

УДК 538.94
01.04.02

Томограммы для конденсата Бозе-Эйнштейна и уравнение Гросса-Питаевского

08, август 2012

А.К. Федоров

Студент,
кафедра «Защита информации»

Научный руководитель: С.О. Юрченко
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Физика»,
старший научный сотрудник НОЦ «Фотоника и ИК-техника».

МГТУ им. Н.Э. Баумана
bauman@bmstu.ru

Предварительные сведения. В последние годы активно развивается новый подход к нерелятивистской квантовой механике – квантовая томография [1-4], основанная на использовании симплектических томограмм. Симплектические томограммы – это неотрицательные функции распределения вероятностей. При этом томографическая формулировка полностью эквивалентна другим известным на сегодняшний день формулировкам квантовой механики, а томограмма напрямую связана с различными функциями квазираспределений, например, W -функцией Вигнера [5], P -функцией Глаубера-Сударшана [6, 7], Q -функцией Хусими-Кано [8].

Квантовая томография также развивается как экспериментальное направление. Основным приемом является метод балансного гомодинного детектирования [3, 4].

Томографическое представление квантовой механики использует линейное каноническое преобразование фазового пространства – действие симплектической группы $SP_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \eta \\ \eta' & \mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (1)$$

где q – координата, p – импульс, а μ, μ', η, η' – действительные числа.

В общем случае (1) – это поворот фазового пространства с взаимным масштабированием по осям p и q . Симплектическая томограмма $T(\varepsilon, \mu, \eta)$ наблюдаемой величины ε , которая является линейной комбинацией квадратурных компонент:

$$\hat{\varepsilon} = \mu \hat{q} + \eta \hat{p}, \quad m = \hbar = 1$$

определяется через волновую функцию следующим образом:

$$T(\varepsilon, \mu, \eta) = |\Psi(\varepsilon)|^2 = |F\psi(q)|^2 \quad (2)$$

где F – линейный унитарный оператор.

Этим линейным унитарным оператором (2) является интегральный оператор дробного преобразования Фурье [1]:

$$T(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{2\pi|\eta|} \left| \int \psi(q) \exp \left[\frac{i\mu}{2\eta} q^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta} q \right] dq \right|^2 \quad (3)$$

По определению (2), томограмма – это нормированная, положительная и однородная функция:

$$\int T(\varepsilon, \mu, \eta) d\varepsilon = 1 \quad T(\varepsilon, \mu, \eta) \geq 0 \quad T(\varepsilon, \mu, \eta) = |\lambda| T(\lambda\varepsilon, \lambda\mu, \lambda\eta)$$

Следовательно томограмма удовлетворяет уравнению Эйлера [2]:

$$T(\varepsilon, \mu, \eta) = -\mathbf{r} \nabla T(\varepsilon, \mu, \eta) \quad (4)$$

$\mathbf{r}$ – радиус-вектор фазового пространства после (1), ∇ – оператор набла.

Общий вид решения уравнения (4):

$$T(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{|\mu|} f\left(\frac{\varepsilon}{\mu}, \frac{\eta}{\mu}\right)$$

f – произвольная функция.

Функции, удовлетворяющие уравнению (4), называется томограммами Френеля. Следовательно, несмотря на то, что томограмма является функцией трех переменных, существует возможность реализовать ее представление через две нормированные переменные.

Таким образом, при помощи методов квантовой томографии можно исследовать различные квантовые системы. В работе [9] было показано, что решение уравнение Гросса-Питаевского для конденсатной волновой функции может быть аппроксимировано волновой функцией основного состояния гармонического осциллятора. Целью данной работы аппроксимация томограммы конденсата Бозе-Эйнштейна томограммой основного состояния гармонического осциллятора. Решение задачи о гармоническом осцилляторе в томографическом представлении может быть получено с помощью метода представления томограммы интегралом Фейнмана по траекториям, развитого в работе [2].

Поскольку томограмма связана с волновой функцией дробным преобразованием Фурье, используя формулу Фейнмана для волновой функции, можно получить выражение для симплектической томограммы через интеграл Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве [10]:

$$T(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{2\pi|\eta|} \left| \int \int \int D\{x(t)\} \exp \left[iS(q_2, q_1) + \frac{i\mu}{2\eta} q_2^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta} q_2 \right] \psi(q_1) dq_1 dq_2 \right|^2 \quad (5)$$

где S – функционал действия, $\psi(q)$ – начальное условие задачи Коши для уравнения Шредингера, а символ $D\{x(t)\}$ обозначает интегрирование по фазовому пространству обобщенных координат и импульсов [11]:

$$D\{x(t)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \left(-\frac{2\pi i}{\Delta t_j} \right)^{\frac{3}{2}} dx_j$$

В работе используется определение функционального интеграла, основанное на теореме Чернова [12, 13]. Эволюция томограммы подчиняется обобщенному уравнению Фоккера-Планка, поэтому можно использовать формулу (5) для представления его решения и построения томографической теории возмущений [14].

Формулировка результатов. Для описания динамики конденсата можно использовать уравнение Гросса-Питаевского [15, 16]:

$$\left\{ -\frac{1}{2} \Delta + gN |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{1}{2} [\omega_{\parallel}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2] \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = i \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (6)$$

где Δ – лапласиан, g – константа связи, N – число конденсированных атомов, частоты $\omega_{\parallel}$ и ω_z соответствуют осевым и продольным колебаниям.

Стационарное решение уравнения (6) имеет вид:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-iE_a t)$$

В статье [17] показано, что решение уравнения (6) также может иметь вид солитона. Для одномерного аналога уравнения (1) оно имеет вид:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2I_x}} \exp(-i\mu_c t) \operatorname{sech}\left(\frac{x}{l_x}\right)$$

где μ_c – химический потенциал.

В томографическом представлении решение уравнения Гросса-Питаевского имеет вид [18]:

$$T_{BEC}(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{2\pi|\eta|} \left| \int \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \operatorname{sech}(\gamma q) \exp\left(\frac{i\mu}{2\eta} q^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta} q\right) dq \right|^2 \quad (7)$$

где L – нормализованная длина, μ, η – параметры томограммы. Параметр γ :

$$\gamma = \frac{gLN}{2}$$

Для численных экспериментов используется экспериментальное значение параметра $\gamma=0.82$ [19]. На рис. 1 представлено численное решение (7) уравнения (6).

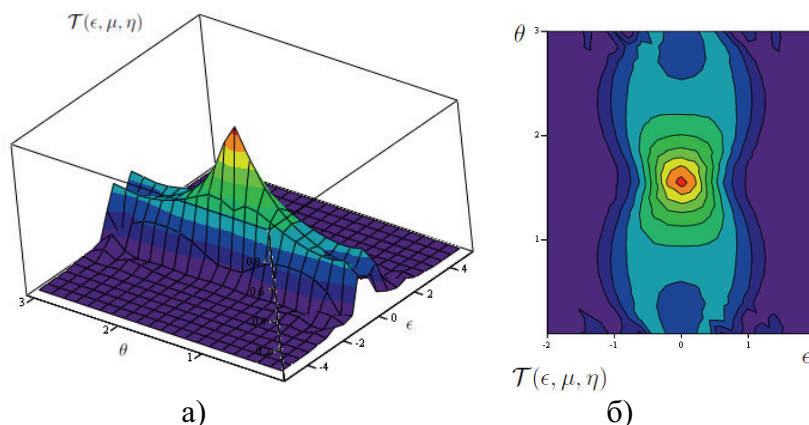


Рис. 1. Оптические томограммы конденсата ($\mu=\cos(\theta)$, $\eta=\sin(\theta)$).

Итак, основным результатом работы [9], является теорема, согласно которой существует приближение решения уравнения (6) в виде основного состояния гармонического осциллятора при определенном параметре ω :

$$\psi(x) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega(x-x_0)^2}{2}\right)$$

В работе [2] был разработан подход к решению задачи о гармоническом осцилляторе. Решения задачи о гармоническом осцилляторе имеет вид:

$$T_o(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{2^{-n}}{n! \sqrt{\pi(\mu^2 + \eta^2)}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{\mu^2 + \eta^2}\right] H_n^2\left[\frac{\varepsilon^2}{\mu^2 + \eta^2}\right] \quad (8)$$

где $H(x)$ – полиномы Эрмита.

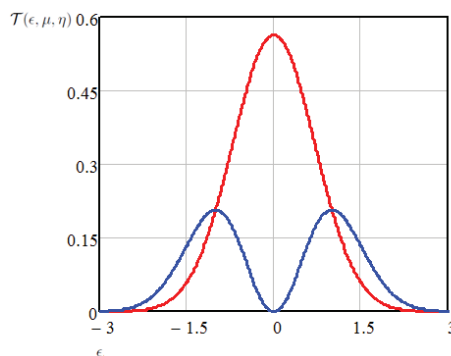


Рис. 2. Томограммы основного и первого возбужденного состояния. Томограмма основного состояния имеет вид:

$$T_0(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \eta^2)}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{\mu^2 + \eta^2}\right] \quad (9)$$

Оптическая томограмма основного и первого возбужденного состояния гармонического осциллятора представлена на рис. 2.

Таким образом, численно исследованы решения уравнения (6) в виде солитона (7) и в виде основного состояния гармонического осциллятора (8) в томографическом представлении квантовой механики. Как видно из рис. 3, при определенном подборе параметров можно добиться того, чтобы приближенное решение (9) было достаточно близко к солитонному (7), что хорошо согласуется с аналитическими результатами работы [9].



Рис. 3. Решение уравнения (1): сплошная линия – решение (7), ■ – решение (9).

Автор благодарен профессору Ю.Е. Лозовику за плодотворные обсуждения.

Литература

1. Ibort A., Man'ko V.I., Marmo G., Simoni A., Ventriglia F. An Introduction to the Tomographic Picture of Quantum Mechanics // arXiv:0904.4439v1[quant-ph], (2009).
2. Федоров А.К., Юрченко С.О. Симплектические томограммы в представлении фейнмановских интегралов по траекториям // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2012 (to be published).
3. Beck M., Smithey D.T., Raymer M.G. Experimental Determination of Quantum-phase Distribution Using Optical Homodyne Tomography // Phys. Rev. A., **48** (1993), 890–893.
4. Lvovsky A.I. et al. Quantum Process Tomography with Coherent States // New J. of Phys., **13**, 013006 (2011).

5. Wigner E.P. On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium // *Phys. Rev.*, **40** (1932), 749–759.
6. Glauber R.J. Photon Correlation // *Phys. Rev. Lett.*, **10** (1963), 84–86.
7. Sudarshan E.C.G. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams // *Phys. Rev. Lett.*, **10** (1963), 227–279.
8. Husimi E. Some Formal Properties of the Density Matrix // *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, **23** (1940), 264–314.
9. Маслов В.П., Чуркин А.В. Об одном решении уравнения Гросса-Питаевского для конденсатной волновой функции // *Математические заметки*, **78** (2005), №4, 604–607.
10. Feynman R.P., Hibbs A.R. Quantum mechanics and path integrals, N.Y.: McGraw-Hill – (1965).
11. Garrod C. Hamiltonian Path-Integral Methods // *Rev. Mod. Phys.*, **38** (1966), №3, 483–494.
12. Bottcher B., Butko Ya. A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Feynman formulas and path integrals for some evolution semigroups related to tau-quantization // *Russ. J. Math. Phys.*, **18** (2011), №4, 387–399.
13. Chernoff R. Product Formulas, Nonlinear Semigroups and Addition of Unbounded Operators // *Mem. Amer. Math. Soc.* **140** (1974), 1–121.
14. Федоров А.К. Метод томографического интеграла Фейнмана в квантовой механике. Сборник статей участников молодежной инженерно-научной выставки «Политехника». М.: НТА «АПФН», 2011, 208–215.
15. Питаевский Л.П. Вихревые нити в неидеальном бозе-газе // *ЖЭТФ*, **40** (1961), №2, 195–207.
16. Gross E.P. Hydrodynamics of a Superfluid condensate // *J. Math. Phys. A*, **4** (1963), 195–207
17. Carr L.D., Castin Y. Dynamics of a matter-wave bright soliton in an expulsive potential // *Phys. Rev. A*, **66**, 063602 (2002).
18. De Nicola S., Fedele R., Man'ko M.A., Manko V.I. Tomographic-probability description of solitons in Bose-Einstein Condensates // *Eur. Phys. J. B*. **35** (2003), 385–390.
19. Khaykovich L., Schreck F., Ferrari G. et al. Formation of a Matter-Wave Bright Soliton // *Science*, **296** (2003), 1290–1293.