

УДК 53.05

Исследование эффекта Талбота на двумерных периодических структурах в студенческой лаборатории

Евсеев Е.А., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «СМ-1»*

Кременецкий Н.О., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «СМ-1»*

Мусихин А.А., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «СМ-1»*

Паиков Б.С., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «СМ-1»*

*Научные руководители: Скуйбин Б.Г., к.ф.-м.н, доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана*

Смирнов Е.В., к.ф.-м.н, доцент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
bauman@bmstu.ru*

Явление саморепродукции есть периодически повторяющееся вдоль пути распространения фронта волны самовоспроизведение изображения периодического объекта, освещенного плоской монохроматической волной на некотором расстоянии от него без помощи преломляющих или фокусирующих оптических элементов.

Впервые этот эффект наблюдал в 1836г. Генри Фокс Талбот [1], известный английский физик и химик, один из создателей фотографии. Талбот обнаружил явление саморепродукции при настройке дифракционной решетки, освещаемой белым светом через увеличительное стекло. Когда линза находилась вблизи решетки, изображение было резко сфокусировано, что соответствовало известным законам оптики. Но и при удалении линзы (соответственно выходе решетки из фокуса), изображения оставались достаточно резкими и состояли из чередующихся разноцветных полос. При дальнейшем перемещении линзы наблюдалось повторение цветовой последовательности. В случае использования монохроматического источника, настройка решетки давала размытое изображение, Молодежный научно-технический вестник ФС77-51038

которое фокусировалось на расстоянии, кратном определенному расстоянию z_T . Это расстояние получило название длины Талбота.

Теоретическое описание эффекта Талбота

Теория эффекта Талбота (т.е. теория дифракции света на решетке в *ближней зоне*) была разработана Рэлеем [2]. В 1881г. он получил для длины Талбота следующее выражение:

$$Z_T = \frac{2d^2}{\lambda} \quad (1)$$

Здесь d – период дифракционной решетки, а λ – длина волны света.

Согласно Рэлею [2], волна за решеткой представляет собой сумму плоских волн разных направлений (пространственных гармоник)

$$\psi = A \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$$

Разность хода таких волн Δ определяется выражением

$$\Delta = d \sin \theta_m = m\lambda,$$

где θ_m — угол между направлением распространения m -й волны и осью Z , совпадающей с направлением падения луча света на решетку.

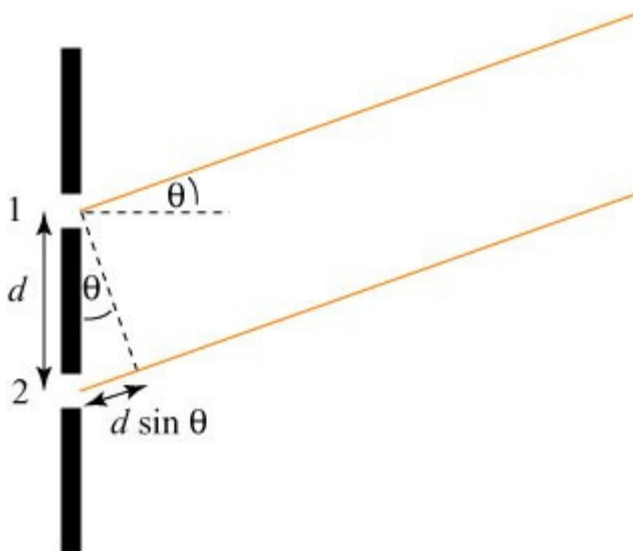


Рис. 1. Дифракция света на решетке

Набег фазы, приобретаемый каждой пространственной гармоникой при распространении от объекта до плоскости наблюдения Z , есть

$$\varphi_m = k \cos(\theta_m)Z,$$

$$\text{где } \cos \theta_m = \sqrt{1 - (\sin \theta_m)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{d}m\right)^2},$$

$$|\bar{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

В итоге получаем:

$$\varphi_m = \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{d}m\right)^2} \approx \frac{2\pi z}{\lambda} - \pi \frac{\lambda z}{d^2} m^2; \quad (2)$$

Набег фазы волны, бегущей вдоль оси Z :

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} z$$

Тогда разность фаз m -ой волны и волны, бегущей вдоль оси Z

$$\Delta\varphi_m = \varphi_0 - \varphi_m = \frac{\pi\lambda}{d^2} z m^2 \quad (3)$$

$$\text{При } \Delta\varphi_m \text{ кратной } 2\pi: \quad \varphi_{m+1} - \varphi_m = 2\pi n = \frac{\pi\lambda z_n}{d^2} \quad (4)$$

В плоскости, расположенной вдоль пути распространения фронта волны на расстоянии $Z_T = \frac{2d^2}{\lambda}$ (или кратном Z_T) от предмета, разность фаз пространственных гармоник, входящих в суперпозицию, кратна 2π . То есть в этой плоскости фазовые соотношения гармоник совпадают с соотношениями в предметной плоскости. Наложение волн приводит к перераспределению их интенсивностей, которое дает точное изображение исходного объекта (решетки). Как следует из соотношений (3), (4), это происходит на расстоянии

$$Z_T * n = \frac{2d^2}{\lambda} n \quad (5)$$

Основное отличие метода Релея от принципа Гюйгенса-Френеля состоит в том, что в приближении малых углов волна разлагается не по сферическим, а по плоским волнам, что позволяет использовать математический аппарат Фурье. Для статических решеток падающая волна описывается уравнением

$$\psi = A e^{ik_\theta x}, \quad (6)$$

где $k_\theta = k \sin \theta$ — проекция волнового вектора падающей волны на ось X , по которой расположена периодически модулированная пространственная решетка.

При дифракции на решетке к поперечному волновому вектору $k_x = k_\theta$ добавляется умножение на $k_d = \frac{2\pi}{d}$, где d – период решетки, то есть волна принимает вид:

$$\psi(x, +0) = \psi(x, -0) \cdot T(x) = \sum_n A_n e^{i(k_\theta + nk_d)x} \quad (7)$$

Здесь A_n — компоненты Фурье-разложения периодической функции пропускания

$T(x)$. При прохождении волной расстояния Z , волновая функция приобретает дополнительную фазу $k_z Z$, где $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2}$ — модуль составляющей волнового вектора, параллельной оси Z .

В приосевом приближении:

$$\psi(x, z) = \sum_n A_n e^{i(k_\theta + nk_d)x + i\left(k - \frac{(k_\theta + nk_d)^2}{2k}\right)z} \quad (8)$$

Предположим, что волна падает на решетку нормально, то есть $k_\theta = 0$, тогда

$$\psi(x, z) = \sum_{n \neq 0} A_n e^{ink_d x} e^{i\left(k - \frac{(nk_d)^2}{2k}\right)z} = A_0 + \sum_{n \neq 0} A_n e^{2\pi i\left(n\frac{x}{d} - n^2\frac{z}{z_T}\right)} \quad [3], \quad (9)$$

Где

$$A_0 = 1 + \frac{a}{d}(e^{i\varphi_0} - 1) \quad (10)$$

– среднее значение $\psi(x, 0)$

$\frac{a}{d} = \frac{1}{2}$ – отношение длины штриха решетки к длине постоянной решетки;

φ_0 – фазовый шаг;

$$A_n = \begin{cases} \frac{a}{d}[e^{i\varphi_0} - 1] \operatorname{sinc} \frac{na}{d} = \frac{1}{2}[e^{i\varphi_0} - 1] \operatorname{sinc} \frac{n}{2} & \text{– для фазовых решеток} \\ \operatorname{sinc} \frac{na}{d} = \operatorname{sinc} \frac{n}{2} & \text{– для амплитудных решеток} \end{cases} \quad (11)$$

Уравнение (9) есть основное уравнение в теории эффекта Талбота.

Рассмотрим комплексную амплитуду $\psi(x, z)$ в 5 частных случаях:

$$z = 0; \quad z = z_T; \quad z = \frac{z_T}{2}; \quad z = \frac{z_T}{4}; \quad z = \frac{3z_T}{4}$$

В первых трёх случаях решения уравнения (9) принимают действительные значения, и как следует из (10) и (11):

$$A_0 = 1; \quad A_n = \operatorname{sinc} \frac{n}{2}$$

$$1) \psi(x, 0) = 1 + \sum_{n \neq 0} \operatorname{sinc} \frac{n}{2} e^{2\pi i n \frac{x}{d}} = 1 + \Delta\psi(x; 0)$$

$$\operatorname{sinc} \frac{n}{2} = \begin{cases} 1, & \frac{n}{2} = 0 \\ 0, & \frac{n}{2} \neq 0; \frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Четные коэффициенты $A_n = 0$ и в суммировании учитываются только нечетные n .

Было также подсчитано $\Delta\psi(x; 0)$:

$$e^{2\pi i n \frac{x}{d}} = \cos 2\pi n \frac{x}{d} + i \sin 2\pi n \frac{x}{d} = \begin{cases} 1, & x = 0 + nd \\ -1, & x = \frac{d}{2} + nd \end{cases} \quad (12)$$

$$\Delta\psi(x; 0) = \begin{cases} 1, & |x - nd - \frac{d}{4}| \leq \frac{d}{2} \\ -1, & \text{в других случаях} \end{cases} \quad [3]$$

Итак,

$$\psi(x; 0) = 1 + \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases} \quad (13)$$

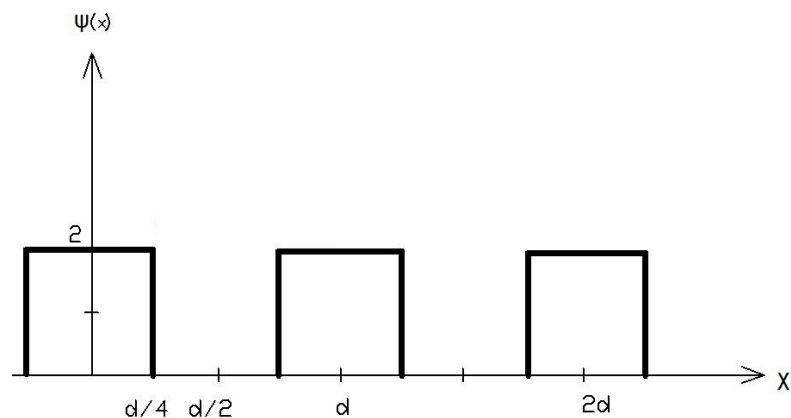


Рис. 2. Зависимость комплексной амплитуды от поперечной координаты X при значениях продольной координаты $Z = 0$; $Z = Z_T$

2) При $Z = Z_T$ фазовый множитель из выражения (9) примет вид:

$$e^{-2\pi i n^2} = \cos(-2\pi n^2) + i \sin(-2\pi n^2) = 1$$

$$\psi(x; z_T) = 1 + \sum_{n \neq 0} \text{sinc} \frac{n}{2} e^{2\pi i n \frac{x}{d}} = \psi(x; 0) \quad (14)$$

3) При $z = \frac{z_T}{2}$:

$$e^{-2\pi i n^2 \frac{1}{2}} = e^{-\pi i n^2} = \cos(-\pi n^2) + i \sin(-\pi n^2) = -1$$

$$\psi\left(x; \frac{z_T}{2}\right) = 1 + \sum_{n \neq 0} \text{sinc} \frac{n}{2} e^{2\pi i n \frac{x}{d}} \cdot (-1) = 1 - \Delta\psi(x; 0) = 1 - \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \quad (15)$$

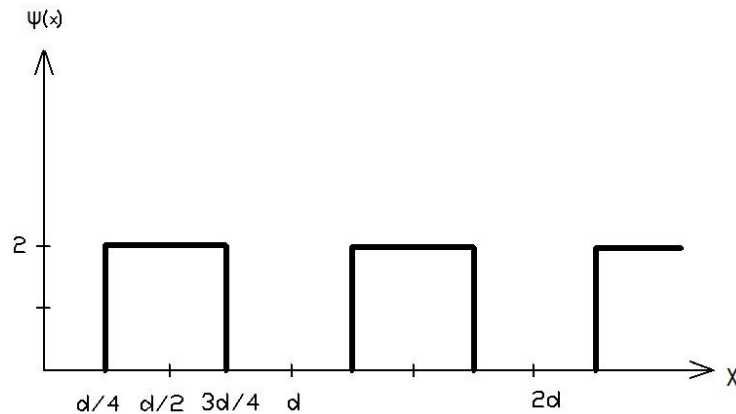


Рис. 3. Зависимость комплексной амплитуды от поперечной координаты X при значении продольной координаты $Z = Z_T/2$

В случаях $z = \frac{z_T}{4}$ и $z = \frac{3z_T}{4}$ решения уравнения (9) находятся на мнимой оси

(фазовый шаг $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$). Тогда, согласно (10) и (11):

$$A_0 = 1 + \frac{1}{2} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1 \right) = 1 + \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$$A_n = \frac{1}{2} \left[e^{i\frac{\pi}{2}} - 1 \right] \text{sinc} \frac{n}{2} = \frac{i}{2} - \frac{1}{2}$$

С учетом (12) получаем:

$$\Delta\psi(x; 0) = \begin{cases} \frac{i}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{cases}$$

4) При $Z = \frac{z_T}{4}$ фазовый множитель выглядит следующим образом:

$$e^{-2\pi i \frac{1}{4} n^2} = e^{-i \frac{\pi}{2} n^2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} n^2\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} n^2\right) = -i$$

$$\psi\left(x; \frac{z_T}{4}\right) = A_0 - i \Delta\psi(x; 0) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - i \cdot \begin{cases} \frac{i}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{cases} = \frac{1+i}{2} - \begin{cases} \frac{-1+i}{2} \\ \frac{i+1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1+i \\ 0 \end{cases} \quad (16)$$

5) При $Z = \frac{3z_T}{4}$:

$$e^{-2\pi i \frac{3}{4} n^2} = e^{-i \frac{3\pi}{2} n^2} = \cos\left(-\frac{3\pi}{2} n^2\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{2} n^2\right) = i.$$

$$\Delta\psi(x; 0) = A_0 + i \Delta\psi(x; 0)$$

$$\psi\left(x; \frac{3z_T}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + i \begin{cases} \frac{i}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{cases} = \frac{1+i}{2} + \begin{cases} \frac{-1-i}{2} \\ \frac{i+1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 1+i \end{cases} \quad (17)$$

Известно, что интенсивность волны описывается следующим образом:

$$I(x; z) = \psi(x; z) \cdot \psi^*(x; z). \quad (18)$$

Тогда, учитывая, что

$$(1-i)(1+i) = 2,$$

изобразим графики интенсивности в зависимости от координаты x в 5 описанных выше случаях:

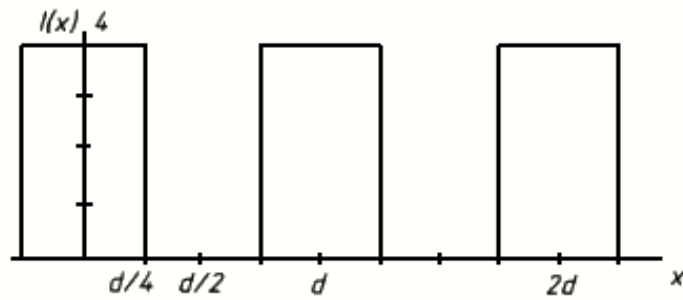


Рис. 4.а. График интенсивности при $Z = 0; Z = Z_T$

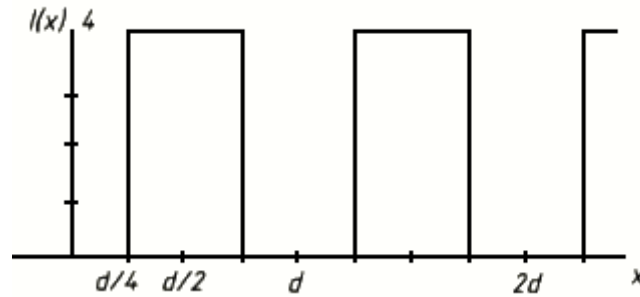


Рис 4.б. График интенсивности при $Z = \frac{Z_T}{2}$

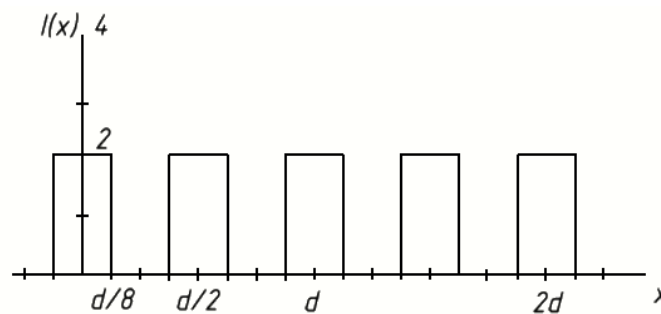


Рис. 4.в. График интенсивности при $Z = \frac{Z_T}{4}; Z = \frac{3Z_T}{4}$

Из приведенных графиков зависимости интенсивности от поперечной координаты видно, что:

1) при $Z = Z_T$ (рис. 4.а) распределение интенсивности аналогично исходному при $Z = 0$ и, согласно уравнению (9), период решетки не меняется

$$d_{Z_T} = d_0, \quad (19)$$

где d_0 - постоянная решетки в предметной плоскости.

2) при $Z = \frac{Z_T}{2}$ (рис. 4.б) наблюдается сдвиг картины интенсивности в поперечном направлении, величина интенсивности аналогична таковой в предметной плоскости,

$$d_{\frac{z_T}{2}} = d_0, \quad (20)$$

наблюдается смещение на полпериода.

3) при $Z = \frac{z_T}{4}, Z = \frac{3z_T}{4}$ (рис 4.в.) величина интенсивности уменьшилась в 2 раза,

$$d_{\frac{z_T}{4}} = d_{\frac{3z_T}{4}} = \frac{d_0}{2}. \quad (21)$$

Частота минимумов и максимумов обратно пропорциональна периоду решетки:

$$\nu = \frac{1}{d}.$$

Следовательно, при $Z = \frac{z_T}{4}, Z = \frac{3z_T}{4} : \nu = 2\nu_0$.

Обобщая сказанное выше, можно заключить, что самоизображение проявляется для всех целых значений длины Талбота nz_T , а также на расстояниях $\frac{nz_T}{2m}$ (m – целое), но с уменьшенной периодичностью $\frac{d_0}{m}$ [5], (см. рис. 5.) Эти сжимающиеся изображения называют дробными изображениями Талбота.

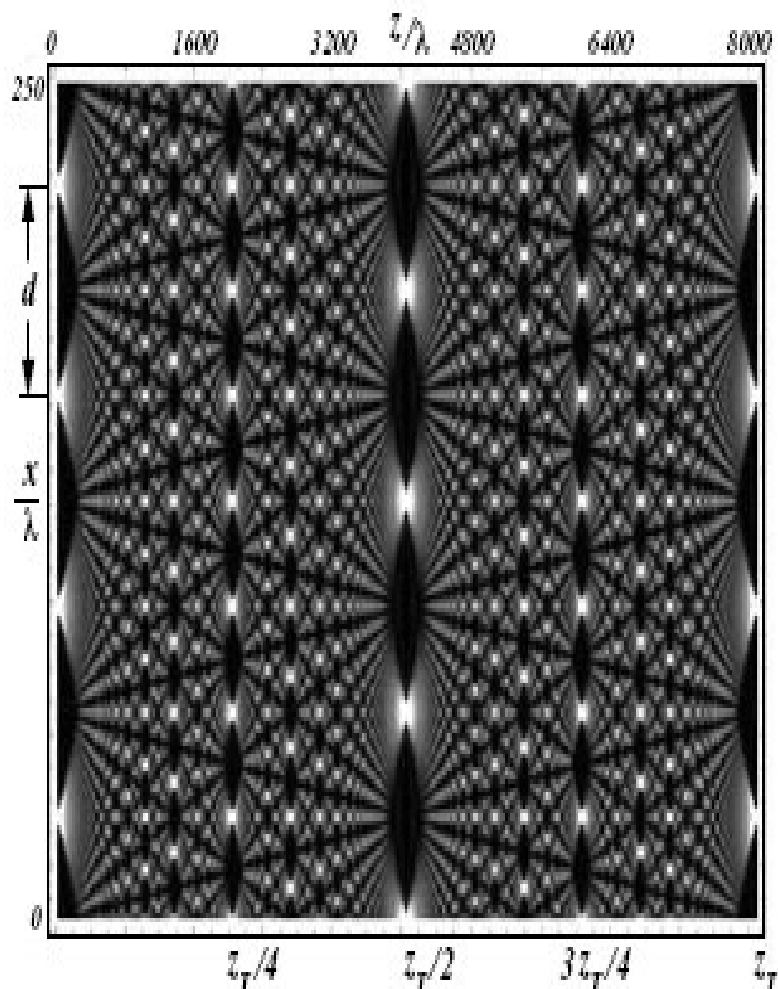


Рис. 5. Оптический эффект монохроматического света, названный ковром Талбота. [9]

Экспериментальное наблюдение эффекта Талбота на двумерных решетках.

Для опытной проверки полученных результатов была собрана экспериментальная установка, фотография которой приведена на рис.6:

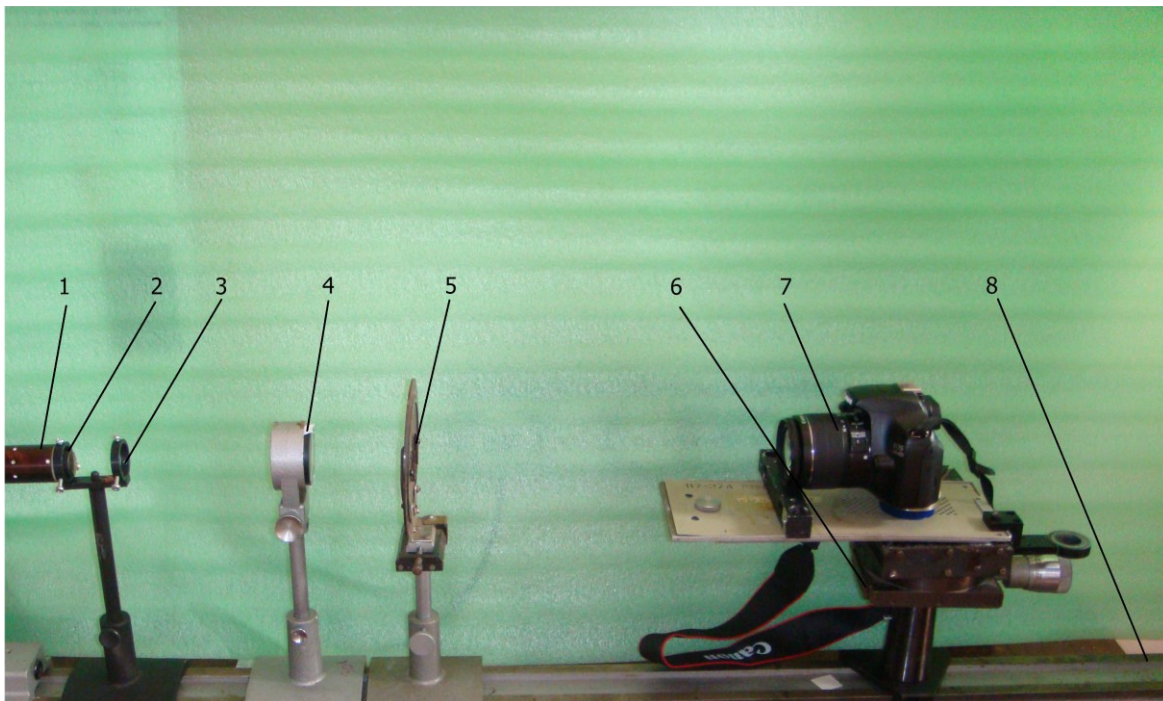


Рис. 6. Экспериментальная установка

Установка включает в себя лазер (1), телескоп, состоящий из линз с фокусными расстояниями $F1 = 1$ см (2) и $F2 = 15$ см (4), светофильтр (3), решетку с периодом $d = 0.33$ мм (5), столик (6) с базой микрометрической подачи 3 см и шагом 10 мкм, фотокамеру Canon EOS1100D (7) с матрицей CMOS 12.2 мегапиксела.

Установка собрана на оптической скамье (8). Размеры оптической скамьи позволяют перемещать фотокамеру на расстояние до 80 см. В эксперименте использовались гелий-неоновый (He-Ne) лазер ($\lambda=0.63$ мкм) и зеленый лазер ($\lambda=0.532$ мкм). Телескоп позволяет получить освещенную площадку диаметром 10-15 мм. Использовались различные решетки с периодом от 50 мкм до 420 мкм.

После прохождения через решетку свет попадает в объектив фотокамеры. Съемка происходит в режиме макро. Выбиралась оптимальная комбинация различных объективов. Микрометрическая подача позволяет настроить резкую картину оригинальной сетки и ее репродуцированных изображений. В процессе эксперимента были исследованы картины изображений в пределах от 0 до ZT . В пределах длины Талбота ZT наблюдается изменение периода изображений. Увеличив полученные

фотографии и измерив период решетки на каждом из изображений, удалось установить, что перемещение фотокамеры на расстояние $Z_T/4$ дает изображение решетки с вдвое меньшим периодом по сравнению с сеткой, а на расстоянии $Z_T/2$ наблюдается изображение с тем же периодом, смещенное по поперечной координате X . Дальнейшее перемещение фотокамеры в точку с координатой $3/4 Z_T$ вновь дало изображение с периодом $d_0/2$ (см. рис. 7). Таким образом, теоретические и экспериментальные результаты совпали.

Экспериментально полученные фотографии

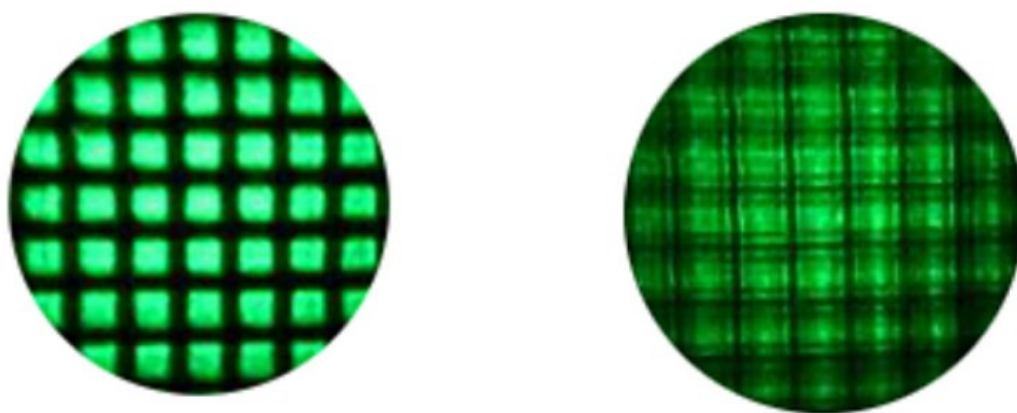


Рис.7.а. Саморепродукция изображений дифракционной решетки на расстояниях:
 $Z = 0$; $Z = 10,5 \text{ см} = Z_T/4$

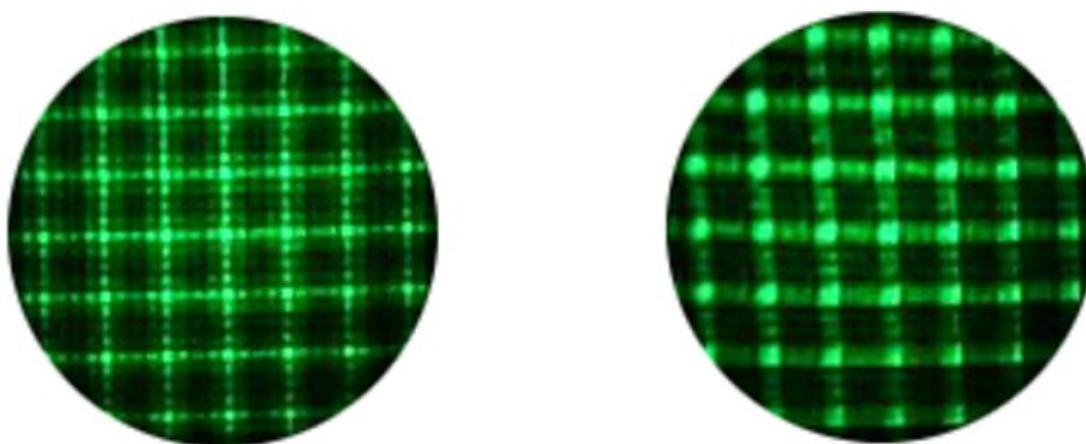


Рис.7.б. Саморепродукция изображений дифракционной решетки на расстояниях:
 $Z = 11,2 \text{ см} \approx Z_T/4$; $Z_T/4 < Z < Z_T/2$

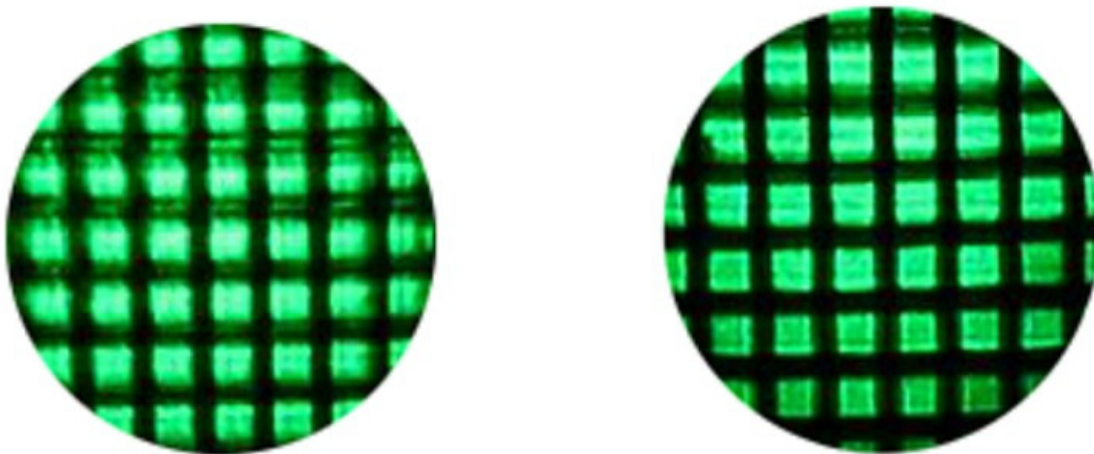


Рис.7.в. Саморепродукция изображений дифракционной решетки на расстояниях :

$$Z = 20 \text{ см} \approx Z_T/2; Z = 21 \text{ см} \approx Z_T/2$$

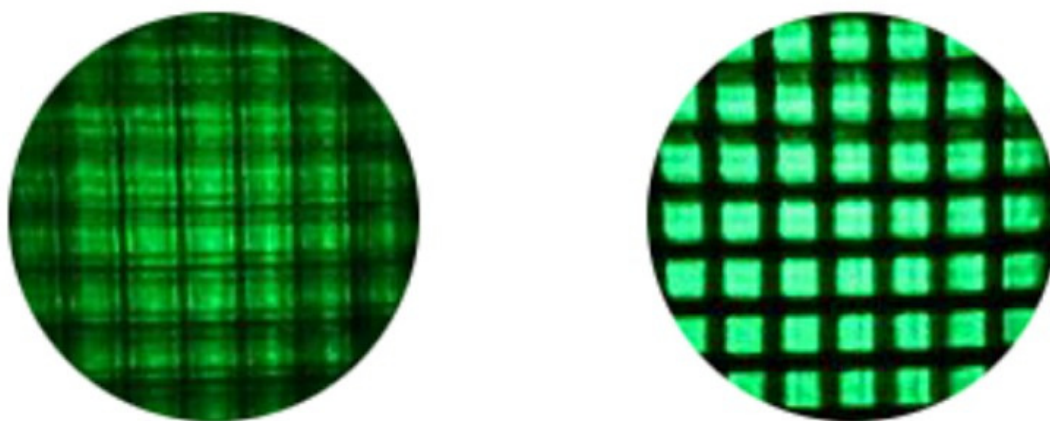


Рис.7.г. Саморепродукция изображений дифракционной решетки на расстояниях :

$$Z = 32 \text{ см} = 3Z_T/4; Z = 41 \text{ см} = Z_T$$

Таким образом, эффект Талбота интересен и может быть использован в лабораторном практикуме университетского курса физики. Особенно практически полезна возможность построения изображений без использования каких-либо преломляющих и отклоняющих оптических приборов.

В настоящее время эффект Талбота исследуется и применяется в различных научных и технических приложениях, в частности при визуализации сложных фазовых объектов, в спектрометрии и интерферометрии для создания датчиков волновых фронтов, массивов осветителей; для повышения степени когерентности излучения коаксиальных волновых лазеров вдоль азимутального направления; для создания поверхностных

профилей прозрачных объектов, измерения рефракции неизвестных материалов и оптических элементов ([5], [7], [8]). Он является основой одного из немногих способов изучения волновых свойств крупных органических молекул [9].

Список литературы

1. H.F. Talbot. Facts relating to optical science. // Philos. Mag., v.9, 1836, p.401-407.
2. L. Rayleigh. On copying diffraction-gratings, and some phenomena connected therewith. //Philos. Mag., v.11, 1881, p.196-205.
3. A.W. Lohmann. Fractional Montgomery effect: a self-imaging phenomenon. // J. Opt. Soc. Am. A, v.22, 2005, p.1500-1508.
4. A.W. Lohmann. An array illuminator based on the Talbot effect. // Optic (Stuttgard), v.79, 1988, p.41-45.
5. S. Nowak, Ch. Kurtsiefer, T. Pfau and C. David. Полосы Талбота высоких порядков для атомных волн материи. // Optics letters, v.22, N18, 1997, p.1430-1433.
6. Сбитнев В. И. Интерференционные явления: фракталы в ближней зоне, Талбот – ковры и поведение бомовских траекторий на них. // Квантовая магия, том 6, вып. 4, с. 4155 - 4168, 2009.
7. K. Patorski. Self-imaging and its applications. // in Progress in Optics XXVII, E. Wolf, ed., (Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1989), p.2-108.
8. W.B. Case, M. Tomandl, S. Deachapunya, M. Arndt. Realization of optical carpets in the Talbot and Talbot-Lau configurations. // Optics express, v.17, 2009, p.209660-20974.
9. S. Gerlich et al. A Kapitza-Dirac-Talbot-Lau integferometer for highly polarizable molecules. // Nature physics, v.3, 2007, p.711-715.