электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 536.21

Численный анализ математической модели процесса формирования температурного поля анизотропной охлаждаемой пластины, находящейся под воздействием внешнего теплового потока

Говор С.А., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Прикладная математика»

Койфман К.Г., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Прикладная математика»

Научный руководитель: Аттетков А.В., к. т. н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
fn.bmstu.ru

Введение. С развитием некоторых видов техники, например, авиационной и ракетно – космической, возникла потребность в эффективных средствах тепловой защиты. Необходимость разработки перспективных средств тепловой защиты привела к исследованию особенностей процесса формирования температурного поля в твердых телах, подверженных высокоинтенсивному воздействию внешних тепловых потоков. Данная проблема имеет важное прикладное значение, и одним из способов ее решения является математическое моделирование. Но при практической реализации соответствующих математических моделей возникают трудности, связанные с необходимостью учитывать анизотропию материалов, используемых при разработке систем тепловой защиты. Данные трудности связаны с наличием смешанных производных по пространственным переменным в уравнениях теплопереноса. Преодоление указанных трудностей сопровождается необходимостью разработки нового класса экономичных и абсолютно устойчивых численных методов. Для тестирования новых численных методов удобно использовать решения соответствующих задач нестационарной теплопроводности, представленные в аналитически замкнутом виде. Но при изучении температурного поля в области с анизотропией свойств известны лишь единичные случаи нахождения в аналитически замкнутом виде решений смешанных задач для уравнений параболического типа, содержащих смешанные производные по пространственным переменным [7-9].

Основная цель проведенных в статье [1] исследований – нахождение в аналитически замкнутом виде решения задачи об определении нестационарного температурного поля в анизотропной охлаждаемой пластине, находящейся под воздействием внешнего теплового потока. В данной статье представлены результаты численного анализа полученной в [1] математической модели с использованием аналитического решения для частного случая. Данные результаты помогут при тестировании новых численных методов, поскольку было показано, что для небольших чисел Фурье Fo возможно построение графиков аналитического решения. В частности, проверена гипотеза о том, что проявление анизотропии теплопроводности может приводить к «сносу» температурного профиля по глубине формируемого температурного слоя охлаждаемой пластины. Получено аналитическое выражение, описывающее стационарное температурное и проведен его численный анализ.

Математическая модель. В качестве объекта исследований использована анизотропная пластина постоянной толщины

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x \in \mathbb{R}, \qquad 0 < y < 1, \qquad z \in \mathbb{R} \right\},$$

ограниченная плоскостями

$$\Gamma_G^{(k)} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x \in \mathbb{R}, \qquad y = k, \qquad z \in \mathbb{R} \right\}, \qquad k \in \{0,1\}.$$

Плоскость $\Gamma_G^{(1)}$ охлаждается внешней средой, температура T_0 которой постоянна и совпадает с начальной температурой пластины G, а другая плоскость $\Gamma_G^{(0)}$ находится под воздействием внешнего теплового потока с плотностью q. При этом предполагается, что:

1) на охлаждаемой плоскости $\Gamma_G^{(1)}$ реализуется режим теплообмена с внешней средой с постоянным коэффициентом теплоотдачи α;
2) функция $Q \equiv Q(x, z, \mathrm{Fo})|_{\mathrm{Fo} \geq 0} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, определяемая как безразмерная плотность внешнего теплового потока, интегрируема с квадратом по пространственным переменным $x \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{R}$;
3) при любых фиксированных значениях безразмерных пространственных переменных $x \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{R}$ функция $Q(x, z, \mathrm{Fo})$ интегрируема с квадратом по безразмерной временной переменной – числу Фурье $\mathrm{Fo} \in [0, +\infty)$, т.е. $Q(x, z, \mathrm{Fo})|_{\substack{x \in \mathbb{R}, \\ z \in \mathbb{R}}} \in L^2[0, +\infty)$.

При сделанных предположениях математическая модель изучаемого процесса формирования температурного поля в анизотропной охлаждаемой пластине, находящейся под воздействием внешнего теплового потока, может быть представлена в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + 2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + 2\mu_{23}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2},$$

$$x \in \mathbb{R},\ 0 < y < 1,\ z \in \mathbb{R},\quad \mathrm{Fo} > 0; \qquad (1)$$

$$\theta(x, y, z, \mathrm{Fo})|_{\mathrm{Fo}=0} = 0;$$

$$-\left\{\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right\}\Big|_{y=0} = Q(x, z, \mathrm{Fo});$$

$$\left\{\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mathrm{Bi}\theta\right\}\Big|_{y=1} = 0;$$

$$\theta(x, y, z, \mathrm{Fo})|_{\substack{\mathrm{Fo}>0,\\ y\in[0,1]}} \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

В математической модели (1):

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0};\ \mathrm{Fo} = \frac{\lambda_{22}t}{c\rho l^2};\ x = \frac{x_1}{l}\sqrt{\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}}};\ y = \frac{x_2}{l};$$

$$z = \frac{x_3}{l}\sqrt{\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}}};\ \mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\sqrt{\lambda_{ii}\lambda_{jj}}};\ \ Q = \frac{ql}{\lambda_{22}T_0};\ \mathrm{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda_{22}};$$

$T(x_1, x_2, x_3, t)$ – температура пластины постоянной толщины l в точке с координатами x_1, x_2, x_3 в момент времени t; $\lambda_{ij} \equiv \lambda_{ji}$ – компонента тензора теплопроводности; c и ρ – удельная теплоёмкость и плотность материала пластины соответственно; Fo – число Фурье; Bi – критерий Био; функция $\theta(x, y, z, Fo)$, как функция пространственных переменных x и z, является оригиналом двухмерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье [12, 13], а как функция временной переменной Fo – оригиналом интегрального преобразования Лапласа
[10, 13].

Нестационарное температурное поле. В статье [1] показано, что для стационарного предельно концентрированного в точке с координатами $x = y = z = 0$ теплового потока, то есть при реализации режима внешнего теплового воздействия

$$Q(x, z, \mathrm{Fo}) = Q_0\delta(x)\delta(z),$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака [10], равенство, определяющее искомое температурное поле, принимает вид:

$$\theta(x,y,z,\mathrm{Fo}) = Q_0 \int_0^{\mathrm{Fo}} V(y,\tau)\ \mathrm{E}(x,y,z,\tau)d\tau, \tag{2}$$

где $V(y,\tau)$ и $\mathrm{E}(x,y,z,\tau)$ определены в [1] равенствами (26), (25), (27) – (29) и (34) соответственно:

$$\mathrm{E}(x,y,z,\tau) = \frac{1}{4\tau\sqrt{\lambda_p\lambda_r}}\exp\left\{-\frac{[\Gamma_{11}(x-\mu_{12}y)+\Gamma_{21}(z-\mu_{23}y)]^2}{4\lambda_p\tau} - \right.$$

$$\left. -\frac{[\Gamma_{12}(x-\mu_{12}y)+\Gamma_{22}(z-\mu_{23}y)]^2}{4\lambda_r\tau}\right\}, \tag{3}$$

$$V(y,\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\{-(2n-y)\sqrt{s}\}\right] +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\{-(2n+y)\sqrt{s}\}\right] +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}(-2\mathrm{Bi})^k C_n^k L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}\right)^k}\{\exp\left[-(2n-y)\sqrt{s}\right] +$$

$$+\exp\left[-(2n+y)\sqrt{s}\right]\}]. \tag{4}$$

В формуле (3) Γ_{ij} – компоненты ортогональной матрицы $\Gamma = [\Gamma_{ij}] \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ такой, что путем невырожденного ортогонального преобразования

$[p,r]^T = \Gamma \cdot [p',r']^T$ положительно определенная квадратичная форма

$$\gamma(p,r) = (1-\mu_{12}^2)p^2 + 2(\mu_{13}-\mu_{12}\mu_{23})pr + (1-\mu_{23}^2)r^2$$

может быть приведена к каноническому виду:

$$\gamma(p,r) = \lambda_p(p')^2 + \lambda_r(r')^2.$$

Далее полагаем $Q_0 = 1$.

Было проведено численное исследование данного случая для $\mathrm{Fo} = 1$, $\mathrm{Fo} = 2$. Далее будет изложен метод численного исследования.

Зафиксируем значения y и Fo. В таком случае, функция $\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})$ будет функцией двух переменных x и z, областью определения которой является вся плоскость OXZ. Ограничимся рассмотрением $\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})$ на подмножестве плоскости OXZ:

$$G_{H_x,H_z} = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 | -H_x \le x \le H_x, \qquad -H_z \le z \le H_z\},$$

где $H_x, H_z > 0$.

Введем равномерные сетки на отрезках $[-H_x,\ H_x]$, $[-H_z,\ H_z]$ соответственно:

$$\omega_x = \left\{-H_x = x_0 < \cdots < x_{N_x-1} = H_x,\ x_i - x_{i-1} = h_x\right\},$$

$$\omega_z = \left\{-H_z = z_0 < \cdots < z_{N_z-1} = H_z,\ z_j - z_{j-1} = h_z\right\},$$

где N_x, N_z – число точек сеток ω_x, ω_z соответственно,

$$h_x = \frac{2H_x}{N_x - 1},$$

$$h_z = \frac{2H_z}{N_z - 1}$$

– шаги сеток ω_x, ω_z соответственно.

Таким образом, необходимо вычислить

$$\theta\left(x_i, y, z_j, \mathrm{Fo}\right) = \int_0^{\mathrm{Fo}} V(y,\tau)\, \mathrm{E}\left(x_i, y, z_j, \tau\right) d\tau,$$

где x_i, z_j – точки сеток ω_x, ω_z соответственно, y, Fo – фиксированы. Значение $\mathrm{E}\left(x_i, y, z_j, \tau\right)$ вычисляется по формуле (3), а значение $V(y,\tau)$ – по формуле (4).

Пусть

$$\psi_k(s) \triangleq \frac{1}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s} + Bi\right)^k} \exp\left(-a\sqrt{s}\right), a \ge 0, \qquad k\epsilon\{0,1,2 \dots\},$$

тогда

$$L^{-1}[\psi_0(s)] = \frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}} \exp\left(-\frac{a^2}{4\mathrm{Fo}}\right),$$

$$L^{-1}[\psi_k(s)] = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} (\mathrm{Fo})^{\frac{k-1}{2}} *$$

$$* \exp(\mathrm{Bi}^2\mathrm{Fo} + \mathrm{Bi}\, a) \int_{\frac{a}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} + \mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}}^{\infty} \left[y - \left(\frac{a}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} + \mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right)\right]^{k-1} \exp(-y^2)\, dy,$$

где $L^{-1}[\cdot]$ – оператор обратного интегрального преобразования Лапласа.

Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left\{-(2n-y)\sqrt{s}\right\}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2n-y)^2}{4\mathrm{Fo}}\right],$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\exp\{-(2n+y)\sqrt{s}\}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{(2n+y)^2}{4\mathrm{Fo}}\right]$$

сходятся быстро из – за присутствия в общих членах экспоненты с отрицательным показателем степени. Для оценки их сходимости применялось следствие из интегрального признака сходимости.

Теорема (интегральный признак сходимости).

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакоположительный числовой ряд, $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$.

Пусть для функции $f(x)$ выполняется:

1. $f(x) \geq 0\ \forall x \in [1,+\infty)$;
2. $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2\ \forall x_1, x_2 \in [1,+\infty)$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}\colon f(n) = a_n$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. При этом для остатка ряда верна оценка: $r_n \leq \int_n^{\infty} f(x)dx$.

Данная оценка применялась при вычислении сумм рядов

$$\frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{(2n-y)^2}{4\mathrm{Fo}}\right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{Fo}}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{(2n+y)^2}{4\mathrm{Fo}}\right].$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}(-2\mathrm{Bi})^k C_n^k L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+\mathrm{Bi})^k}\left\{\exp\left[-(2n-y)\sqrt{s}\right] + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \exp\left[-(2n+y)\sqrt{s}\right]\right\}\right]$$

заменялся на частичную сумму

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}(-2\mathrm{Bi})^k C_n^k L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+\mathrm{Bi})^k}\left\{\exp\left[-(2n-y)\sqrt{s}\right] + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \exp\left[-(2n+y)\sqrt{s}\right]\right\}\right].$$

Значение N устанавливалось экспериментально и из следующих соображений: значения интегралов $\int_{\frac{a}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}+\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}}^{\infty}\left[y-\left(\frac{a}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}+\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right)\right]^{k-1}\exp(-y^2)\,dy$ быстро убывают при увеличении n и k, поэтому брали $N \leq 14$.

В рядах, составляющих функцию $V(y, \mathrm{Fo})$, и в оценках остатков для некоторых из них, вычисляются несобственные интегралы. Для их вычисления используется метод обрезания верхнего предела [2]. Он заключается в том, что интеграл $I = \int_a^\infty f(x)dx$ аппроксимируется интегралом $I_A = \int_a^A f(x)dx$. Точность определяется по разности $I_{A_1} - I_{A_2}$, где A_1 намного меньше, чем A_2. Интегралы, полученные после обрезания верхнего предела, заменялись на квадратурные формулы Симпсона [2]. Пусть дан интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$. Тогда квадратурная формула Симпсона определяется так:

$$I_h = \sum_{i=0}^{\frac{N-3}{2}} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})]\frac{h}{3},$$

где N – нечетное число точек равномерной сетки на $[a, b]$, h - шаг. При замене интегралов, вычисляемых для функции $V(y, \mathrm{Fo})$, на квадратурные формулы Симпсона, применялась оценка погрешности по правилу Рунге, которое заключается в следующем. Главный член погрешности для формулы Симпсона имеет вид:

$$R_h = Mh^4.$$

Тогда $R_{h/2} = M\frac{h^4}{16} = \frac{R_h}{16}$. Из равенств $I_h \approx I + R_h$ и $I_{h/2} \approx I + R_{h/2}$ следует

$$R_h \approx 16\frac{I_h - I_{h/2}}{15}.$$

Исходный интеграл $\theta(x_i, y, z_j, \mathrm{Fo}) = \int_0^{\mathrm{Fo}} V(y, \tau)\ \mathrm{E}(x_i, y, z_j, \tau)d\tau$ также вычислялся по формуле Симпсона. Введем на отрезке $[0, \mathrm{Fo}]$ равномерную сетку

$$\omega_{\mathrm{Fo}} = \{0 = f_0 < \cdots < f_{N_F-1} = \mathrm{Fo}, f_k - f_{k-1} = h_F\}$$

с шагом h_F и нечетным количеством точек N_F.

Тогда

$$\theta(x_i, y, z_j, \mathrm{Fo}) \approx \sum_{k=0}^{\frac{N_F-3}{2}} [V(y, f_{2k})\mathrm{E}(x_i, y, z_j, f_{2k}) +$$

$$+4V(y, f_{2k+1})\mathrm{E}(x_i, y, z_j, f_{2k+1}) + V(y, f_{2k+2})\mathrm{E}(x_i, y, z_j, f_{2k+2})]\frac{h}{3}.$$

При расчете брались следующие значения: $H_x = H_z = 10$, $Nx = Nz = 100$. Программа выдавала результат, записанный в синтаксисе системы Mathematica, в которой проводилась визуализация результата. Далее будут приведены результаты вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент проводился для двух

разных тензоров теплопроводности, первый из которых соответствует случаю анизотропии свойств. Соответственно, результаты вычислительного эксперимента разбиты на две части.

В начале каждой части приводятся таблицы, содержащие максимальные значения безразмерной температуры θ при фиксированных параметрах y, Fo, Bi и координаты точек (x, z), в которых эти значения достигались (табл. 1 и 2). С помощью этих таблиц установлено следующее: проявление анизотропии теплопроводности может приводить к «сносу» температурного профиля по глубине формируемого температурного слоя охлаждаемой пластины.

$$1.\ (\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.8 & 2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 3 \end{pmatrix}$$

Таблица 1

Случай анизотропии теплопроводности

$\mathrm{Bi} = 1, \quad \mathrm{Fo} = 1, \quad N_F = 11$		$\mathrm{Bi} = 1, \quad \mathrm{Fo} = 2, \quad N_F = 21$	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$	y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0	{0, 0, 1.269}	0	{0, 0, 1.364}
0.1	{0.1, 0, 1.240}	0.1	{0.1, 0, 1.336}
0.2	{0.1, 0, 1.180}	0.2	{0.1, 0, 1.275}
0.3	{0.2, 0.1, 1.084}	0.3	{0.2, 0.1, 1.177}
0.4	{0.2, 0.1, 0.972}	0.4	{0.2, 0.1, 1.063}
0.5	{0.3, 0.1, 0.850}	0.5	{0.3, 0.1, 0.937}
0.6	{0.3, 0.1, 0.726}	0.6	{0.3, 0.1, 0.809}
0.7	{0.4, 0.1, 0.617}	0.7	{0.4, 0.1, 0.696}
0.8	{0.5, 0.2, 0.524}	0.8	{0.5, 0.2, 0.597}
0.9	{0.5, 0.2, 0.455}	0.9	{0.5, 0.2, 0.523}
1	{0.6, 0.2, 0.404}	1	{0.6, 0.2, 0.466}
$\mathrm{Bi} = 0.5, \quad \mathrm{Fo} = 1, \quad N_F = 11$		$\mathrm{Bi} = 0.5, \quad \mathrm{Fo} = 2, \quad N_F = 21$	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$	y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0	{0, 0, 1.296}	0	{0, 0, 1.431}
0.1	{0.1, 0, 1.268}	0.1	{0.1, 0, 1.402}
0.2	{0.1, 0, 1.210}	0.2	{0.1, 0, 1.343}
0.3	{0.2, 0.1, 1.116}	0.3	{0.2, 0.1, 1.248}
0.4	{0.2, 0.1, 1.007}	0.4	{0.2, 0.1, 1.137}
0.5	{0.3, 0.1, 0.889}	0.5	{0.3, 0.1, 1.017}
0.6	{0.3, 0.1, 0.771}	0.6	{0.3, 0.1, 0.895}
0.7	{0.4, 0.1, 0.670}	0.7	{0.4, 0.1, 0.790}
0.8	{0.5, 0.2, 0.585}	0.8	{0.5, 0.2, 0.701}
0.9	{0.5, 0.2, 0.528}	0.9	{0.5, 0.2, 0.640}
1	{0.6, 0.2, 0.491}	1	{0.6, 0.2, 0.597}

Продолжение табл. 1

Bi = 1.5, Fo = 1, $N_F = 11$	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0	{0, 0, 1.249}
0.1	{0.1, 0, 1.221}
0.2	{0.1, 0, 1.160}
0.3	{0.2, 0.1, 1.062}
0.4	{0.2, 0.1, 0.948}
0.5	{0.3, 0.1, 0.822}
0.6	{0.3, 0.1, 0.694}
0.7	{0.4, 0.1, 0.581}
0.8	{0.5, 0.2, 0.481}
0.9	{0.5, 0.2, 0.405}
1	{0.6, 0.2, 0.344}

Bi = 1.5, Fo = 2, $N_F = 21$	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0	{0, 0, 1.323}
0.1	{0.1, 0, 1.294}
0.2	{0.1, 0, 1.233}
0.3	{0.2, 0.1, 1.133}
0.4	{0.2, 0.1, 1.016}
0.5	{0.3, 0.1, 0.887}
0.6	{0.3, 0.1, 0.755}
0.7	{0.4, 0.1, 0.638}
0.8	{0.5, 0.2, 0.533}
0.9	{0.5, 0.2, 0.451}
1	{0.6, 0.2, 0.383}

2. $(\lambda_{ij}) = diag(1, 4, 6)$

Таблица 2

Случай отсутствия анизотропии теплопроводности

Bi = 1, Fo = 1, $N_F = 11$	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0	{0, 0, 1.021}
0.1	{0, 0, 1.004}
0.2	{0, 0, 0.954}
0.3	{0, 0, 0.878}
0.4	{0, 0, 0.785}
0.5	{0, 0, 0.685}
0.6	{0, 0, 0.587}
0.7	{0, 0, 0.498}
0.8	{0, 0, 0.424}
0.9	{0, 0, 0.367}
1	{0, 0, 0.326}

Bi = 1, Fo = 2, $N_F = 21$	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0	{0, 0, 1.099}
0.1	{0, 0, 1.081}
0.2	{0, 0, 1.030}
0.3	{0, 0, 0.952}
0.4	{0, 0, 0.857}
0.5	{0, 0, 0.755}
0.6	{0, 0, 0.654}
0.7	{0, 0, 0.562}
0.8	{0, 0, 0.484}
0.9	{0, 0, 0.422}
1	{0, 0, 0.376}

Bi = 0.5, Fo = 1, $N_F = 11$	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0	{0, 0, 1.044}
0.1	{0, 0, 1.026}
0.2	{0, 0, 0.977}
0.3	{0, 0, 0.903}
0.4	{0, 0, 0.813}
0.5	{0, 0, 0.716}
0.6	{0, 0, 0.623}
0.7	{0, 0, 0.541}
0.8	{0, 0, 0.474}

Bi = 0.5, Fo = 2, $N_F = 21$	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0	{0, 0, 1.152}
0.1	{0, 0, 1.135}
0.2	{0, 0, 1.085}
0.3	{0, 0, 1.010}
0.4	{0, 0, 0.918}
0.5	{0, 0, 0.819}
0.6	{0, 0, 0.723}
0.7	{0, 0, 0.638}
0.8	{0, 0, 0.568}

0.9	{0, 0, 0.425}		0.9	{0, 0, 0.515}
1	{0, 0, 0.396}		1	{0, 0, 0.482}
$\mathrm{Bi} = 1.5, \quad \mathrm{Fo} = 1, \quad N_F = 11$			$\mathrm{Bi} = 1.5, \quad \mathrm{Fo} = 2, \quad N_F = 21$	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$		y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0	{0, 0, 1.006}		0	{0, 0, 1.066}
0.1	{0, 0, 0.988}		0.1	{0, 0, 1.048}
0.2	{0, 0, 0.937}		0.2	{0, 0, 0.996}
0.3	{0, 0, 0.860}		0.3	{0, 0, 0.917}
0.4	{0, 0, 0.765}		0.4	{0, 0, 0.820}
0.5	{0, 0, 0.663}		0.5	{0, 0, 0.715}
0.6	{0, 0, 0.562}		0.6	{0, 0, 0.611}
0.7	{0, 0, 0.469}		0.7	{0, 0, 0.515}
0.8	{0, 0, 0.390}		0.8	{0, 0, 0.432}
0.9	{0, 0, 0.326}		0.9	{0, 0, 0.363}
1	{0, 0, 0.277}		1	{0, 0, 0.309}

Стационарное температурное поле. Следующий этап исследования был посвящен стационарному распределению температурного профиля, то есть распределению температуры при Fo → ∞.

В статье [1] применялось двухмерное преобразование Фурье, задаваемое следующим образом: $F(p,r) = \Phi[f(x,z)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z)e^{-i(px+rz)}dxdz$.

Далее будем придерживаться обозначений, введенных в статье [1]. Положим

$$A(p,y,r,\mathrm{Fo}) \triangleq \Phi[\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})],$$

$$a(p,r,\mathrm{Fo}) \triangleq \Phi[Q(x,z,\mathrm{Fo})].$$

Рассматривается случай $Q(x,z,\mathrm{Fo}) = \delta(x)\delta(z)$. Одним из свойств дельта - функции Дирака является то, что для любой непрерывной финитной функции $f(x)$ выполнено $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$. С использованием этого свойства, получаем следующее: $a(p,r,\mathrm{Fo}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\delta(z)e^{-i(px+rz)}dxdz =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-ipx}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)e^{-irz}\,dz\right)dx = 1$$

Далее, в [1] вводится предположение о том, что

$$A(p,y,r,\mathrm{Fo}) = B(p,y,r,\mathrm{Fo})e^{-\,i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)y}.$$

Положим $D(p,y,r,s) \triangleq L[B(p,y,r,\mathrm{Fo})]$, $b(p,r,s) \triangleq L[a(p,r,\mathrm{Fo})] = \frac{1}{s}$, где $L[\cdot]$ – преобразование Лапласа.

В [1] выводится, что $D(p,y,r,s) = b(p,r,s)W(p,y,r,s)$, где $W(p,y,r,s) =$

$$= \left(\frac{\sqrt{s+\gamma(p,r)}-\mathrm{Bi}}{\sqrt{s+\gamma(p,r)}+\mathrm{Bi}} e^{-(2-y)\sqrt{s+\gamma(p,r)}} + e^{-y\sqrt{s+\gamma(p,r)}}\right)\frac{1}{\sqrt{s+\gamma(p,r)}} *$$

$$* \left(1 - \frac{\sqrt{s+\gamma(p,r)}-\mathrm{Bi}}{\sqrt{s+\gamma(p,r)}+\mathrm{Bi}} e^{-2\sqrt{s+\gamma(p,r)}}\right)^{-1},$$

где $\gamma(p,r) = (1-\mu_{12}^2)p^2 + 2(\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{23})pr + (1-\mu_{23}^2)r^2$ – положительно определенная квадратичная форма.

Получим формулу для установившегося процесса. Согласно предельной теореме,

$$B(p,y,r,\infty) = \lim_{s\to 0} sb(p,r,s)W(p,y,r,s) = \lim_{s\to 0} W(p,y,r,s).$$

Тогда $B(p,y,r,\infty) = \left(\frac{\sqrt{\gamma(p,r)}-\mathrm{Bi}}{\sqrt{\gamma(p,r)}+\mathrm{Bi}} e^{-(2-y)\sqrt{\gamma(p,r)}} + e^{-y\sqrt{\gamma(p,r)}}\right)\frac{1}{\sqrt{\gamma(p,r)}} *$

$$* \left(1 - \frac{\sqrt{\gamma(p,r)}-\mathrm{Bi}}{\sqrt{\gamma(p,r)}+\mathrm{Bi}} e^{-2\sqrt{\gamma(p,r)}}\right)^{-1}.$$

Стационарное распределение температуры определяется по формуле:

$$\theta(x,y,z,\infty) = \Phi^{-1}[A(p,y,r,\mathrm{Fo})] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(p,y,r,\infty) e^{-i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)y}\, e^{i(px+rz)} dpdr.$$

Справедлива формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и, таким образом, интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов, один из которых содержит синус, а другой – косинус. Но $\theta(x,y,z,\infty)$ - функция, принимающая вещественные значения, поэтому интеграл с синусом должен быть равен нулю. В итоге,

$$\theta(x,y,z,\infty) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(p,y,r,\infty)\cos(px + rz - \mu_{12}py - \mu_{23}ry)\, dpdr.$$

В точке $(0,0)$ квадратичная форма $\gamma(p,r)$ обращается в нуль. Таким образом, функция $B(p,y,r,\infty)$ имеет особенность при $p = r = 0$. Далее показано, что $B(p,y,r,\infty)$ имеет конечный предел при $p = r = 0$. Обозначим $t = \sqrt{\gamma(p,r)}$ и вычислим предел:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{t-\mathrm{Bi}}{t+\mathrm{Bi}} e^{-(2-y)t} + e^{-yt}\right)\frac{1}{t}\left(1 - \frac{t-\mathrm{Bi}}{t+\mathrm{Bi}} e^{-2t}\right)^{-1},$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{t-\mathrm{Bi}}{t+\mathrm{Bi}} e^{-(2-y)t} + e^{-yt}\right)\frac{1}{t}\left(1 - \frac{t-\mathrm{Bi}}{t+\mathrm{Bi}} e^{-2t}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t-\mathrm{Bi})e^{-(2-y)t} + (t+\mathrm{Bi})e^{-yt}}{t(t+\mathrm{Bi} - (t-\mathrm{Bi})e^{-2t})} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(t-\mathrm{Bi})e^{yt} + (t+\mathrm{Bi})e^{(2-y)t}}{t((t+\mathrm{Bi})e^{2t} - t + \mathrm{Bi})} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\left(e^{yt} + e^{(2-y)t}\right) + \mathrm{Bi}\left(e^{(2-y)t} - e^{yt}\right)}{(t^2 + \mathrm{Bi}\, t)e^{2t} - t^2 + \mathrm{Bi}\, t} =$$

[Применим правило Лопиталя - Бернулли]

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(e^{yt} + e^{(2-y)t}\right) + t\left(e^{yt} + e^{(2-y)t}\right) + \mathrm{Bi}\left((2-y)e^{(2-y)t} - ye^{yt}\right)}{(2t + \mathrm{Bi}\,)e^{2t} + 2(t^2 + \mathrm{Bi}\, t)e^{2t} - 2t + \mathrm{Bi}} =$$

$$= \frac{2 + \mathrm{Bi}(2-2y)}{2\mathrm{Bi}}.$$

Окончательно,

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{t-\mathrm{Bi}}{t+\mathrm{Bi}} e^{-(2-y)t} + e^{-yt}\right) \frac{1}{t} \left(1 - \frac{t-\mathrm{Bi}}{t+\mathrm{Bi}} e^{-2t}\right)^{-1} = \frac{1+\mathrm{Bi}(1-y)}{\mathrm{Bi}}.$$

Таким образом, можно принять, что

$$B(0, y, 0, \infty) = \frac{1+\mathrm{Bi}(1-y)}{\mathrm{Bi}}.$$

Изложим примененный численный метод. Вместо несобственного интеграла вычислялся интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-H_p}^{H_p} \int_{-H_r}^{H_r} B(p, y, r, \infty) \cos(px + rz - \mu_{12}py - \mu_{23}ry)\, dpdr,$$

где H_p и H_r брали достаточно большими. Для вычисления интеграла $\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-H_p}^{H_p} \int_{-H_r}^{H_r} B(p, y, r, \infty) \cos(px + rz - \mu_{12}py - \mu_{23}ry)\, dpdr$ применялся следующий прием. Поскольку рассматриваемый интеграл является интегралом по прямоугольнику, то можно записать:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-H_r}^{H_r} \left(\int_{-H_p}^{H_p} B(p, y, r, \infty) \cos(px + rz - \mu_{12}py - \mu_{23}ry)\, dp \right) dr.$$

Обозначим

$I(r) = \int_{-H_p}^{H_p} B(p, y, r, \infty) \cos(px + rz - \mu_{12}py - \mu_{23}ry)\, dp$ и введем на $[-H_r, H_r]$ равномерную сетку

$$\omega_r = \left\{-H_r = r_0 < \cdots < r_{N_r-1} = H_r, \qquad r_j - r_{j-1} = h_r\right\}$$

с числом точек N_r и шагом

$$h_r = \frac{2H_r}{N_r - 1}.$$

Аппроксимируем интеграл $\int_{-H_r}^{H_r} I(r)\,dr$ по формуле трапеций: $I_h^r = \sum_{j=0}^{N_r-1} C_j I(r_j)$, где

$$C_j = \begin{cases} \frac{h_r}{2}, (j = 0) \vee (j = N_r - 1); \\ h_r, \qquad j \in \{1, \dots, N_r - 2\}. \end{cases}$$

Далее, введем на $[-H_p, H_p]$ равномерную сетку

$\omega_p = \left\{-H_p = p_0 < \dots < p_{N_p-1} = H_p,\ p_i - p_{i-1} = h_p\right\}$ с числом точек N_p и шагом $h_p = \frac{2H_p}{N_p-1}$. Аппроксимируем интеграл $I(r)$ по формуле трапеций:

$I_h^p = \sum_{i=0}^{N_p-1} C_i B(p_i, y, r, \infty) \cos(p_i x + rz - \mu_{12} p_i y - \mu_{23} r y)$, где

$$C_i = \begin{cases} \frac{h_p}{2}, (i = 0) \vee \left(i = N_p - 1\right); \\ h_p, \qquad i \in \{1, \dots, N_p - 2\}. \end{cases}$$

В итоге, $\theta(x, y, z, \infty) \approx I_h^{p,r} =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{i=0}^{N_p-1} \sum_{j=0}^{N_r-1} C_i\, C_j B\left(p_i, y, r_j, \infty\right) \cos\left(p_i x + r_j z - \mu_{12} p_i - \mu_{23} r_j y\right).$$

Погрешность оценивалась по правилу Рунге. Опишем его. Для «двухмерной» формулы трапеций справедливо следующее: $I_h^{p,r} \approx I + M h_p^2 + N h_r^2$, где

$R_{h_p,h_r} = M h_p^2 + N h_r^2$ - главный член погрешности. Тогда $R_{\frac{h_p}{2},\frac{h_r}{2}} = \frac{R_{h_p,h_r}}{4}$ и $I_{h/2}^{p,r} \approx I + + \frac{R_{h_p,h_r}}{4}$, и $R_{h_p,h_r} \approx 4\frac{I_h^{p,r} - I_{h/2}^{p,r}}{3}$.

При проведении численных расчетов брались следующие значения:

$H_r = H_p = 4$, $N_p = N_r = 81$, величина погрешности $\varepsilon = 0.001$ ($\left|R_{h_p,h_r}\right| < \varepsilon$).

Далее приведены результаты вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент проводился для двух разных тензоров теплопроводности. Один тензор соответствовал случаю анизотропии теплопроводности (табл. 3), второй – отсутствию анизотропии теплопроводности (табл. 4). Приведены изображения некоторых температурных профилей

(рис. 1, рис. 2).

1. $$\left(\lambda_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.8 & 2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 3 \end{pmatrix}$$

Таблица 3

Случай анизотропии теплопроводности

Bi = 1	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0.1	{0.1, 0, 1.671}
0.2	{0.1, 0, 0.905}
0.3	{0.2, 0.1, 0.590}
0.4	{0.2, 0.1, 0.435}
0.5	{0.3, 0.1, 0.338}
0.6	{0.3, 0.1, 0.273}
0.7	{0.4, 0.1, 0.228}
0.8	{0.5, 0.2, 0.194}
0.9	{0.5, 0.2, 0.170}
1	{0.6, 0.2, 0.152}

Bi = 1.5	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0.1	{0.1, 0, 1.652}
0.2	{0.1, 0, 0.886}
0.3	{0.2, 0.1, 0.570}
0.4	{0.2, 0.1, 0.415}
0.5	{0.3, 0.1, 0.317}
0.6	{0.3, 0.1, 0.250}
0.7	{0.4, 0.1, 0.204}
0.8	{0.5, 0.2, 0.168}
0.9	{0.5, 0.2, 0.143}
1	{0.6, 0.2, 0.122}

Bi = 0.5	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0.1	{0.1, 0, 1.711}
0.2	{0.1, 0, 0.946}
0.3	{0.2, 0.1, 0.631}
0.4	{0.2, 0.1, 0.478}
0.5	{0.3, 0.1, 0.383}
0.6	{0.3, 0.1, 0.318}
0.7	{0.4, 0.1, 0.276}
0.8	{0.5, 0.2, 0.245}
0.9	{0.5, 0.2, 0.225}
1	{0.6, 0.2, 0.211}

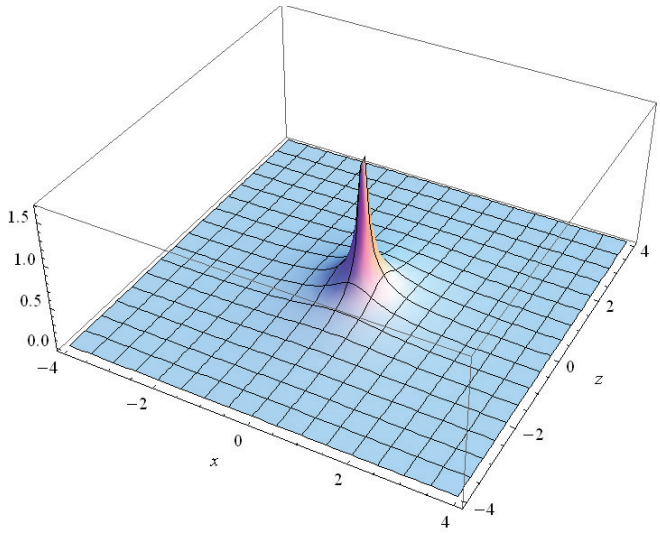

Рис. 1. Профиль температуры при Bi = 1, $y = 0.1$.

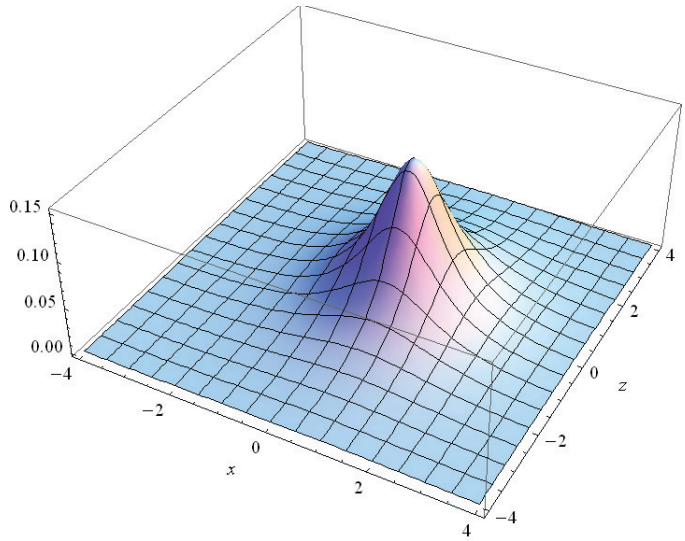

Рис. 2. Профиль температуры при Bi = 1, $y = 1$.

2. $(\lambda_{ij}) = diag(1, 4, 6)$

Таблица 4

Случай отсутствия анизотропии теплопроводности

Bi = 1	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0.1	{0, 0, 1.545}
0.2	{0, 0, 0.749}
0.3	{0, 0, 0.484}
0.4	{0, 0, 0.352}
0.5	{0, 0, 0.273}

Bi = 1.5	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0.1	{0, 0, 1.529}
0.2	{0, 0, 0.733}
0.3	{0, 0, 0.468}
0.4	{0, 0, 0.335}
0.5	{0, 0, 0.256}

Bi = 0.5	
y	$\{x_{max}, z_{max}, \theta_{max}\}$
0.1	{0, 0, 1.577}
0.2	{0, 0, 0.782}
0.3	{0, 0, 0.517}
0.4	{0, 0, 0.386}
0.5	{0, 0, 0.308}

0.6	{0, 0, 0.221}
0.7	{0, 0, 0.184}
0.8	{0, 0, 0.157}
0.9	{0, 0, 0.137}
1	{0, 0, 0.123}

0.6	{0, 0, 0.203}
0.7	{0, 0, 0.165}
0.8	{0, 0, 0.136}
0.9	{0, 0, 0.115}
1	{0, 0, 0.098}

0.6	{0, 0, 0.258}
0.7	{0, 0, 0.223}
0.8	{0, 0, 0.198}
0.9	{0, 0, 0.181}
1	{0, 0, 0.170}

Анализ результатов. При анализе распределения нестационарного температурного поля были рассмотрены две пластины с разными тензорами теплопроводности, причем, материал одной пластины анизотропный, а материалу второй соответствует диагональная матрица тензора теплопроводности. В статье приведена часть полученных результатов. Базовый результат, который был получен в ходе расчетов, следующий: проявление анизотропии теплопроводности может приводить к «сносу» температурного профиля по глубине формируемого температурного слоя охлаждаемой пластины.

Отметим наличие вершин на температурных профилях, так как происходит точечное тепловое воздействие на одну из сторон пластины. При этом с увеличением глубины от $y = 0$ до $y = 1$, высота вершины уменьшается.

В ходе реализации примененного численного метода были обнаружены следующие его недостатки. Для $\mathrm{Fo} < 5$ результаты расчетов согласовывались с физическим смыслом. Но для $\mathrm{Fo} \geq 5$ полученные результаты противоречили физическому смыслу. Наблюдалось быстрое убывание температурного профиля в отрицательную область без выхода в стационарный режим. Причиной этого является неустойчивый счет.

Также отметим, что правило Рунге не срабатывало при оценки погрешности квадратурной формулы для θ. Причина, как мы считаем, также в неустойчивом счете. Поэтому число узлов N_F квадратурной формулы устанавливалось экспериментально.

Для исследования стационарного распределения температурного поля были рассмотрены те же случаи, что и для нестационарного. Был подтвержден базовый результат, полученный в ходе первого исследования при $\mathrm{Fo} = 1, \mathrm{Fo} = 2$. Более того, координаты наибольшего значения θ среди всех ее значений на OXZ при фиксированном y в случае стационарного распределения температуры совпадали с координатами наибольшего значения при данном y при $\mathrm{Fo} = 1, \mathrm{Fo} = 2$.

Результаты вычислительного эксперимента, проведенного с целью исследования стационарного распределения температурного поля, показали, что при $x = y = z = 0$ интеграл для $\theta(x, y, z, \infty)$ расходится. Причина этого состоит в следующем. Плотность теплового потока имеет вид: $Q(x, z, \mathrm{Fo}) = \delta(x)\delta(z)$. Сначала, к данному выражению применяют двухмерное преобразование Фурье, а к полученному выражению –

преобразование Лапласа. После того, как было получено решение задачи в пространстве изображений, последовательно применяются обратные преобразования Лапласа и Фурье. В итоге, мы получаем решение θ, которое «содержит» в себе дельта - функцию. Отсюда и расходимость в точке $x = y = z = 0$.

Список литературы

1. Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропной охлаждаемой пластины, находящейся под воздействием внешнего теплового потока //Известия РАН. Энергетика. 2012. № 6. С. 108-117.
2. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
3. Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392 с.
4. Зарубин В. С. Расчет и оптимизация термоизоляции. М.: Энергоатомиздат, 1991. 192 с.
5. Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С. Термоактивная прокладка как средство управляемого воздействия на температурное поле конструкции //Известия РАН. Энергетика. 2002. № 4. С. 131-141.
6. Материалы и покрытия в экстремальных условиях. Взгляд в будущее: В 3т. Т.1 Прогнозирование и анализ экстремальных воздействий/ Ю.В. Полежаев [и др.]. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 224 с.
7. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Чипашвили А.А. Аналитическое исследование тепломассопереноса при пленочном охлаждении тел //Теплофизика высоких температур. 2006. Т.44, №1. С.107-112.
8. Формалев В.Ф., Кузнецова Е.А. Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве. Изд-во МАИ – Принт, 2010. 308 с.
9. Кузнецова Е.Л. Математическое моделирование тепломассопереноса в композиционных материалах при высокотемпературном нагреве в элементах ракетно-космической техники. М.: Изд-во МАИ – Принт, 2010. 160 с.
10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
11. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
12. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. 668с.