

УДК 519.624.1

## Способы учета граничных условий I рода при решении задач методом конечных элементов

*Корчагова В.Н., студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана  
кафедра «Прикладная математика»*

*Научный руководитель: Марчевский И. К., к.ф.-м.н.,  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана  
[fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru)*

### Введение

На примере решения методом конечных элементов одномерной нестационарной задачи теплопроводности рассмотрим различные способы учета граничных условий I рода. При некоторых подходах матрица возникающей СЛАУ теряет симметрию, что непринципиально при решении одномерной задачи, однако может быть существенно в многомерном случае, когда решение системы находится итерационным методом. Возможен также точный и приближенный учет граничных условий I рода; при этом число обусловленности матрицы СЛАУ может сильно возрасти. Указанные особенности могут приводить к усложнению процедуры решения СЛАУ и снижению точности решения исходной задачи.

### 1. Постановка задачи

Необходимо найти распределение температуры вдоль тонкого однородного стержня длиной  $l$ , если на одном его конце (при  $x = 0$ ) поддерживается постоянная температура  $u_0$ , а на другом конце (при  $x = l$ ) поддерживается заданный тепловой поток либо происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой постоянна и равна  $u_\infty$ . Стержень считается теплоизолированным по всей длине. Начальное распределение температуры вдоль стержня  $u(x, 0)$  считается известным.

Распределение температуры вдоль стержня описывается одномерным нестационарным уравнением теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала стержня.

Для однородного стержня, зависимостью характеристик которого от температуры можно пренебречь, уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где  $a^2 = \lambda/c\rho$  – коэффициент температуропроводности, характеризующий скорость выравнивания температуры в стержне.

Граничное условие I рода на левом конце стержня имеет вид

$$u(0, t) = u_0, \quad (3)$$

граничные условия II либо III рода на правом конце записываются соответственно в виде

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = g(t) \quad (4)$$

или

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha(u(l, t) - u_\infty), \quad (5)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи; в общем случае он может зависеть от разности температур  $u - u_\infty$ , однако в данной задаче будем считать его константой.

## 2. Аналитическое решение стационарной задачи

При  $t \rightarrow \infty$  стационарное распределение температуры описывается решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0.$$

Его решением является линейная функция

$$u = Cx + b,$$

при этом из условия (3) находим, что  $b = u_0$ .

Константу  $C$  можно определить из граничного условия при  $x = l$ . В результате при выполнении условия (4) получим

$$u = -\frac{g(t)}{\lambda} x + u_0,$$

а для условия (5)

$$u = \frac{\alpha(u_\infty - u_0)}{\alpha l + \lambda} x + u_0.$$

### 3. Численное решение нестационарной задачи

#### 3.1. Суть метода конечных элементов

Зачастую уравнения, полученные в ходе решения задачи, очень трудно или даже невозможно разрешить аналитически. В таком случае применяют различные численные методы для получения приближенных решений. Для решения широкого класса задач математической физики используют метод конечных элементов (МКЭ). Его преимущество состоит в том, что при помощи данного метода можно решать задачи в областях произвольной формы и получать решения, достаточно близкие к точным. Существуют пакеты прикладных программ, основанные на МКЭ (к примеру, ANSYS или NASTRAN).

Рассмотрим реализацию МКЭ для решения одномерной задачи (2)–(5).

Стержень длины  $l$  разбивается на  $n$  непересекающихся отрезков равной длины  $l_e$  – конечных элементов. Функция, аппроксимирующая решение на каждом шаге расчета (при  $t = t^k$ ), представляется линейной комбинацией функций формы  $N_j(x)$ :

$$u^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^n N_j(x) u_j^{(k)} = [N_0(x) \dots N_n(x)] \begin{Bmatrix} u_0^{(k)} \\ \vdots \\ u_n^{(k)} \end{Bmatrix} = [N] \{u^{(k)}\}. \quad (6)$$

Здесь  $u_j$  – значения температуры в узлах,  $n$  – количество конечных элементов.

Далее с помощью метода Галеркина составляется СЛАУ, в которой учитываются вклады от каждого из элементов. Из полученной системы определяются расчетные величины – значения решения в узлах сетки.

#### 3.2. Выбор функций формы

Функции формы  $N_i(x)$  – это базисные функции, которыми аппроксимируют точное решение[3]. В данной работе используются непрерывные кусочно-линейные функции, такие, что каждому узлу  $x_i$  ставится в соответствие следующая функция формы (рис. 1):

$$N_i(x) = \begin{cases} 0, & x_0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{l_e}, & x_{i-1} < x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{l_e}, & x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} < x \leq x_n, \end{cases} \quad i = 2 \dots n - 1. \quad (7)$$

Для граничных узлов  $x_0$  и  $x_n$  функции формы имеют вид

$$N_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{l_e}, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & x > x_1, \end{cases} \quad N_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{n-1}, \\ \frac{x - x_{n-1}}{l_e}, & x_{n-1} < x \leq x_n. \end{cases}$$

Свойства функций формы:

- функция формы  $N_i(x)$  равна единице в узле  $x_i$  и нулю в остальных узлах;
- функция формы  $N_i(x)$  отлична от нуля только для элементов, содержащих узел  $x_i$ ;
- $\forall x \in [0,1] \quad \sum_{i=0}^n N_i(x) = 1.$

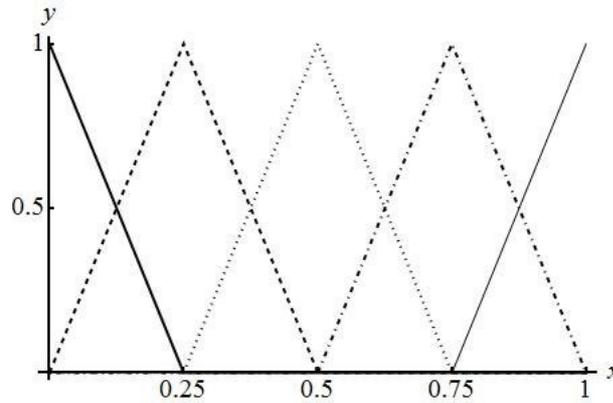


Рис. 1. Функции формы для четырёх конечных элементов

### 3.3. Формирование системы линейных уравнений

С помощью метода Галеркина СЛАУ, аппроксимирующая исходную задачу, формируется из условия ортогональности невязки  $R = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$  уравнения (2) весовым функциям  $W_i = N_i(x)$ , в качестве которых выступают функции формы [2]:

$$\int_0^l [N]^T R dx = 0.$$

Интеграл по длине стержня берется по частям:

$$\int_0^l [N]^T \left( a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = a^2 [N]^T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^l - a^2 \int_0^l \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx - \int_0^l [N]^T \frac{\partial u}{\partial t} dx \quad (8)$$

$$= 0.$$

Производная температуры по времени заменяется её разностным аналогом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{\tau},$$

где  $\tau$  – текущий шаг по времени,  $u^{(k+1)}$  и  $u^{(k)}$  – значения температуры в текущий и предыдущий моменты времени.

Преобразуем каждое слагаемое из левой части уравнения с учетом (6) и (7).

Первое слагаемое позволяет учесть граничные условия на концах стержня в текущий

момент времени:

$$a^2 [N]^T \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial x} \Big|_0^l = a^2 [N]^T \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial x} \Big|_{x=l} - a^2 [N]^T \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Пусть на правом конце стержня выполняется граничное условие III рода, описываемое уравнением (5). Тогда с учетом того, что на правом конце стержня  $N_n = 1$ , а все остальные функции формы равны нулю, получим

$$\begin{aligned} a^2 [N]^T \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial x} \Big|_{x=l} &= a^2 [N]^T [N] \left\{ \begin{array}{c} u_0^{(k+1)} \\ \dots \\ -\frac{\alpha}{\lambda} (u_n^{(k+1)} - u_\infty) \end{array} \right\} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{a^2 \alpha}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{(k+1)} \\ \vdots \\ u_n^{(k+1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \frac{a^2}{\lambda} u_\infty \end{pmatrix} = Q_{bc} \{u^{(k+1)}\} - f_{bc}. \end{aligned}$$

Аналогично учитываются граничные условия II рода (4), однако их влияние будет выражаться только в векторе правой части и не будет затрагивать матрицу системы.

Для учета граничных условий I рода (3) на левом конце стержня могут использоваться различные приемы, которые рассмотрены в следующем разделе.

Второе слагаемое уравнения (8) описывает вклад каждого конечного элемента в матрицу СЛАУ. Интеграл по всей длине стержня разбивается на сумму интегралов по каждому конечному элементу, где  $x_l^e$  и  $x_r^e$  – его начало и конец,  $x_r^e - x_l^e = l_e$ . Под знаком интеграла остаются выражения, содержащие только производные функций формы, поэтому их легко взять аналитически и получить симметрическую трехдиагональную матрицу:

$$\begin{aligned} a^2 \int_0^l \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx &= a^2 \sum_{e=1}^n \int_{x_l^e}^{x_r^e} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{u^{(k+1)}\} dx = \\ &= \frac{a^2}{l_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{(k+1)} \\ \vdots \\ u_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = Q_{elem} \{u^{(k+1)}\}. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуем третье слагаемое уравнения (8), позволяющее учесть нестационарность решения исходной задачи.

$$\begin{aligned}
\int_0^l [N]^T \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \frac{1}{\tau} \int_0^l [N]^T (u^{(k+1)} - u^{(k)}) dx = \\
&= \frac{1}{\tau} \sum_{e=1}^n \int_{x_l^e}^{x_r^e} [N]^T [N] \{u^{(k+1)}\} dx - \frac{1}{\tau} \sum_{e=1}^n \int_{x_l^e}^{x_r^e} [N]^T [N] \{u^{(k)}\} dx = \\
&= \frac{l_e}{6\tau} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \left( \begin{Bmatrix} u_0^{(k+1)} \\ \vdots \\ u_n^{(k+1)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u_0^{(k)} \\ \vdots \\ u_n^{(k)} \end{Bmatrix} \right) = \\
&= T \{u^{(k+1)}\} - \frac{l_e}{6\tau} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^{(k)} \\ \vdots \\ u_n^{(k)} \end{Bmatrix} = T \{u^{(k+1)}\} - f_t
\end{aligned}$$

Проводим «сборку» и в результате получим СЛАУ с трехдиагональной симметричной матрицей вида

$$(T + Q) \{u^{(k+1)}\} = f, \quad Q = Q_{bc} + Q_{elem}, \quad f = f_{bc} + f_t. \quad (9)$$

Заметим, что при  $\tau \rightarrow \infty$  получится реализация МКЭ для стационарного уравнения температуры стержня.

### 3.4. Учет граничных условий I рода

Рассмотрим некоторые способы учета граничных условий I рода (3) на левом конце стержня. В описанных ниже вычислительных экспериментах были приняты следующие значения безразмерных коэффициентов

$$a = \alpha = \lambda = l = 1, \quad u_\infty = 10, \quad u(x, 0) = u_0 = 0.$$

#### 3.4.1. Прямое включение условий в систему

В системе граничное условие I рода (3) выполняется на левом конце стержня. Все элементы первой строки матрицы  $(T + Q)$  (кроме диагонального) полагаются равными нулю, диагональный элемент приравнивается к единице, а в соответствующий элемент вектора правой части записывается значение  $u_0$ .

Если требуется сохранить симметрию матрицы  $(T + Q)$ , то необходимо приравнять к нулю и все элементы первого столбца матрицы, при этом соответствующим образом

Молодежный научно-технический вестник ФС77-51038

изменив компоненты вектора правой части системы.

Полученная система решается с помощью метода прогонки. Система обладает свойством строгого диагонального преобладания, поэтому алгоритм прогонки будет устойчивым.

Расчет по времени производился до выполнения критерия останова

$$\max_i \frac{|u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}|}{\tau} < \varepsilon, \quad i = 0 \dots n,$$

что соответствует малой скорости изменения решения на данном шаге. Точность полученного результата очень высока, что продемонстрировано на рис. 2, 3.

Были рассчитаны характеристики метода (табл. 1, 2) при малом, среднем и большом количестве узлов в сетке.

Таблица 1

Расчеты числа обусловленности

$\tau$	$n = 24$	$n = 240$	$n = 2400$
0.1	223	22 545	$1.22 \cdot 10^7$
0.0001	778	22 544	$2.25 \cdot 10^6$

Таблица 2

Расчеты количества шагов по времени

$\tau$	$n = 24$	$n = 240$	$n = 2400$
0.1	13	13	13
0.0001	17 774	17 774	17 774

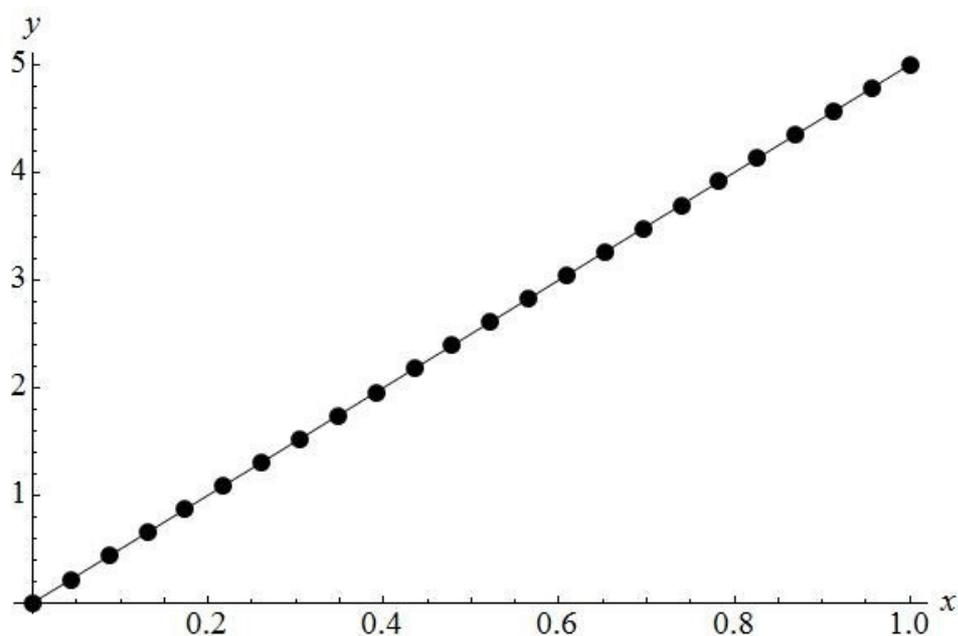


Рис. 2. Сравнение численного и аналитического решений

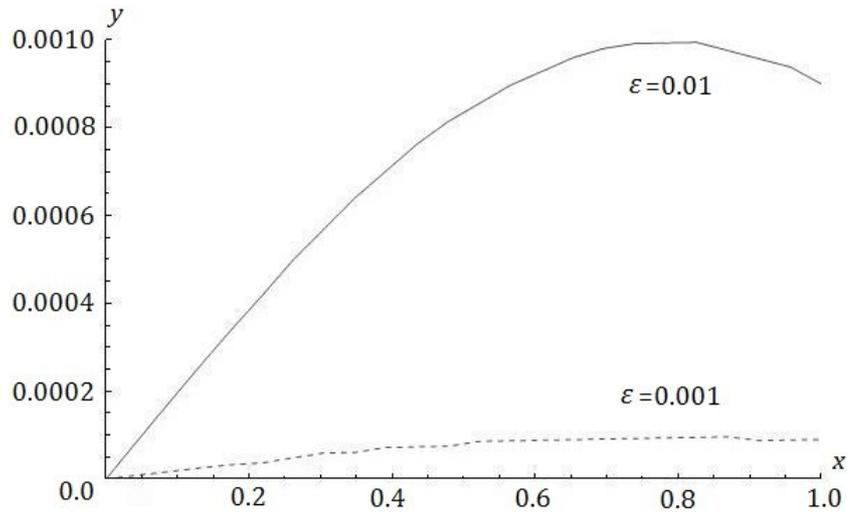


Рис. 3. Разность между аналитическим и численным решениями при разных  $\varepsilon$

### 3.4.2. Метод штрафа

Возможность сохранить симметрию матрицы системы (9) даёт следующий метод.

Пусть первое уравнение системы имеет вид

$$b_0 u_0^{(k+1)} + c_0 u_1^{(k+1)} = d_0 \quad (10)$$

Домножим обе части (3) на большое число  $M > 0$  и сложим его с (10):

$$(M + b_0) u_0^{(k+1)} + c_0 u_1^{(k+1)} = d_0 + M u_0$$

Это уравнение записываем в матрицу  $(T + Q)$  системы (9) вместо уравнения (10). Симметрия матрицы будет сохранена, однако погрешность решения (отклонение температуры  $u_0$  на левом конце стержня от нуля), число обусловленности  $\text{cond } A$  матрицы системы и число шагов расчета по времени  $N$  будут существенно зависеть от величины штрафа  $M$  (табл. 3, 4). Видно, что значение  $M = 10^4$  соответствует не слишком большому числу обусловленности матрицы системы и что расчеты при этом производятся с приемлемой точностью (погрешность не превышает  $10^{-3}$ ). По сравнению с методом прямого включения граничных условий в систему точность решения снизилась, но несущественно.

Таблица 3

Расчеты при  $\tau = 0.1$ .

$M$	$n = 24$			$n = 240$			$n = 2400$		
	$\max  u_0 $	$\text{cond } A$	$N$	$\max  u_0 $	$\text{cond } A$	$N$	$\max  u_0 $	$\text{cond } A$	$N$
$10^0$	5.00	65	33	5.00	494	33	5.00	4 814	33

$10^1$	0.91	79	17	0.91	503	17	0.91	4 823	17
$10^2$	0.10	451	14	0.10	597	14	0.10	4 913	14
$10^3$	0.01	3 432	14	0.01	2 139	14	0.01	5 817	14
$10^4$	$10^{-3}$	23 550	14	$10^{-3}$	123 175	14	$10^{-3}$	20 264	14
$10^5$	$10^{-4}$	227 424	14	$10^{-4}$	$3.09 \cdot 10^6$	14	$10^{-4}$	826 998	14
$10^6$	$10^{-5}$	$2.27 \cdot 10^6$	14	$10^{-5}$	$2.20 \cdot 10^7$	14	$10^{-5}$	$1.05 \cdot 10^8$	14
$10^7$	$10^{-6}$	$2.27 \cdot 10^7$	14	$10^{-6}$	$2.14 \cdot 10^8$	14	$10^{-6}$	$3.05 \cdot 10^9$	14
$10^8$	$10^{-7}$	$2.27 \cdot 10^8$	14	$10^{-7}$	$2.13 \cdot 10^9$	14	$10^{-7}$	$2.19 \cdot 10^{10}$	14
$10^9$	$10^{-8}$	$2.27 \cdot 10^9$	14	$10^{-8}$	$2.13 \cdot 10^{10}$	14	$10^{-8}$	$2.13 \cdot 10^{11}$	14
$10^{10}$	$10^{-9}$	$2.27 \cdot 10^{10}$	14	$10^{-9}$	$2.13 \cdot 10^{11}$	14	$10^{-9}$	$2.12 \cdot 10^{12}$	14

Таблица 4

Расчеты при  $\tau = 0.0001$

$M$	$n = 24$			$n = 240$			$n = 2400$		
	$\max  u_0 $	$\text{cond } A$	$N$	$\max  u_0 $	$\text{cond } A$	$N$	$\max  u_0 $	$\text{cond } A$	$N$
$10^0$	3.32	3	39 929	3.32	28	39 939	3.32	2 327	39 939
$10^1$	0.48	3	20 468	0.48	28	20 476	0.48	2 327	20 476
$10^2$	0.05	3	18 033	0.05	28	18 042	0.05	2 327	18 042
$10^3$	$5.0 \cdot 10^{-3}$	9	17 792	$5.0 \cdot 10^{-3}$	42	17 800	$5.0 \cdot 10^{-3}$	2 327	17 800
$10^4$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	74	17 767	$5.0 \cdot 10^{-4}$	300	17 776	$5.0 \cdot 10^{-4}$	3 588	17 776
$10^5$	$5.0 \cdot 10^{-5}$	731	17 765	$5.0 \cdot 10^{-5}$	2 872	17 774	$5.0 \cdot 10^{-5}$	25 411	17 774
$10^6$	$5.0 \cdot 10^{-6}$	7 293	17 765	$5.0 \cdot 10^{-6}$	28 594	17 773	$5.0 \cdot 10^{-6}$	243 639	17 773
$10^7$	$5.0 \cdot 10^{-7}$	72 911	17 765	$5.0 \cdot 10^{-7}$	285 816	17 773	$5.0 \cdot 10^{-7}$	$2.42 \cdot 10^6$	17 773
$10^8$	$5.0 \cdot 10^{-8}$	729 099	17 765	$5.0 \cdot 10^{-8}$	$2.86 \cdot 10^6$	17 773	$5.0 \cdot 10^{-8}$	$2.42 \cdot 10^7$	17 773

$10^9$	$5.0 \cdot 10^{-9}$	$7.29 \cdot 10^6$	$\frac{17}{765}$	$5.0 \cdot 10^{-9}$	$2.86 \cdot 10^7$	$\frac{17}{773}$	$5.0 \cdot 10^{-9}$	$2.42 \cdot 10^8$	$\frac{17}{773}$
$10^{10}$	$5.0 \cdot 10^{-10}$	$7.29 \cdot 10^7$	$\frac{17}{765}$	$5.0 \cdot 10^{-10}$	$2.86 \cdot 10^8$	$\frac{17}{773}$	$5.0 \cdot 10^{-10}$	$2.42 \cdot 10^9$	$\frac{17}{773}$

### 3.4.3. Метод множителей Лагранжа

В общем виде система (9) имеет вид  $Au = f, u = u^{(k+1)}, A = A^T \geq 0$ . Решение этой системы эквивалентно поиску минимума функции

$$\Psi = \frac{1}{2} u^T A u - u^T f.$$

Накладываем на неё дополнительное условие (3), записав вспомогательную функцию

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{2} u^T A u - u^T f + \lambda(u - u_0),$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа.

Система, соответствующая равенству нулю частных производных  $\tilde{\Psi}$  по переменным  $u_0 \dots u_n, \lambda$  имеет вид

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \mathbf{A} & & & 1 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \begin{Bmatrix} u_0^{(k+1)} \\ \vdots \\ u_n^{(k+1)} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Эту систему легко решить методом циклической прогонки [1]. Характеристики этого метода почти не отличаются от характеристик предыдущих приёмов (табл. 5, 6), погрешность решения такая же, как в методе прямого включения граничных условий в систему. Матрица решаемой системы остается симметричной, но при этом из-за её специфического вида количество вычислений, необходимых для её решения, увеличивается.

Отметим, что значение множителя Лагранжа  $\lambda$  равно величине теплового потока, проходящего через левый конец стержня.

Таблица 5

Расчеты числа обусловленности

$\tau$	$n = 24$	$n = 240$	$n = 2400$
0.1	996	74 178	$7.15 \cdot 10^6$
0.0001	70 284	100 520	$1.19 \cdot 10^6$

Таблица 6

Расчеты количества шагов по времени

$\tau$	$n = 24$	$n = 240$	$n = 2400$
0.1	22	22	22
0.0001	17 774	17 774	17 774

#### 4. Выводы

Итак, учет граничных условий II и III рода проводится непосредственно при конечно-элементной аппроксимации исходной задачи, при этом изменяется лишь соответствующий диагональный элемент матрицы СЛАУ, полученной в результате расчетов. Граничные условия I рода можно учесть различными способами. Предпочтительным является метод штрафа, т.к. погрешность решения в 3-4 знаке после запятой является несущественной в рамках большинства задач теплопроводности. Однако другие методы также часто используются для повышения точности в тех задачах, где это важно, а также для получения других характеристик решения, таких, как тепловой поток.

#### Список литературы

1. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 574 с.
3. Сагдеева Ю.А., Копысов С.П., Новиков А.К. Введение в метод конечных элементов. Ижевск: Удмуртский университет, 2011. 41 с.
4. Котович А.В., Станкевич И.В. Решение задач теплопроводности методом конечных элементов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 86 с.