

УДК 62-1/9;514.758.2

Изучение лемнискаты Бернулли и конструирование простейшего механизма для её построения

***Петров Н.С.**, студент
кафедра «Плазменные энергетические установки»,
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана*

***Мустонен А.Б.**, студент
кафедра «Плазменные энергетические установки»,
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана*

*Научный руководитель: Бурлай В. В., доцент, к.т.н.
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
moskalenko@bmstu.ru*

Цель работы: исследование геометрических свойств одного из плоских сечений поверхности тора; конструирование простейшего механизма для построения лемнискаты.

Лемни́ската Берну́лли — плоская алгебраическая кривая. Определяется как геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами. Лемниската по форме напоминает восьмёрку или символ бесконечности.

История

Название происходит от греческого — лента, повязка. В Древней Греции «лемнискатой» называли бантик, с помощью которого прикрепляли венок к голове победителя на спортивных играх. Эту лемнискату называют в честь швейцарского математика Якоба Бернулли, положившего начало её изучению.

Уравнение лемнискаты впервые опубликовано в статье *Curvatura Laminae Elasticae* Якоба Бернулли в журнале *Acta eruditorum* в 1694 году. Бернулли не знал, что четырнадцатью годами ранее Джованни Кассини уже исследовал более общий случай. Квадратуру лемнискаты впервые выполнил Джюлио-Карло Фаньяно, опубликовав в 1718 году статью *Metodo per misurare la lemniscata* и положив тем самым начало изучению эллиптических интегралов, продолженное впоследствии Леонардом Эйлером. Некоторые свойства кривой были также исследованы Якобом Штейнером в 1835 году.

Геометрический смысл

<http://sntbul.bmstu.ru/doc/582916.html>

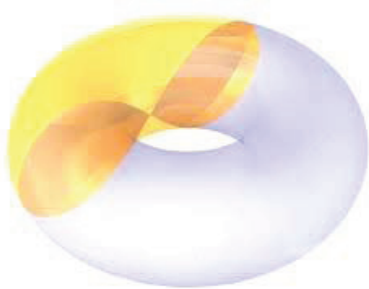


Рис. 1. Лемниската Бернулли как сечение тора

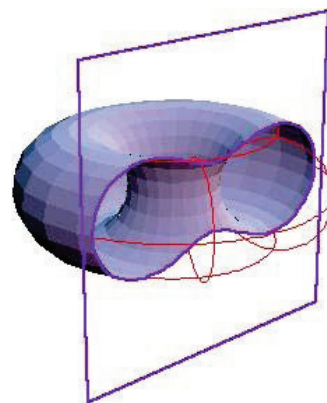


Рис. 2. Овал Кассини как сечение тора

Лемниската является сечением тора плоскостью (рисунок 1), образованной касательной к внутренней линии горла тора и прямой, параллельной его оси.

На рисунке 2 изображен более общий случай — это овал Кассини, получаемый при сечении тора любой плоскостью, параллельной его оси.

Математическая часть

Начнем с краткого рассмотрения уравнения тора:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$$

И уравнения овала Кассини, получающегося при сечении тора плоскостью:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$$

Здесь c — половина расстояния между фокусами и a — произведение расстояний от фокусов до любой точки кривой. На рисунке 3 приведены графики овала Кассини в зависимости от c и a .

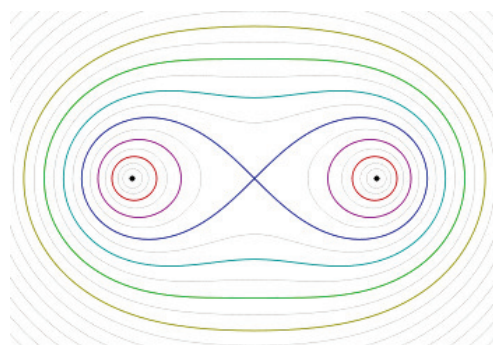


Рис. 3. Различные формы овала Кассини

Но, как говорилось ранее, лемниската - частный случай овала Кассини и, приняв фокусное расстояние равным $2a$, мы получим уравнение лемнискаты Бернулли:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2) \text{ ,или в полярных координатах: } \rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi.$$

Рассмотрим детальнее уравнение лемнискаты Бернулли и ее график. Если длина отрезка F_1F_2 есть c , то расстояния от середины O отрезка F_1F_2 до F_1 и F_2 равны $(c/2)$ и произведение этих расстояний равно $c^2/4$ (рис.4). Потребуем сначала, чтобы величина p неизменного произведения равнялась как раз $(c^2/4)$, т.е. $MF_1 \cdot MF_2 = \frac{c^2}{4}$. Тогда точка O будет лежать на лемнискате, а сама лемниската будет иметь вид “лежащей восьмерки” (рис.4). Если продолжить отрезок F_1F_2 в обе стороны до пересечения с лемнискатой, то получим две точки A_1 и A_2 . Легко выразить расстояние между ними $A_1A_2 = x$ через известное нам расстояние $F_1F_2 = c$. Для этого заметим, что расстояние точки A_1 до F_2 равно $(x/2) - (c/2)$, а расстояние A_1 до F_2 равно $(x/2) + (c/2)$; поэтому произведение расстояний есть $\left(\frac{x}{2} + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{c}{2}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4}$.

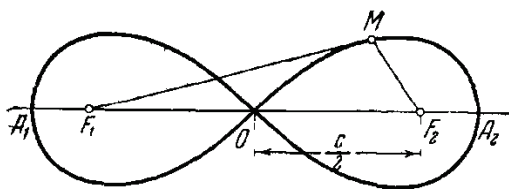


Рис.4. График лемнискаты при $p = (c^2/4)$

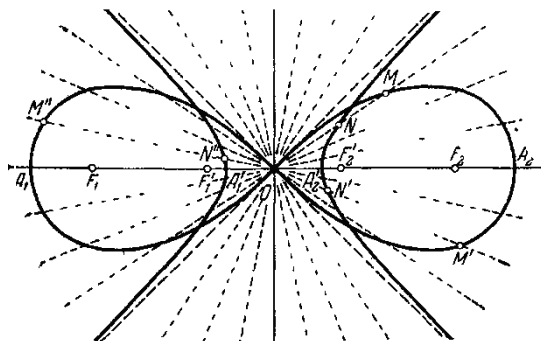


Рис. 5. Иллюстрация связи лемнискаты равнобочной и равнобочной гиперболы

Но это произведение по условию должно равняться $(c^2/4)$, поэтому $\frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4}$, откуда $x^2 = 2c^2$ и $x = \sqrt{2}c \approx 1.414c$

Существует замечательная связь между такой лемнискатой и равнобочной гиперболой. Будем проводить из точки O различные прямолинейные лучи (рис. 5) и отмечать на них точки пересечения с лемнискатой. Оказывается, что пока угол наклона луча к OF_1 (или к OF_2) будет, меньше 45° , луч этот будет пересекать лемнискату еще в одной точке, помимо O ; если же угол наклона будет 45° или больше, то второй точки пересечения не будет. Возьмем какой-либо луч первой группы, и пусть он встречает лемнискату в точке M (отличной от O); отложим на этом луче от точки O отрезок $ON = (1/OM)$. Если это построение проделать для каждого луча первой группы, то точки N , соответствующие точкам M лемнискаты, все расположатся на равнобочной гиперболе с фокусами в F'_1 и F'_2 таких, что $OF'_1 = \frac{1}{OF_1}$ и $OF'_2 = \frac{1}{OF_2}$. Если же величину неизменного произведения p взять не равной $(c^2/4)$, то лемниската изменит свой вид. В случае, когда p меньше $(c^2/4)$, лемниската состоит из двух овалов, один из которых содержит

<http://sntbul.bmstu.ru/doc/582916.html>

внутри точку F_1 , а другой — точку F_2 . (рис. 6). В случае, когда произведение p больше $(c^2/4)$, но меньше $(c^2/2)$ лемниската имеет вид бисквита (рис.7). Если p мало отличается от $(c^2/4)$, то “талиа бисквита” K_1K_2 очень узка и вид кривой близок к “лежащей восьмерке”.

Если же p мало отличается от $(c^2/2)$, то лемниската почти не имеет “талиа”.

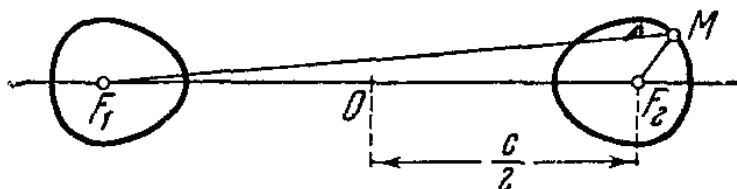


Рис. 6. График лемнискаты при $p < (c^2/4)$

При p , равном $(c^2/2)$ или большем, чем $(c^2/2)$, “талиа” совсем исчезает, и лемниската принимает вид овала (рис. 8; здесь для сравнения изображены также другие лемнискаты. Также трудно не заметить сходство рисунков 8 и 3. Это объясняется тем, что, как было сказано ранее, лемниската Бернулли есть частный случай овала Кассини).

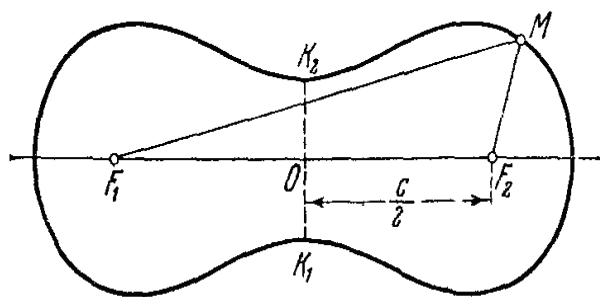


Рис. 7 График лемнискаты при $(c^2/2) > p > (c^2/4)$

Некоторые свойства лемнискаты Бернулли.

1. Она симметрична относительно двойной точки — середины отрезка между фокусами.

Кривая имеет 2 максимума и 2 минимума. Их координаты:
$$\begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}c \\ y = \pm \frac{c}{2} \end{cases}$$

2. Расстояние от максимума до минимума, которые находятся по одну сторону от срединного перпендикуляра отрезка между фокусами равно расстоянию от максимума (или

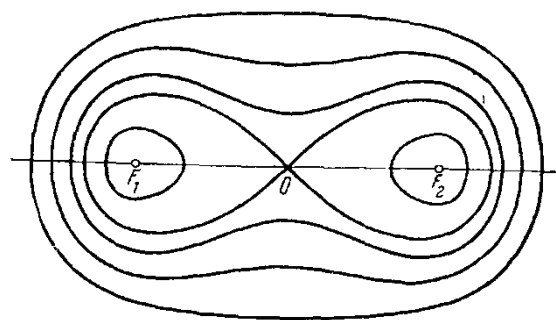


Рис.8. Различные формы лемнискаты Бернулли

от минимума) до двойной точки.

3. Лемнискату описывает окружность радиуса $a = c\sqrt{2}$, поэтому иногда в уравнениях производят эту замену.

4. Точка, где лемниската пересекает саму себя, называется *узловой* или *двойной* точкой.

5. Касательные в двойной точке составляют с отрезком F_1F_2 углы $\pm \frac{\pi}{4}$.

6. Угол μ , составляемый касательной в произвольной точке кривой с радиус-вектором точки касания равен $2\varphi + \frac{\pi}{2}$.

7. Касательные в точках пересечения кривой и хорды, проходящей через двойную точку, параллельны друг другу.

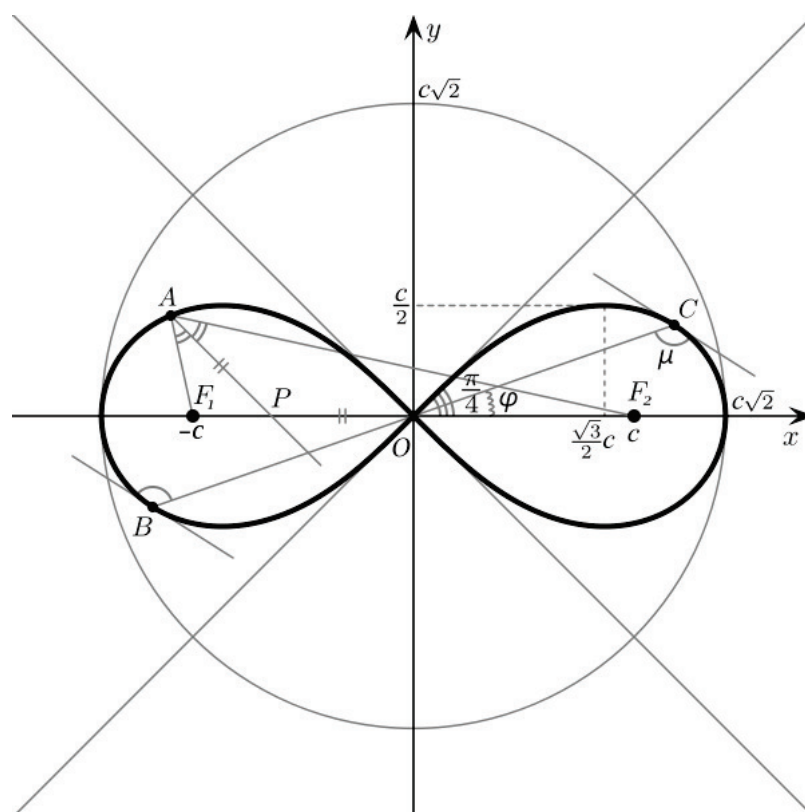


Рис. 9. Иллюстрация свойств лемнискаты Бернулли

8. Инверсия относительно окружности с центром в двойной точке, переводит лемнискату Бернулли в равнобочную гиперболу.

9. Радиус кривизны лемнискаты есть $R = \frac{2c^2}{3\rho}$.

10.Кривая является геометрическим местом точек, симметричных с центром равносторонней гиперболы относительно её касательных.

11.Отрезок биссектрисы угла между фокальными радиусами-векторами точки лемнискаты равен отрезку от центра лемнискаты до пересечения её оси с этой биссектрисой.

12.Материальная точка, движущаяся по кривой под действием однородного гравитационного поля, пробегает дугу за то же время, что и соответствующую хорду. При этом ось лемнискаты составляет 45° угол с вектором напряжённости поля, а центр лемнискаты совпадает с исходным положением движущейся точки.

13.Площадь полярного сектора $\varphi \in [0, \alpha]$, при $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$:

$$S(\alpha) = \frac{c^2}{2} \sin 2\alpha.$$

14.В частности, площадь каждой петли $2S\left(\frac{\pi}{4}\right) = c^2$, то есть площадь, ограниченная кривой, равна площади квадрата со стороной $c\sqrt{2}$.

15.Перпендикуляр, опущенный из фокуса лемнискаты на радиус-вектор какой-либо её точки, делит площадь соответствующего сектора пополам.

16.Длина дуги лемнискаты между точками $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \varphi$ выражается эллиптическим интегралом I рода:

$$L(\varphi) = c \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2 \varphi}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 \theta}} = \frac{c}{\sqrt{2}} F\left(\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

где $2\sin^2 \varphi = \sin^2 \theta$.

17.В частности, длина всей лемнискаты:

$$4L\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2c\sqrt{2} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 5,9c.$$

Конструирование механизма, способного чертить лемнискату Бернулли.

Анализ научно-технической литературы позволил определить кинематические схемы и конструкции механизмов, пригодных к вычерчиванию лемнискаты. На рис. 10 приведены схемы таких механизмов: рычажных: а) и б) , а так же механизма Ватта – в).

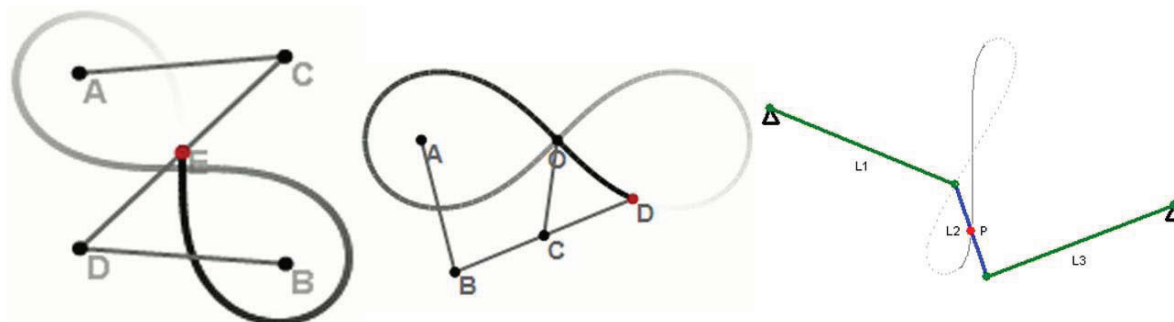


Рис. 10. Слева направо: два шарнирных метода построения лемнискаты Бернулли; механизм Ватта

В работе в качестве базовой структурной схемы был выбран шарнирный механизм (рис. 10) по схеме а). В соответствии с ним была изготовлена действующая модель. Преимущество данной схемы состоит в том, что вращающиеся звенья механизма движутся в одну сторону на всем протяжении, что и является основным мотивом в выборе этой упрощенной конструкции.

Тестирование действующей модели (см. Рис. 11), показало, что мы действительно можем начертить лемнискату Бернулли. Однако, анализируя уменьшенную модель, мы пришли к выводу, что при попытке осуществить правильное движение механизма без вмешательства человека (т.е. при помощи работы двигателя), возникают технические сложности. Они связаны с непостоянными по модулю угловыми скоростями вращающихся звеньев, следовательно, соединение этих звеньев при помощи шестеренок, ремня натяжения или других подобных механизмов – невозможно.

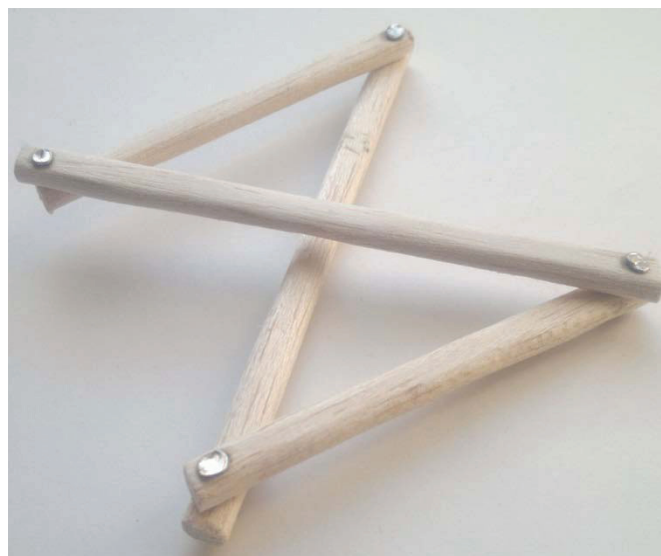


Рис. 11. Упрощенная модель механизма



Рис. 12. Проходя через мертвую точку, механизм начинает чертить окружность

Была осуществлена попытка оснастить мотором одно из звеньев, в то время как второе будет двигаться за первым, но в результате проделанного эксперимента (вращая только одно из звеньев), выяснилось, что такая конструкция тоже невозможна из-за «проблемной» точки – точки, когда все звенья механизма находятся на одной линии. В этом случае не было полной уверенности, что механизм будет двигаться, описывая нужную нам кривую. Т.е. механизм чертил лемнискату Бернулли и в любой момент мог «перестроиться» в прямоугольник и начать описывать окружность (См. Рис. 12).

Проанализировав движение через эту «проблемную» точку, удалось выяснить причину такого процесса. Причина заключается в неоднозначности движения, а значит, механизм в таком виде не сможет полноценно выполнять функцию без постороннего вмешательства человека.

Т.к. звенья вращаются с разными по модулю угловыми скоростями в разный промежуток времени, то невозможно установить два различных двигателя. Для разрешения вопроса с «проблемной» точкой на следующем этапе исследований второе звено было оснащено трещоткой (Рис. 13), которая давала возможность совершать вращение звена только в одну



Рис. 13. Первоначальная трещотка.

сторону, однако, и при этом возникли трудности связанные с заклиниванием механизма в той же проблемной точке. Попытка устранить заклинивание была предпринята благодаря

уменьшению размера зубца трещотки и увеличение количества зубцов, но и такая модернизация механизма желаемого эффекта не принесла. Таким образом, на данном этапе работы можно сделать следующий **вывод:** реализация механизма вычерчивания лемнискаты Бернулли на базе выбранной шарнирной схемы с электроприводом затруднена, ввиду неоднозначности движения звеньев механизма вблизи проблемной точки, которая расположена на прямой, проходящей через фокусы лемнискаты. В дальнейшем предполагается продолжить исследование для чего механизм будет оснащен шаговым электроприводом, позволяющим сгладить неравномерность движения звеньев, а так же дополнительными элементами, которые призваны выполнить функцию инициатора движения звена в заданном направлении, т.е. фактически устроят выше упомянутую неопределенность движения.

Список литературы

1. Бурлай В.В. и др. Плоские линии, Учеб. Пособие – М.: Радио и связь, 2002. – 36 с.
2. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые.-3-е изд.,испр.-М.:Изд-во Моск. Центра непрерывного мат.образования,2000.-122 с.
3. Маркушевич А.И. Замечательные кривые. Площади и логарифмы. - Ижевск:Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика", 2000.-99 с.
4. Никифоровский В. А. Великие математики /Бернулли /; АН СССР; (Серия "История науки и техники") – М. : Наука, 1984. - 175 с.
5. Савелов А. А., Плоские кривые, М.:, Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. - 294 с.
6. Хорькова Н. Г., Чередниченко А. В.; под ред. Зарубина В.С. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. - 46 с.
7. STRAIGHT-LINE MECHANISMS IN THE COLLECTION OF
8. BAUMAN MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY
9. D. Klyukin¹, M.Shchedrin, V. Tarabarin. The 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, Mexico, 19-25 June, 2011.