равновесия неголономных систем // Вопросы вычислительной и прикладной математики : сб. научн. тр. Вып. 45. Ташкент, 1977. С. 172-186.
15. Мартыненко Ю.Г. О матричной форме уравнений неголономной механики // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. Вып. 23. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2000. С. 9-21.
16. Красинская Э.М. К стабилизации стационарных движений механических систем // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 2. С. 302-309.
17. Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации положений равновесия неголономных систем // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52. С. 194-202.
18. Красинский А.Я. О стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 56. С. 939-950.
19. Красинский А.Я., Атажанов Б. О задаче стабилизации установившихся движений неголономных систем С.А. Чаплыгина // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. 2007. Т. 13, вып. 2 (28). С. 74-96.
20. Красинский А.Я., Халиков А.А. Компьютерный анализ задач стабилизации стационарных движений мобильных роботов как неголономных систем // Вестник Московского авиационного института. 2008. Т.15, № 2. С. 66-76.
21. Красинский А.Я., Атажанов Б. Об устойчивости установившихся движений неголономных систем с неоднородными связями // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. 2009. Т. 15, вып. 1 (31). С. 114-143.
22. Красинский А.Я., Атажанов Б., Хайдаров И.К. Устойчивость положений равновесия систем с избыточными координатами // Доклады АН Республики Узбекистан. 2002. № 1.
23. Красинский А.Я., Атажанов Б., Хайдаров И.К. К устойчивости стационарных движений механических движений систем с избыточными координатами // Проблемы механики: узбекский журнал. 2002. № 6.
24. Yu W. Nonlinear PD Regulation for Ball and Beam System // International Journal of Electrical Engineering Education. 2009. Vol. 46. P. 37-59.
25. Сайт компании Googol Technology Ltd. Режим доступа: http://www.googoltech.com/web/eng/main.jsp (дата обращения 12.12.2012).

26. Min-Sung Koo, Ho-Lim Choi, Jong-Tae Lim. Adaptive nonlinear control of a ball and beam system using centrifugal force term // International Journal of Innovative Computing, Information and Control. September 2012. Vol. 8, no. 9. P. 5999-6009.
27. Mohammad Keshmiri, Ali Fellah Jahromi, Abolfazl Mohebbi, Mohammad Hadi Amoozgar, Wen-Fang Xie. Modeling and control of ball and beam system using model based and non-model based control approaches // International Journal on smart sensing and intelligent systems. March 2012. Vol. 5, no. 1. P. 14-35.
28. Малкин И.Г. Проблемы стабилизации управляемых движений // Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1967. Дополнение 4. С. 475-514.
29. Красинский А.Я., Иофе В.В., Каюмова Д.Р., Халиков А.А. Программное составление уравнений движения и исследование стабилизации механических движений : свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2011615362 Российская Федерация. Заявка № 2011613568; зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ 23.05.2011.
30. Красинский А.Я., Каюмова Д.Р. О влиянии деформируемости колес на динамику робота с дифференциальным приводом // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 803-822.
31. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
32. Карапетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 3-128.
33. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
34. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Применение избыточных координат в задачах устойчивости и стабилизации связанных систем // XV International Conference "Dynamical system modeling and stability investigation". Kyiv, Ukraine, 2011. С. 92.
35. Krasinskaya E., Krasinskiy A. On the application of the analytical mechanics and nonlinear stability theory for stabilization problems of mechatronic systems // 7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics (CCMECH’2011). Moscow - Siedlce (Poland), 2011. C. 54-55.
36. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977. 400 с.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408
electronic scientific and technical journal

Stability and stabilization of equilibrium state of mechanical systems with redundant coordinates.

03, March 2013
DOI: 10.7463/0313.0541146

Krasinskaya E.M., Krasinskii A.Ya.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation
Russia, Moscow National University of Food Production
krasinsk@mail.ru

For mechanical systems with geometric constraints application of the Shulgin method for obtaining motion equations without joining factors, which is based on a simple derivation of constraint equations, is considered in this article. Obtained motion equations for holonomic system in redundant coordinates are a special case of the Voronetz equations for non-holonomic systems in case of integrable constraints. The method for using these equations is developed for stability and stabilization problems of the equilibrium position of systems with redundant coordinates. The proposed approach allows to use previously obtained results based on the theory of critical cases. The problem of non-asymptotic stability was tackled by reducing it to the Lyapunov-Malkin theorem of stability for a special case of several zero roots. In this paper, the authors prove that consideration of constraints on initial perturbations asymptotically stabilizes the equilibrium state despite formal reduction to a special case, if the number of zero roots of the characteristic equation is equal to the number of constraints and real parts of other roots are negative. Efficiency of this approach was verified by investigating the stabilization problem of the equilibrium state for real mechatronic workbench GBB1005 Ball&Beam Educational Control System.

Publications with keywords: stability, stabilization, mechanical system, geometric constrains, redundant coordinates, critical case, especial case
Publications with words: stability, stabilization, mechanical system, geometric constrains, redundant coordinates, critical case, especial case

References

1. Shul'gin M.F. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniiakh analiticheskoi dinamiki i ikh integrirovanii* [On some differential equations of analytical dynamics and their integration]. Tashkent, SASU Publ., 1958. 183 p. (*Trudy Sredneaziatskogo gosudarstvennogo universiteta im. V.I. Lenina* [Proceedings of the Lenin Central Asian state University], iss. 144).

2. Lur'e A.I. *Analiticheskaia mekhanika* [Analytical mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 1961. 824 p.

3. Suslov G.K. *Teoreticheskaia mekhanika* [Theoretical mechanics]. Moscow; Leningrad, OGIZ, 1946. 656 p.

4. Zegzhda S.A., Soltakhanov Sh.Kh., Iushkov M.P. *Uravneniia dvizheniia negolonomnykh sistem i variatsionnye printsipy mekhaniki. Novyi klass zadach upravleniia* [The equations of motion of nonholonomic systems and variational principles of mechanics. The new class of control problems]. Moscow, Fizmatlit, 2005. 272 p.

5. Liapunov A.M. *Lektsii po teoreticheskoi mekhanike* [Lectures on theoretical mechanics]. Kiev, Naukova dumka, 1982. 632 p.

6. Novozhilov I.V., Zatsepin M.F. *Uravneniia dvizheniia mekhanicheskikh sistem v izbytochnom nabore peremennykh* [The equations of motion of mechanical systems in a redundant set of variables]. *Sbornik nauchno-metodicheskikh statei po teoreticheskoi mekhanike* [Collection of scientific and methodological articles on theoretical mechanics]. Moscow, 1987, no.18, pp. 62-66.

7. Zenkevich S.L., Iushchenko A.S. *Osnovy upravleniia manipuliatsionnymi robotami* [Bases of management of manipulation robots]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2004. 480 p.

8. Liapunov A.M. *Sobranie sochinenii. T. 2* [The works. Vol. 2]. Moscow; Leningrad, AS USSR Publ., 1956. 472 p.

9. Malkin I.G. *Teoriia ustoichivosti dvizheniia* [The theory of stability of motion]. Moscow, Gostekhizdat, 1952. 432 p.

10. Kamenkov G.V. *Izbrannye trudy. V 2 t. T. 2. Ustoichivost' i kolebaniia nelineinykh system* [Selected works. In 2 vol. Vol. 2. Stability and oscillations of nonlinear systems]. Moscow, Nauka, 1972. 211 p.

11. Krasinskii A.Ia., Atazhanov B., Krasinskaia E.M., Khaidarov I.K., Umarov A.T., Iuldasheva I.A. *Analiticheskaia mekhanika negolonomnykh sistem i ustoichivost' ikh dvizhenii: otchet o NIR* [Analytical mechanics of nonholonomic systems and sustainability of their movements : report on scientific research works]. The state Committee for science and technology of Uzbekistan, Tashkent, 2003. 187 p. Non published.

12. Krasinskii A.Ia. Ob odnom metode issledovaniia ustoichivosti i stabilizatsii neizolirovannykh ustanovivshikhsia dvizhenii mekhanicheskikh sistem [Certain method of investigation of stability and stabilization of nonisolated steady motions of mechanical systems]. *Izbrannye trudy 8-go Mezhdunarodnogo seminara «Ustoichivost' i kolebaniia nelineinykh sistem upravleniia»* [Selected Works of the 8th International Seminar "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"]. Moscow, Institut problem upravleniia im. V.A. Trapeznikova RAN [Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences], 2004, pp. 97-103. Available at: http://www.ipu.ru/semin/arhiv/stab04 , accessed 12.12.2012.

13. Krasinskaia E.M., Krasinskii A.Ia. Ob ustoichivosti i stabilizatsii neizolirovannykh ustanovivshikhsia dvizhenii mekhanicheskikh sistem. Golonomnye sistemy [The stability and stabilization of nonisolated steady motions of mechanical systems. Holonomic systems]. *Prikladnaia matematika i mekhanika: sbornik nauchnykh trudov* [Applied mathematics and mechanics: a collection of scientific papers]. Ul'ianovsk, UlSTU Publ., 2011, pp. 301-322.

14. Krasinskaia E.M., Krasinskii A.Ia. O vliianii struktury sil na ustoichivost' polozhenii ravnovesiia negolonomnykh sistem [Influence of structure of forces on the stability of positions of equilibrium of nonholonomic systems]. *Voprosy vychislitel'noi i prikladnoi matematiki: cb. nauchn. tr. Vyp. 45* [Problems of computational and applied mathematics: collection of scientific papers. Iss. 45]. Tashkent, 1977, pp. 172-186.

15. Martynenko Iu.G. O matrichnoi forme uravnenii negolonomnoi mekhaniki [The matrix form of the equations of nonholonomic mechanics]. *Sbornik nauchno-metodicheskikh statei po teoreticheskoi mekhanike. Vyp. 23* [Collection of scientific and methodological articles on theoretical mechanics. Iss. 23]. Moscow, MSU Publ., 2000, pp. 9-21.

16. Krasinskaia E.M. K stabilizatsii statsionarnykh dvizhenii mekhanicheskikh sistem [Stabilization of steady motions of mechanical systems]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1983, vol. 47, no. 2, pp. 302-309.

17. Krasinskii A.Ia. Ob ustoichivosti i stabilizatsii polozhenii ravnovesiia negolonomnykh sistem [The stability and stabilization of positions of equilibrium of nonholonomic systems]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1988, vol. 52, pp. 194-202.

18. Krasinskii A.Ia. O stabilizatsii ustanovivshikhsia dvizhenii sistem s tsiklicheskimi koordinatami [Stabilization of steady motions of systems with cyclic coordinates]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1992, vol. 56, pp. 939-950.

19. Krasinskii A.Ia., Atazhanov B. O zadache stabilizatsii ustanovivshikhsia dvizhenii negolonomnykh sistem S.A. Chaplygina [Stabilization problem of steady motions of S.A.Chaplygin non-holonomic systems]. *Problemy nelineinogo analiza v inzhenernykh sistemakh* [Problems of nonlinear analysis in engineering systems], 2007, vol. 13, no. 2 (28), pp. 74-96.

20. Krasinskii A.Ia., Khalikov A.A. Komp'iuternyi analiz zadach stabilizatsii statsionarnykh dvizhenii mobil'nykh robotov kak negolonomnykh sistem [A computer-aided analysis of stabilization problems for steady motions of mobile robots as nonholonomic systems]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo institute*, 2008, vol. 15, no. 2, pp. 66-76.

21. Krasinskii A.Ia., Atazhanov B. Ob ustoichivosti ustanovivshikhsia dvizhenii negolonomnykh sistem s neodnorodnymi sviaziami [On stability of steady motion of non-holonomic systems with non-uniform constraints]. *Problemy nelineinogo analiza v inzhenernykh sistemakh* [Problems of nonlinear analysis in engineering systems], 2009, vol. 15, no. 1 (31), pp. 114-143.

22. Krasinskii A.Ia., Atazhanov B., Khaidarov I.K. Ustoichivost' polozhenii ravnovesiia sistem s izbytochnymi koordinatami [Stability of positions of equilibrium of systems with redundant coordinates]. *Doklady AN Respubliki Uzbekistan* [Reports of the Academy of Sciences of Uzbekistan], 2002, no. 1.

23. Krasinskii A.Ia., Atazhanov B., Khaidarov I.K. K ustoichivosti statsionarnykh dvizhenii mekhanicheskikh dvizhenii sistem s izbytochnymi koordinatami [The stability of stationary motions of mechanical systems with redundant coordinates]. *Problemy mekhaniki: uzbekskii zhurnal* [Problems of mechanics: Uzbek journal], 2002, no. 6.

24. Yu W. Nonlinear PD Regulation for Ball and Beam System. *International Journal of Electrical Engineering Education*, 2009, vol. 46, pp. 37-59.

25. *Sait kompanii Googol Technology Ltd.* [Site of the company Googol Technology Ltd.]. Available at: http://www.googoltech.com/web/eng/main.jsp , accessed 12.12.2012.

26. Min-Sung Koo, Ho-Lim Choi, Jong-Tae Lim. Adaptive nonlinear control of a ball and beam system using centrifugal force term. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, September 2012, vol. 8, no. 9, pp. 5999-6009.

27. Mohammad Keshmiri, Ali Fellah Jahromi, Abolfazl Mohebbi, Mohammad Hadi Amoozgar, Wen-Fang Xie. Modeling and control of ball and beam system using model based and non-model based control approaches. *International Journal on smart sensing and intelligent systems*, March 2012, vol. 5, no. 1, pp. 14-35.

28. Malkin I.G. Problemy stabilizatsii upravliaemykh dvizhenii [Problem of stabilization of controlled motions]. In book: *Teoriia ustoichivosti dvizheniia* [The theory of stability of motion]. Moscow, Nauka, 1967, Dopolnenie [Appendix] 4, pp. 475-514.

29. Krasinskii A.Ia., Iofe V.V., Kaiumova D.R., Khalikov A.A. *Programmnoe sostavlenie uravnenii dvizheniia i issledovanie stabilizatsii mekhanicheskikh dvizhenii* [Software compilation of equations of motion and study the stabilization of the mechanical movements]. State registration certificate of computer program, no. 2011615362 RF, 2011.

30. Krasinskii A.Ia., Kaiumova D.R. O vliianii deformiruemosti koles na dinamiku robota s differentsial'nym privodom [On the influence of the wheels deformability on the differential drive robot dynamics]. *Nelineinaia dinamika*, 2011, vol. 7, no. 4, pp. 803-822.

31. Neimark Iu.I., Fufaev N.A. *Dinamika negolonomnykh system* [Dynamics of nonholonomic systems]. Moscow, Nauka, 1967. 519 p.

32. Karapetian A.V., Rumiantsev V.V. Ustoichivost' konservativnykh i dissipativnykh system [The stability of conservative and dissipative systems]. *Itogi nauki i tekhniki. Obshchaia mekhanika. T. 6* [Results of science and technology. General mechanics. Vol. 6]. Moscow, VINITI RAN Publ., 1983, pp. 3-128.

33. Rumiantsev V.V. *Ob ustoichivosti statsionarnykh dvizhenii sputnikov* [Stability of steady motions of satellites]. Moscow, Computing Center of AS USSR Publ., 1967. 141 p.

34. Krasinskaia E.M., Krasinskii A.Ia. Primenenie izbytochnykh koordinat v zadachakh ustoichivosti i stabilizatsii sviazannykh sistem [The use of redundant coordinates in problems of stability and stabilization of coupled systems]. *Proc. of the 15th International Conference "Dynamical system modeling and stability investigation"*. Kyiv, Ukraine, 2011, p. 92.

35. Krasinskaya E., Krasinskiy A. On the application of the analytical mechanics and nonlinear stability theory for stabilization problems of mechatronic systems. *Proc. of the 7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics (CCMECH'2011).* Moscow - Siedlce (Poland), 2011, pp. 54-55.

36. Kuntsevich V.M., Lychak M.M. *Sintez sistem avtomaticheskogo upravleniia s pomoshch'iu funktsii Liapunova* [Synthesis of automatic control systems using Lyapunov functions]. Moscow, Nauka, 1977. 400 p.