

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

ЭЛЕКТРОННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Построение траекторий летательных аппаратов с немонотонным изменением энергии

04, апрель 2013

DOI: 10.7463/0413.0554666

Канатников А. Н.

УДК 517.977

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
skipper@bmstu.ru

1. Введение

При планировании траекторий летательных аппаратов практикуют использование шестимерной модели движения [1, 2, 3, 4], в которой летательный аппарат рассматривается как материальная точка. При этом переменными состояния являются:

H — высота (координата вдоль оси Oy земной системы координат);

L — дальность (координата вдоль оси Ox земной системы координат);

Z — боковое отклонение (координата вдоль оси Oz земной системы координат);

V — модуль скорости;

ϑ — угол наклона траектории;

ψ — угол курса, отсчитываемый против часовой стрелки.

В этих переменных движение летательного аппарата описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{V} = (n_x - \sin \vartheta)g, & \dot{H} = V \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \frac{(n_y \cos \gamma - \cos \vartheta)g}{V}, & \dot{L} = V \cos \vartheta \cos \psi, \\ \dot{\psi} = -\frac{n_y g \sin \gamma}{V \cos \vartheta}, & \dot{Z} = -V \cos \vartheta \sin \psi. \end{cases} \quad (1)$$

В представленной модели параметры n_x (продольная перегрузка), n_y (поперечная перегрузка), γ (угол наклона вектора перегрузки) являются управляемыми.

В рамках рассматриваемой модели ставится терминальная задача, состоящая в выборе такого управления, при котором летательный аппарат из одного (начального) состояния

$H_0, L_0, Z_0, V_0, \vartheta_0, \psi_0,$

переходит в другое (конечное) состояние

$$H_*, \quad L_*, \quad Z_*, \quad V_*, \quad \vartheta_*, \quad \psi_*.$$

Кроме того, заданы начальные n_{x0}, n_{y0}, γ_0 и конечные n_{x*}, n_{y*}, γ_* значения управлений.

При заданном времени движения поставленная задача может быть решена в рамках концепции обратных задач динамики [3]. После замены управлений

$$v_1 = n_x, \quad v_2 = n_y \cos \gamma, \quad v_3 = n_y \sin \gamma \quad (2)$$

система (1) становится аффинной, она приводится к каноническому виду, который можно записать в векторной форме следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{r}} = g(A + B\mathbf{v}), \quad (3)$$

где

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} H \\ L \\ Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ \cos \vartheta \cos \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \sin \psi \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix},$$

а g — ускорение свободного падения (элементы матрицы B следует рассматривать как функции переменных состояния $\dot{H}, \dot{L}, \dot{Z}$).

Согласно концепции обратных задач динамики следует выбрать траекторию $\mathbf{r}(t)$ движения летательного аппарата, удовлетворяющую заданным граничным условиям (например в классе полиномов от времени), а затем для выбранной траектории рассчитать управление в форме обратной связи [5].

Если время движения не задано, то терминальную задачу можно решать, выбрав то или иное значение этого параметра. Однако такой подход оказывается неэффективным. Для решения этого варианта терминальной задачи предложен метод, заключающийся в замене независимого переменного (времени) другим параметром — нормированной механической энергией [6, 7]

$$E = H + \frac{V^2}{2g}.$$

При этой замене, а также при замене управлений (2) система уравнений (1) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} V' = \frac{(v_1 - \sin \vartheta)g}{Vv_1}, & H' = \frac{\sin \vartheta}{v_1}, \\ \vartheta' = \frac{(v_2 - \cos \vartheta)g}{V^2v_1}, & L' = \frac{\cos \vartheta \cos \psi}{v_1}, \\ \psi' = -\frac{v_3g}{V^2v_1 \cos \vartheta}, & Z' = -\frac{\cos \vartheta \sin \psi}{v_1}, \end{cases} \quad (4)$$

где штрихом обозначены производные по E .

В системе (4) известен диапазон изменения независимой переменной, поскольку известны начальное E_0 и конечное E_* значения переменной E . Границные условия терминальной задачи для системы (1) определяют начальные и конечные значения переменных H, L, Z и их первых производных по E . Из этих же граничных условий вытекают пары линейных уравнений связи, которым подчиняются начальные и конечные значения вторых производных переменных H, L, Z по E . Решение такой задачи может быть найдено в классе полиномов от энергии пятой степени [6, 7].

К сожалению, указанный метод предполагает, что движение летательного аппарата сопровождается монотонным изменением механической энергии во времени. Для существования траектории с монотонным изменением энергии необходимо и достаточно, чтобы начальные и конечные значения управлений удовлетворяли условиям согласования

$$n_{x0} \operatorname{sign}(E_* - E_0) > 0, \quad n_{x*} \operatorname{sign}(E_* - E_0) > 0, \quad (5)$$

где

$$E_0 = H_0 + \frac{V_0^2}{2g}, \quad E_* = H_* + \frac{V_*^2}{2g} \quad —$$

начальное и конечное значения энергии. При нарушении условий согласования указанный метод неприменим.

В данной статье обсуждаются способы планирования траекторий с немонотонным изменением энергии, которые тем не менее основаны на энергетическом методе.

В разд. 2 и 3 обсуждаются маневры, которые могут выполняться в начале и конце траектории с целью преодоления нарушенных условий согласования. В разд. 4 обсуждаются приемы построения траекторий, связанные с выбором дополнительных опорных точек.

2. Начальный переходный маневр

Один из подходов к планированию траекторий летательного аппарата при нарушении условия согласования состоит в выполнении в начальной или конечной точке кратковременного маневра, цель которого — изменение знака продольной перегрузки. Кратковременность маневра, с одной стороны, предполагает, что величина продольной перегрузки в начальной (конечной) точке невелика, а с другой стороны, позволяет считать, что для новой начальной (конечной) точки изменение энергии на интервале движения будет иметь тот же знак, что и для исходной начальной (конечной) точки, т.е. в новой точке условие согласования будет выполнено.

Рассмотрим случай, когда нарушено первое неравенство (5). Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_0 &= (H_0, L_0, Z_0, V_0, \vartheta_0, \psi_0)^T \text{ — начальная точка фазовой траектории;} \\ \boldsymbol{x}_* &= (H_*, L_*, Z_*, V_*, \vartheta_*, \psi_*)^T \text{ — конечная точка траектории.} \end{aligned}$$

Зададим некоторую величину T_p интервала времени переходного режима, который должен быть больше шага интегрирования, но в то же время должен быть относительно мал.

Предполагаем, что значение v_{10} управления v_1 в начальной точке \mathbf{x}_0 мало: $|v_{10}| < \delta$. Согласно предположению, значение v_{10} не удовлетворяет условию согласования по энергии для пары точек \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_* , но этому условию удовлетворяет значение $-v_{10}$. Реализуем движение летательного аппарата за период времени T_π с программным управлением

$$v_1 = v_{10} - 2 \frac{v_{10}}{T_\pi} t, \quad v_2 = v_{20}, \quad v_3 = v_{30}, \quad t \in [0, T_\pi].$$

По окончании движения продольная перегрузка v_1 примет значение $-v_{10}$, а летательный аппарат переместится в точку \mathbf{x}_s , достаточно близкую к точке \mathbf{x}_0 . С учетом близости точек \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_s можем считать, что величины $E_* - E_0$ и $E_* - E_s$, где E_s — значение энергии в точке \mathbf{x}_s , имеют одинаковый знак. Если второе неравенство (5) выполнено, то пара точек $\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_*$ удовлетворяет условиям согласования, и для этой пары можно строить траекторию с монотонным изменением энергии.

Описанный маневр назовем *начальным переходным маневром*.

3. Конечный переходный маневр

Допустим, что условия согласования нарушены в конечной точке \mathbf{x}_* планируемой траектории. Если значение $n_{x*} = v_{1*}$ в точке \mathbf{x}_* мало, то можно использовать *конечный переходный маневр*, заключающийся в том, что траектория из начальной точки \mathbf{x}_0 прокладывается не в конечную точку \mathbf{x}_* , а в близкую к ней точку \mathbf{x}_f , а затем реализуется специальный режим полета из точки \mathbf{x}_f в точку \mathbf{x}_* .

В точке \mathbf{x}_* фазового пространства системы известны положение $\mathbf{r}_* = (H_*, L_*, Z_*)^T$ летательного аппарата в пространстве, скорость его движения $\mathbf{V}_* = (\dot{H}_*, \dot{L}_*, \dot{Z}_*)^T$, характеризуемая модулем V_* и углами ориентации ϑ_* и ψ_* , а также значения управлений v_{1*}, v_{2*}, v_{3*} , которые определяют значения вторых производных $\ddot{H}_*, \ddot{L}_*, \ddot{Z}_*$. Установив время специального режима T_π , рассчитаем такое движение летательного аппарата на интервале времени $[-T_\pi, 0]$, для которого точка \mathbf{x}_* является конечной, причем в начальной точке \mathbf{x}_f этого движения управление v_1 имеет заданное значение v_{1f} . Для упрощения расчетов будем считать, что начальные значения v_{2f} и v_{3f} управлений v_2 и v_3 также известны, причем $v_{2f} = v_{2*}$ и $v_{3f} = v_{3*}$.

Траекторию движения летательного аппарата можно задать в виде многочлена третьей степени:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_* + \dot{\mathbf{r}}_* t + \frac{\ddot{\mathbf{r}}_*}{2} t^2 + \frac{\mathbf{k}}{6} t^3, \quad t \in [-T_\pi, 0], \quad (6)$$

где $\dot{\mathbf{r}}_*$, $\ddot{\mathbf{r}}_*$ — первая и вторая производные вектор-функции $\mathbf{r}(t) = (H(t), L(t), Z(t))^T$ в конечной точке $t = 0$, а \mathbf{k} — вектор неизвестных коэффициентов, которые следует определить исходя из условия, что при $t = -T_\pi$ вектор перегрузок $\mathbf{v}_f = (v_{1f}, v_{2f}, v_{3f})^T$ известен.

Вычисляем матрицы A и B представления (3) в конечной точке:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_* = \begin{pmatrix} \sin \vartheta_* & \cos \vartheta_* & 0 \\ \cos \vartheta_* \cos \psi_* & -\sin \vartheta_* \cos \psi_* & \sin \psi_* \\ -\cos \vartheta_* \sin \psi_* & \sin \vartheta_* \sin \psi_* & \cos \psi_* \end{pmatrix}.$$

С помощью них находим:

$$\dot{\mathbf{r}}_* = V_* \begin{pmatrix} B_{11*} \\ B_{21*} \\ B_{31*} \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_* = g(A + B_* \mathbf{v}_*).$$

Из уравнения (6) вытекает, что $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}_* + \mathbf{k}t$. Следовательно, в начальной точке x_f имеем $\ddot{\mathbf{r}}_f = \ddot{\mathbf{r}}(-T_\pi) = \ddot{\mathbf{r}}_* - \mathbf{k}T_\pi$. Через значения управлений \mathbf{v}_f ускорение $\ddot{\mathbf{r}}_f$ выражается с помощью системы дифференциальных уравнений (3):

$$\ddot{\mathbf{r}}_f = g(A + B_f \mathbf{v}_f),$$

где матрица B_f — это матрица B , вычисленная в точке x_f . Матрица B_f есть функция параметров V_f, ϑ_f, ψ_f , которые в свою очередь выражаются через координаты вектора $\dot{\mathbf{r}}_f$ и являются функциями векторного параметра \mathbf{k} , т.е. $B_f = B_f(\mathbf{k})$. В результате мы получаем уравнение, которому должен удовлетворять векторный параметр \mathbf{k} :

$$g(A + B_f(\mathbf{k}) \mathbf{v}_f) = \ddot{\mathbf{r}}_* - \mathbf{k}T_\pi,$$

или

$$\mathbf{k} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}_* - g(A + B_f(\mathbf{k}) \mathbf{v}_f)}{T_\pi}. \quad (7)$$

Уравнение (7) нелинейное и может быть решено лишь численно. Оно представлено в виде, удобном для применения метода простой итерации, т.е. построения последовательности

$$\mathbf{k}_{j+1} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}_* - g(A + B_f(\mathbf{k}_j) \mathbf{v}_f)}{T_\pi}.$$

В качестве начального значения естественно выбрать $\mathbf{k} = 0$, что является решением уравнения, например, при горизонтальном полете с постоянной скоростью. Первое приближение

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\ddot{\mathbf{r}}_* - g(A + B_f(0) \mathbf{v}_f)}{T_\pi}$$

можно использовать в предположении, что скорость движения в течение рассматриваемого режима полета мало меняется по направлению, т.е. поперечная перегрузка близка к 1. Расчеты показывают, что первое приближение можно использовать, если поперечная перегрузка n_{y*} в конечной точке траектории находится в пределах $0,8 \leq n_{y*} \leq 1,3$.

В ситуации более агрессивного маневра можно использовать несколько первых итераций, т.е. положить $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_j$, где $j = 3, 4$. В этом случае диапазон возможных значений нормальной перегрузки расширяется до $0,6 \leq n_{y*} \leq 1,6$.

Рассмотрим два примера моделирования движения с применением конечного переходного маневра. Пусть в конечной точке траектории заданы следующие значения фазовых переменных и управлений:

$$V_* = 130 \frac{\text{км}}{\text{ч}}; \quad \vartheta_* = 5^\circ; \quad \psi_* = 0; \quad H_* = 1200 \text{ м}; \quad L_* = 500 \text{ м}; \quad Z_* = 0;$$

$$n_{x*} = 0,1; \quad n_{y*} = 1,3; \quad \gamma_* = 10^\circ.$$

Полагаем $T_\pi = 2$ с. Кроме того, считаем, что в начальной точке переходного маневра продольная перегрузка отличается от значения в конечной точке лишь знаком. Тогда

$$n_{xf} = -n_{x*} = -0,1; \quad n_{yf} = n_{y*} = 1,3; \quad \gamma_f = \gamma_* = 10^\circ.$$

Из этих значений находим начальные и конечные значения виртуальных управлений:

$$v_{1f} = -v_{1*} = -0,1; \quad v_{2f} = v_{2*} = 1,280; \quad v_{3f} = v_{3*} = 0,226.$$

В этих условиях получаем вектор коэффициентов (в $\text{м}/\text{с}^3$):

$$\mathbf{k} = (1,245 \cdot 10^{-4}, -1,235 \cdot 10^{-1}, 3,57 \cdot 10^{-4})^T.$$

С помощью этого вектора рассчитываем точку начала переходного маневра:

$$V_f = 130,7 \text{ км/ч}, \quad \vartheta_f = -3,82^\circ, \quad \psi_f = 7,02^\circ,$$

$$H_f = 1199 \text{ м}, \quad L_f = 428,0 \text{ м}, \quad Z_f = 4,43 \text{ м}.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1. Интегрирование осуществлялось методом Эйлера с шагом 0,1 с. Изменение фазовых переменных показано на рис. 1, а изменение управлений — на рис. 2.

Таблица 1

$T, \text{ с}$	$V, \text{ км/ч}$	$\vartheta, \text{ град}$	$\psi, \text{ град}$	$H, \text{ м}$	$L, \text{ м}$	$Z, \text{ м}$	n_x	n_y	$\gamma, \text{ град}$
0,0	130,7	-3,8	7,0	1199,3	428,0	4,4	-0,1	1,3	10,0
0,1	130,6	-3,4	6,7	1199,0	431,6	4,0	-0,1	1,3	10,0
0,2	130,5	-2,9	6,3	1198,8	435,2	3,6	-0,1	1,3	10,0
0,3	130,4	-2,5	6,0	1198,7	438,8	3,2	-0,1	1,3	10,0
0,4	130,3	-2,1	5,6	1198,5	442,4	2,8	-0,1	1,3	10,0
0,5	130,2	-1,6	5,3	1198,4	446,0	2,5	-0,1	1,3	10,0
0,6	130,2	-1,2	4,9	1198,3	449,6	2,2	0,0	1,3	10,0
...
1,4	129,9	2,3	2,1	1198,6	478,4	0,4	0,0	1,3	10,0
1,5	129,9	2,8	1,8	1198,8	482,0	0,3	0,0	1,3	10,0
1,6	129,9	3,2	1,4	1199,0	485,6	0,2	0,1	1,3	10,0
1,7	129,9	3,7	1,1	1199,2	489,2	0,1	0,1	1,3	10,0
1,8	129,9	4,1	0,7	1199,4	492,8	0,0	0,1	1,3	10,0
1,9	130,0	4,6	0,4	1199,7	496,4	0,0	0,1	1,3	10,0
2,0	130,0	5,0	0,0	1200,0	500,0	0,0	0,1	1,3	10,0

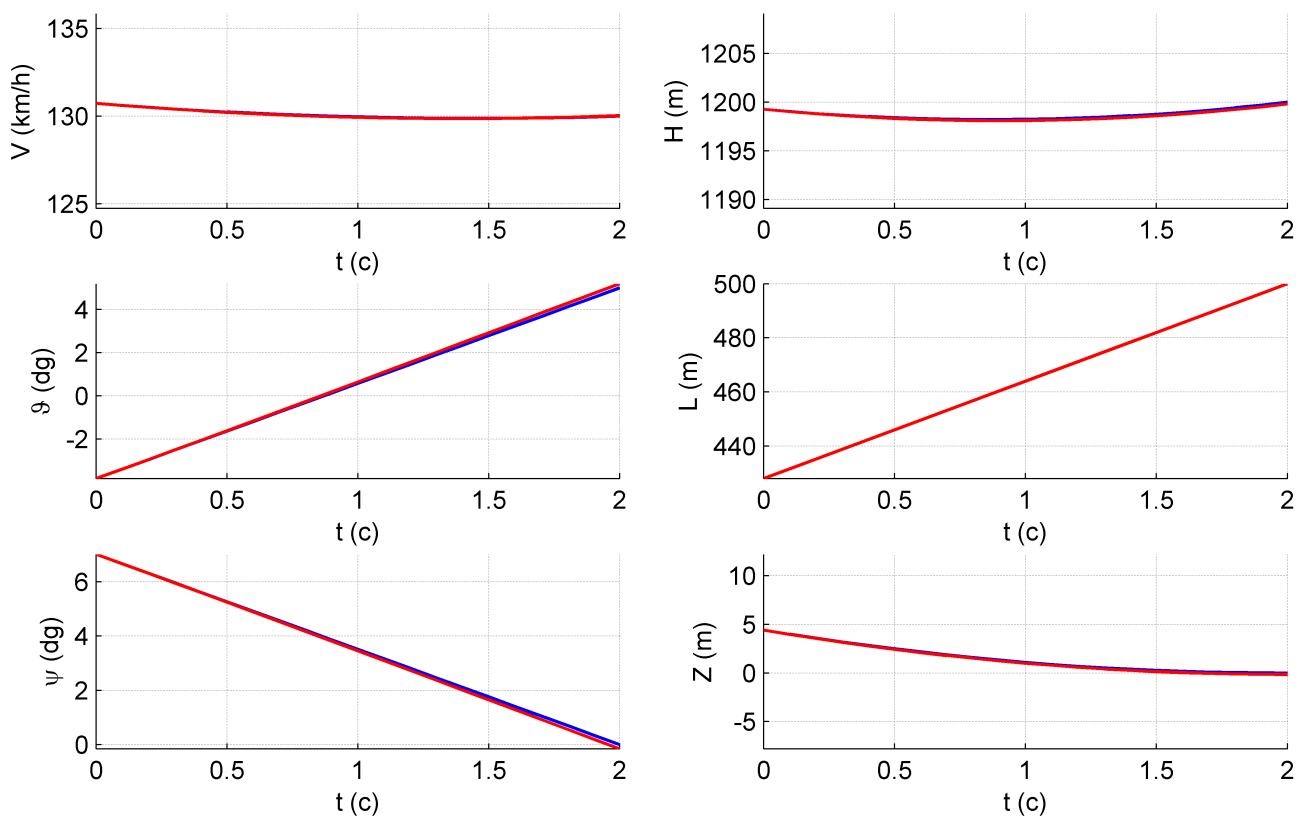


Рис. 1

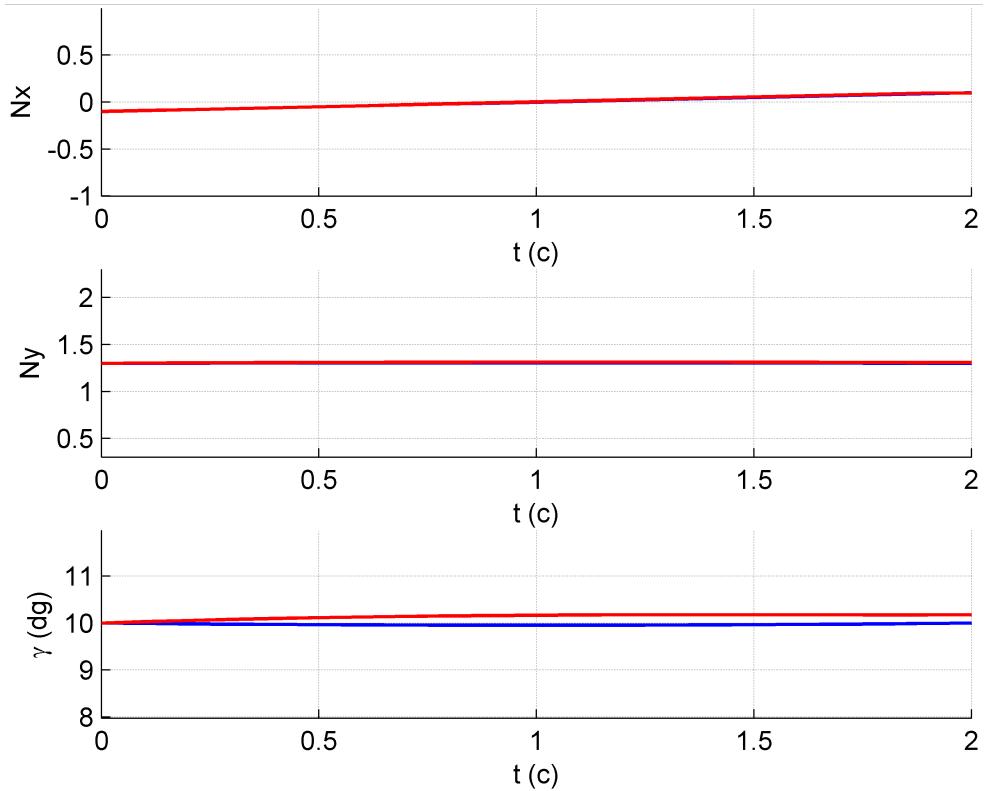


Рис. 2

Второй пример — двухточечная задача построения траектории движения летательного аппарата при следующих исходных данных:

	V , км/ч	ϑ , град	ψ , град	H , м	L , м	Z , м	n_x	n_y	γ , град
Начало	150	0	0	90	0	0	-0,2	1,0	0
Конец	50	0	-80	120	800	150	0,1	1,0	5,0

Значение параметра E в начальной точке $E_0 = 178,6$ м, в конечной точке $E_* = 129,8$ м. Следовательно, в данном случае энергия вдоль траектории убывает. В то же время начальное значение продольной перегрузки отрицательно, а конечное — положительно. Это означает, что условия согласования выполнены в начальной точке траектории и не выполнены в конечной. Траекторию планируем с применением конечного переходного маневра длительностью $T_{\text{п}} = 3$ с. Расчетная точка начала такого маневра имеет координаты

$$V_f = 39,9 \text{ км/ч}, \quad \vartheta_f = 0,51^\circ, \quad \psi_f = -68,2^\circ, \quad H_f = 119,8 \text{ м}, \quad L_f = 790 \text{ м}, \quad Z_f = 114,0 \text{ м},$$

значения управлений в этой точке

$$n_{xf} = -0,1, \quad n_{yf} = 1,0, \quad \gamma_f = 5^\circ,$$

значение энергии в точке x_f равно 125,9 м.

Траекторию от точки x_0 до точки x_f можно построить с монотонным изменением энергии. Результаты расчетов траектории с учетом конечного переходного маневра приведены в табл. 2. Интегрирование осуществлялось методом Эйлера с шагом 0,1 с. Полужирным шрифтом в таблице выделен момент начала переходного маневра.

На рис. 3 показано изменение фазовых переменных, а на рис. 4 — изменение управлений.

Таблица 2

T , с	V , км/ч	ϑ , град	ψ , град	H , м	L , м	Z , м	n_x	n_y	γ , град
0,0	150,0	0,0	0,0	90,0	0,0	0,0	-0,2	1,0	0,0
0,1	149,3	0,0	0,1	90,0	4,2	0,0	-0,2	1,1	-7,3
0,2	148,6	0,2	0,3	90,0	8,3	0,0	-0,2	1,1	-11,2
0,3	147,9	0,3	0,7	90,0	12,4	-0,1	-0,2	1,1	-12,4
.....
30,9	40,9	0,5	-68,1	119,8	789,0	111,4	-0,1	1,0	0,7
31,0	40,5	0,5	-68,2	119,8	789,4	112,5	-0,1	1,0	0,4
31,1	40,1	0,5	-68,2	119,8	789,9	113,5	-0,1	1,0	0,1
31,2	39,6	0,5	-68,4	119,8	790,6	113,8	-0,1	1,0	-0,3
31,3	39,3	0,5	-68,4	119,8	791,0	114,8	0,0	1,0	1,9
31,4	39,2	0,5	-68,7	119,8	791,4	115,8	0,0	1,0	3,7
.....
33,9	49,3	0,1	-79,2	120,0	799,3	145,9	0,0	1,0	2,9
34,0	49,5	0,0	-79,4	120,0	799,5	147,3	0,1	1,0	3,4
34,1	49,7	0,0	-79,7	120,0	799,8	148,6	0,1	1,0	4,1
34,2	50,0	0,0	-80,0	120,0	800,0	150,0	0,1	1,0	5,0

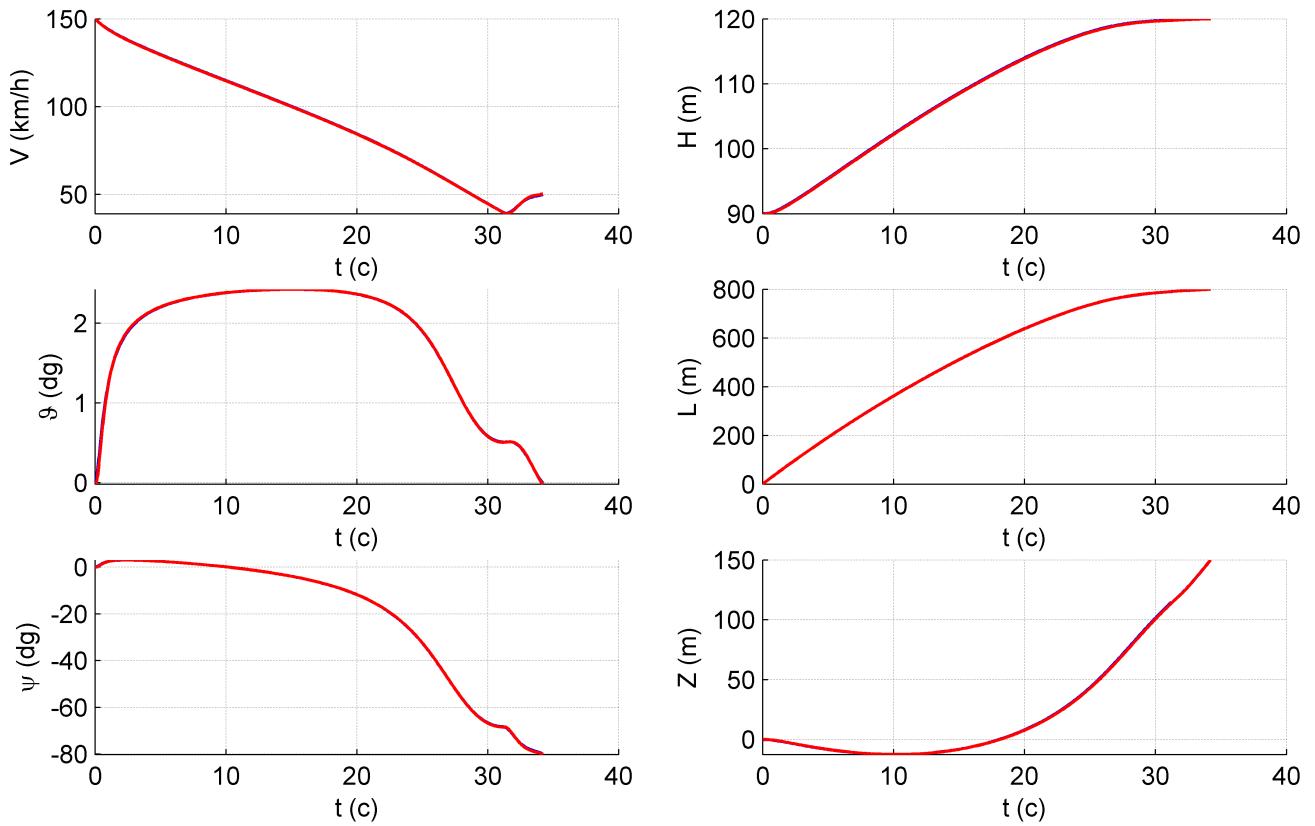


Рис. 3

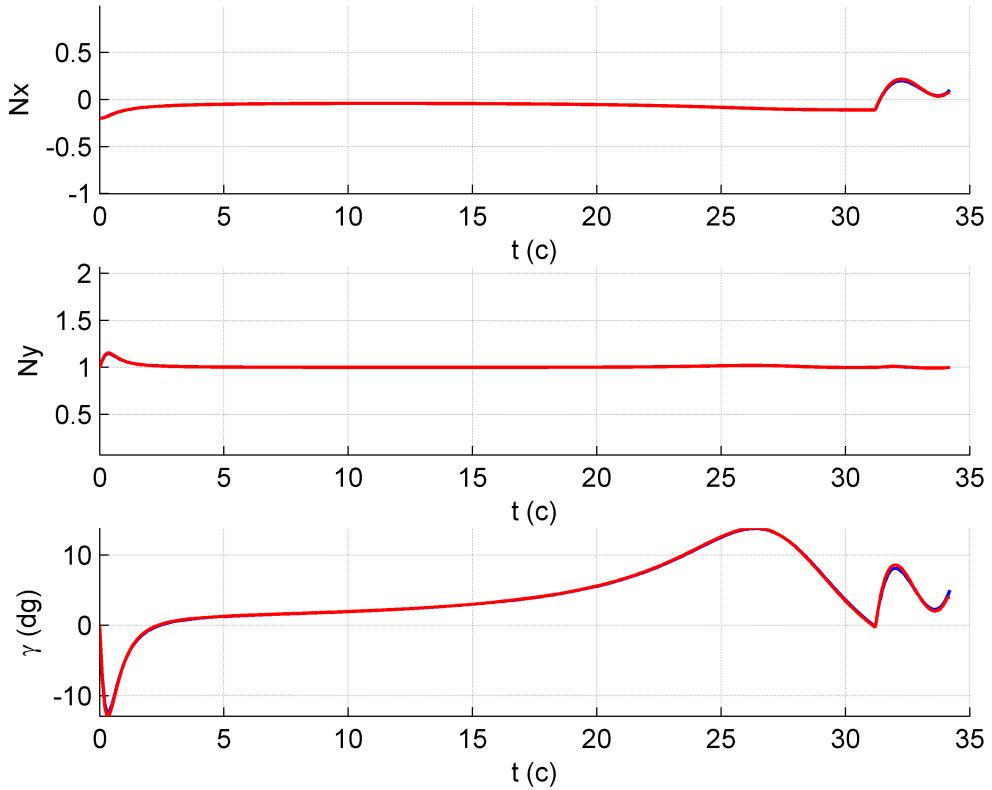


Рис. 4

4. Использование промежуточных точек

Если в начальной или конечной точке условие согласования нарушено, но значение продольной перегрузки недостаточно мало, то возможный вариант планирования траектории — вставка промежуточных точек.

Предположим для определенности, что $E_0 < E_*$, т.е. энергия вдоль траектории возрастает. Если $v_{10} < 0$, то можно выбрать точку, в которой значение энергии меньше E_0 . Установив в этой точке продольную перегрузку чуть меньше нуля, мы получим фрагмент траектории, на котором условия согласования выполнены. Достигнув выбранной точки, мы можем выполнить начальный переходный маневр для смены знака продольной перегрузки. Если при этом условия согласования в конечной точке изначально были выполнены, то они будут выполнены и на оставшейся части траектории.

Таким образом, в описанной ситуации мы получаем траекторию из трех участков: двух участков с монотонным изменением энергии и одного короткого участка, на котором выполняется переходный маневр (стыковочный участок).

Если условие согласования выполнено в начальной точке, но нарушено в конечной, мы можем вставить промежуточную точку, в которой значение энергии больше значения E_* . Далее можем поступить как в предыдущем случае: в выбранной точке устанавливаем значение продольной перегрузки чуть больше нуля. Планируем движение до выбранной точки с монотонным изменением энергии, затем выполняем начальный переходный маневр для смены знака перегрузки и, наконец, выполняем второй маневр с монотонным изменением энергии.

Если условия согласования нарушены и в начальной, и в конечной точках, то необходимо вставить две промежуточные точки, выделив три участка с монотонным изменением энергии, стыкуя их с помощью переходных маневров.

Конкретизируем описанный подход. Пусть \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_* — начальная и конечная точки планируемой траектории. Если $v_{10} < 0$, то выбираем точку \mathbf{r}_a согласно формуле

$$\mathbf{r}_a = \frac{2}{3}\mathbf{r}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{r}_*,$$

т.е. выбираемая точка делит отрезок, соединяющий концы траектории, в отношении 2 : 1. Если $v_{1*} < 0$, то выбираем точку \mathbf{r}_b по формуле

$$\mathbf{r}_b = \frac{1}{3}\mathbf{r}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{r}_*,$$

Для выбранных точек рассчитываем значение скорости по формулам

$$V_a^2 = \frac{2}{3}V_0^2 + \frac{1}{3}V_*^2, \quad V_b^2 = \frac{1}{3}V_0^2 + \frac{2}{3}V_*^2.$$

Затем рассчитываем вертикальное смещение выбранных точек исходя из заданной величины изменения энергии. Так, для точки r_a (при $E_0 < E_*$) вычисляем новое значение высоты согласно формуле:

$$H_a = E_0 - \Delta E - \frac{V_a^2}{2g}.$$

Аналогично в точке r_b :

$$H_b = E_0 + \Delta E - \frac{V_b^2}{2g}.$$

Дополнительно, устанавливая в выбранных точках значения углов, учтем ориентацию летательного аппарата в начальной и конечной точках. Пусть ψ_r — угол курса, вычисленный для вектора $r_* - r_0$. Вычисляем две величины: $\varphi_0 = \psi_0 - \psi_r$ и $\varphi_* = \psi_* - \psi_r$. Если φ_0 и φ_* одного знака, то будем говорить о траектории типа S (рис. 5). Если же эти величины разного знака, то будем говорить о траектории типа U (рис. 6).

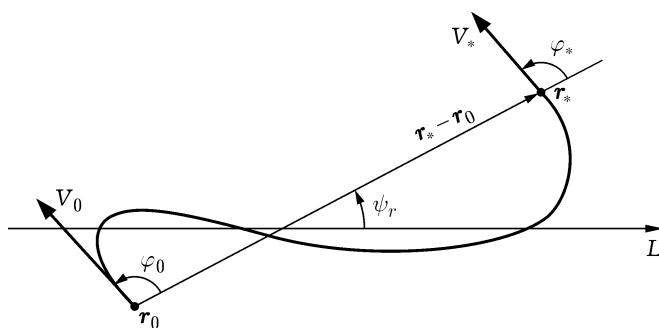


Рис. 5

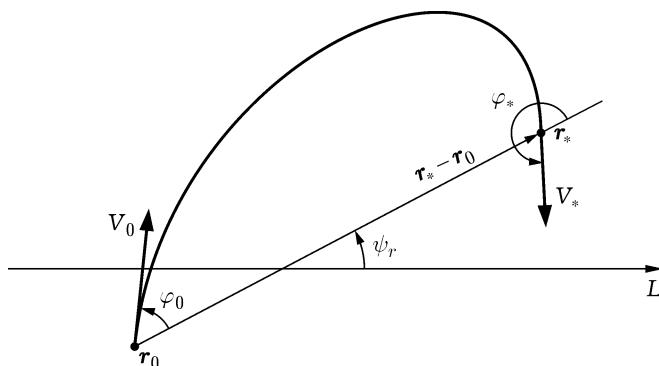


Рис. 6

Независимо от типа траектории значение ϑ_a и ϑ_b устанавливаем близким к нулю. Если траектория относится к типу S , то значение φ_a устанавливаем равным $\psi_r \mp 90^\circ$, выбирая знак, противоположный знакам величин φ_0 и φ_* . Если траектория относится к типу U , то выбираем $\varphi_a = \psi_r$, но дополнительно выполняем горизонтальное смещение точки в направлении, определяемом углом курса $\psi_r \mp 90^\circ$, где знак совпадает со знаком φ_0 . Величина смещения τ является регулируемым параметром.

Если присутствует точка r_b , но отсутствует r_a , то параметры в точке r_b выбираем по тому же алгоритму, который указан для точки r_a . Если присутствуют обе точки r_a и r_b , то в одной из этих точек параметры выбираем по алгоритму для одной точки и соответствующего типа траектории, а во второй точке — по алгоритму для одной точки и типа траектории U .

Рассмотрим пример. Начальные и конечные значения переменных состояния и управлений зададим следующим образом:

	V , км/ч	ϑ град	ψ , град	H , м	L , м	Z , м	n_x	n_y	γ , град
Начало	40	-10	160	200	0	0	-0,2	0,9	0
Конец	80	10	-140	320	1200	0	0,6	0,6	0

Согласно представленным данным $E_0 = 206,3$ м, $E_* = 345,2$ м, так что вдоль планируемой траектории энергия возрастает. Условие согласования нарушено в начальной точке. В соответствии с заданными граничными условиями траекторию следует отнести к типу U . Установив значения $\Delta E = 30$, $\tau = 200$, рассчитываем положение точки r_a и ориентацию летательного аппарата в ней. Расчеты дают

$$V_a = 56,6 \text{ км/ч}, \quad \vartheta_a = 6,32^\circ, \quad \psi_a = 0^\circ, \quad H_a = 163,7 \text{ м}, \quad L_a = 400 \text{ м}, \quad Z_a = -200 \text{ м},$$

$$n_{xa} = -0,1, \quad n_{ya} = 0,99 \quad \gamma_a = 0^\circ.$$

В результате можно построить траекторию от начальной точки x_0 до промежуточной x_a с монотонным изменением энергии. Далее выполняется начальный переходный маневр, в результате которого летательный аппарат переместится в точку \tilde{x}_a , близкую к x_a , из которой можно проложить траекторию в точку x_* с монотонным изменением энергии.

На рис. 7 показан вид полученной траектории, на рис. 8 представлены изменения переменных состояния летательного аппарата, а на рис. 9 — изменения управлений.

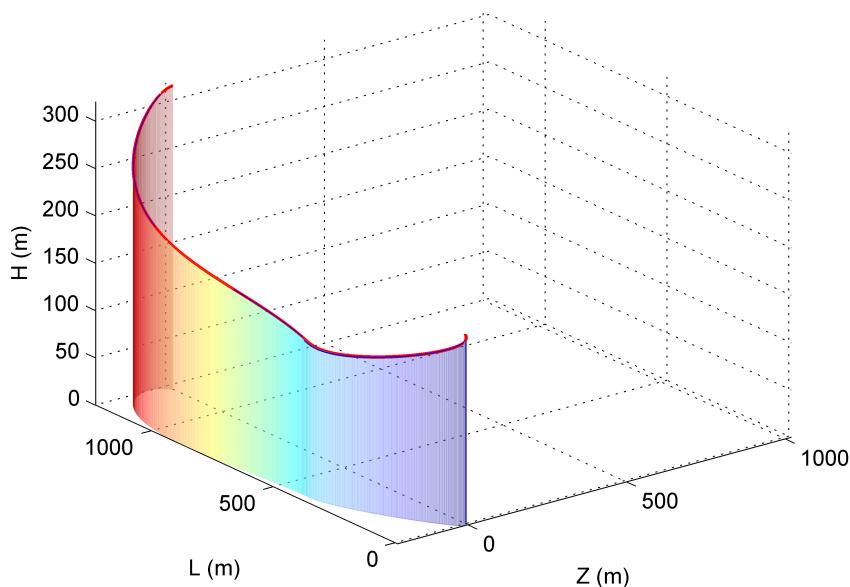


Рис. 7

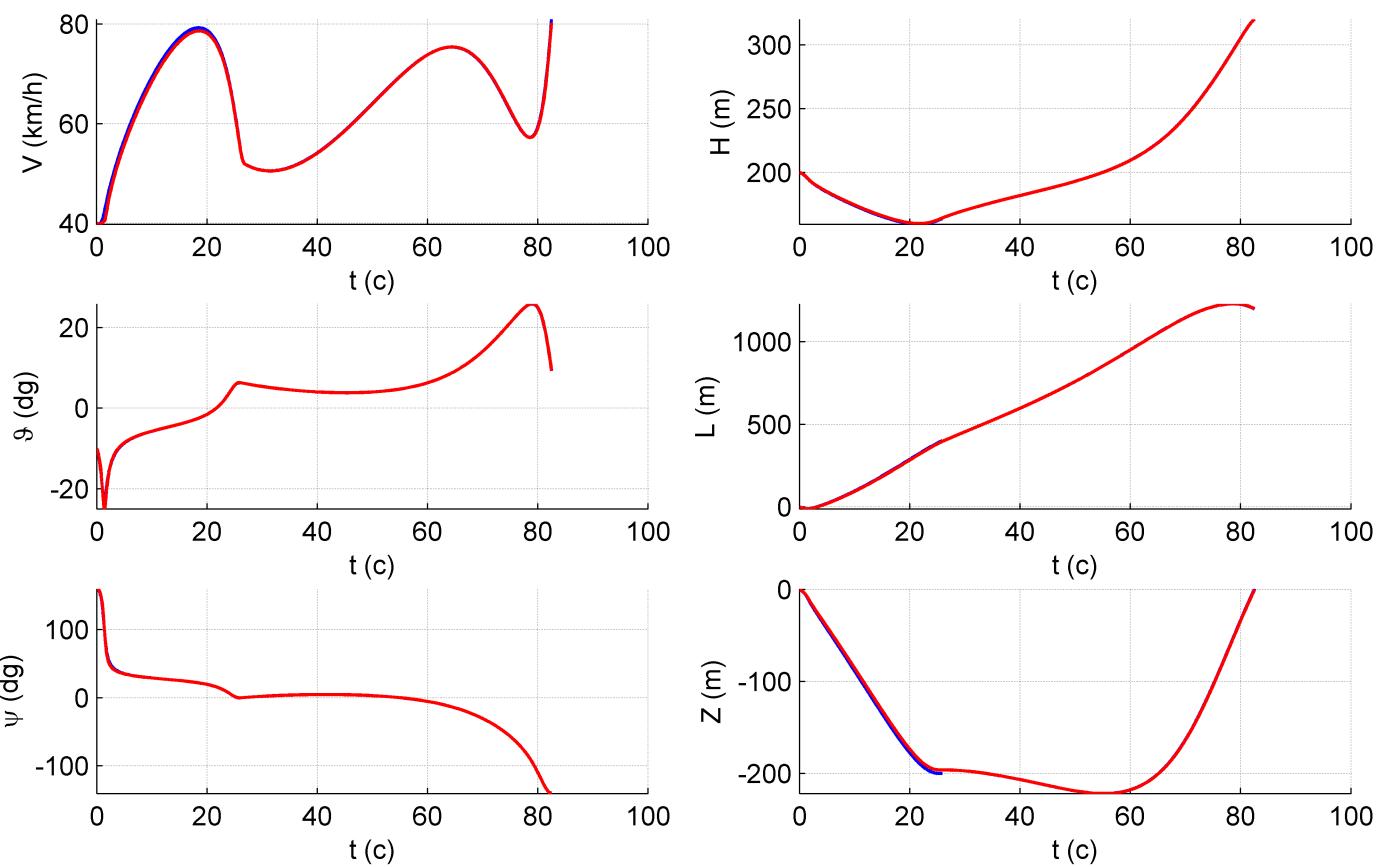


Рис. 8

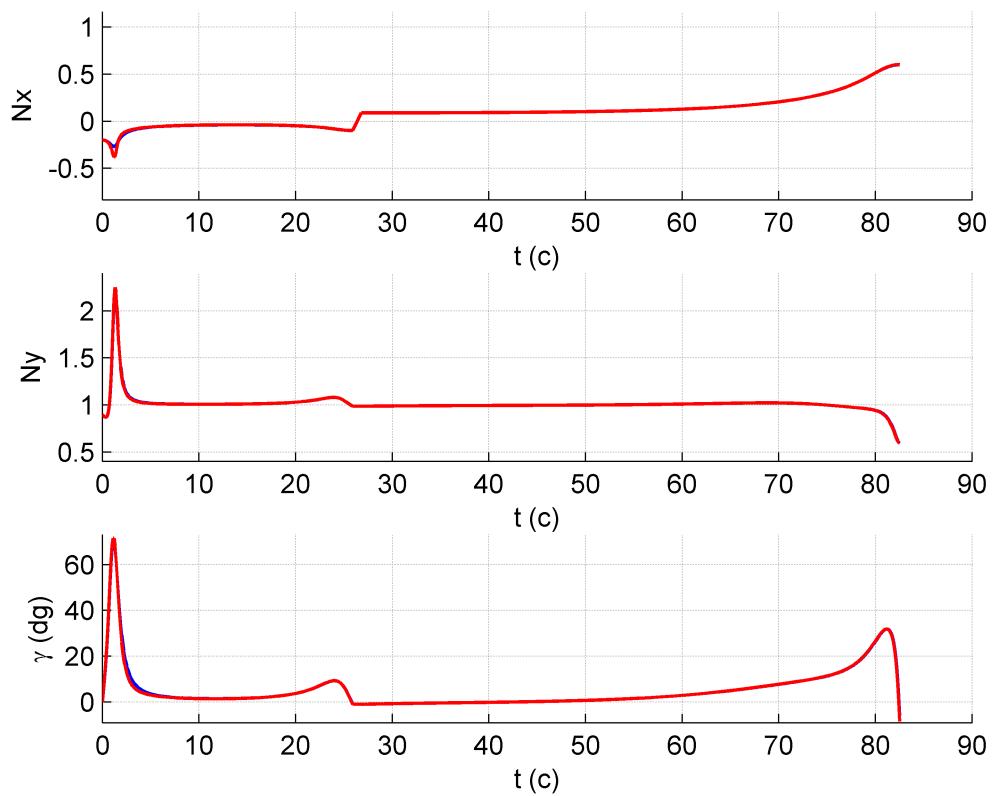


Рис. 9

5. Заключение

В терминальной задаче управления летательным аппаратом с использованием шестимерной модели предложены варианты расширения энергетического метода планирования траекторий, позволяющие строить траектории движения с немонотонным изменением энергии.

Если в начальной или конечной точке нарушены условия согласования, но значение продольной перегрузки мало, то преодолеть нарушение условий согласования можно, выполнив специальный кратковременный маневр, названный переходным.

Если начальное и конечное значения продольной перегрузки велики, то траекторию движения можно построить в виде двух или трех участков с монотонным изменением энергии, связанных переходными маневрами.

Эффективность предложенных методов планирования траекторий подтверждена численными примерами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 12-07-00267 и 12-07-00329) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-3659.2012.1).

Список литературы

1. Тараненко В.Т. Динамика самолета с вертикальным взлетом и посадкой. М.: Машиностроение, 1978. 278 с.
2. Батенко А.П. Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.
3. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 328 с.
4. Thomson D.G., Bradley R. Recent developments in the calculations of inverse solutions of the helicopter equations of motion // Proc. of the UK simulation council triennial conference, September 1987.
5. Канатников А.Н., Шмагина Е.А. Задача терминального управления движением летательного аппарата // Нелинейная динамика и управление: Сборник статей. Вып. 7 / Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. С. 79–94.
6. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 51–64.
7. Krishchenko A.P., Kanatnikov A.N., Tkachev S.B. Planning and control of spatial motion of flying vehicles // IFAC Workshop Aerospace guidance, navigation and flight control systems AGNFCS'09 (Samara, Russia, 30 June – 2 July 2009).

Design of the flying vehicles trajectories with nonmonotonic change of energy

04, April 2013

DOI: [10.7463/0413.0554666](https://doi.org/10.7463/0413.0554666)

Kanatnikov A. N.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
skipper@bmstu.ru

A six-dimensional model, where the aircraft is treated as a material point, is used for planning trajectories of aircraft. In this case, the state variables are the coordinates of the aircraft in the trajectory coordinate system, and controls are longitudinal and transversal overloads and the roll angle of the transversal overload vector. In the context of this model, the author considers a terminal control problem in which it's required to find such controls at which the aircraft is transferred from a specified initial point of the phase space to a specified destination point. Methods of solving this terminal control problem are well known if the flight time is given. Selection of flight time, if it is not known, is not an easy task, as this choice influences the shape of the flight trajectory. One of the methods to solve the terminal control problem with unknown time is the energy method based on replacement of the independent variable (time) by the normalized mechanical energy of the system. The energy method leads to flight trajectories with a monotonic variation of energy. It provides good solutions for landing and take-off of aircraft, but may not be applicable for complex maneuvers. The author considers methods of planning trajectories with non-monotonic variation of energy, which, nevertheless, are based on the energy method. These methods are based on special short-term maneuvers at the beginning and end of the trajectory (so-called transient maneuvers), and on selection of certain intermediate points through which the trajectory must pass.

References

1. Taranenko W.T. *Dinamika samoleta s vertikal'nym vzletom i posadkoj* [Aircraft dynamics with vertical take-off and landing]. Moscow, Mashinostroenie, 1978. 278 p.
2. Batenko A.P. *Sistemy terminal'nogo upravleniya* [Terminal Control Systems]. Moscow, Radio i svyaz', 1984. 160 p.

3. Kpurko P.D. *Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem. Nelinejnye modeli* [Inverse Problems of Dynamics of Controlled Systems. Nonlinear Models]. Moscow, Nauka, 1987. 328 p.
4. Thomson D.G., Bradley R. Recent developments in the calculations of inverse solutions of the helicopter equations of motion // *Proc. of the UK simulation council triental conference*, September 1987.
5. Kanatnikov A.N., Shmagina E.A. Zadacha terminal'nogo upravlenija dvizheniem letatel'nogo apparata [Terminal control problem of flying vehicle motion]. *Nelineinaia dinamika i upravlenie: sbornik statei. Vyp. 7* [Nonlinear dynamics and control: collected articles. Iss. 7]. Moscow, Phismatlit, 2010, pp. 79–94.
6. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Terminal'noe upravlenie prostranstvennym dvizheniem letatel'nyh apparatov [Terminal control of spatial motion of flying vehicles]. *Izvestia RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2008, no. 5, pp. 51–64. (Trans. version: *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 5, pp. 718–731).
7. Krishchenko A.P., Kanatnikov A.N., Tkachev S.B. Planning and control of spatial motion of flying vehicles. *IFAC Workshop Aerospace guidance, navigation and flight control systems AGNFCS'09*, Samara, Russia, June 30 – July 2, 2009.