электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 629.19

Анализ оптимального разгона КА при полёте к Луне

Гордиенко Е.С., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Баллистика и аэродинамика»

Лю В., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
кафедра «Баллистика и аэродинамика»

Научный руководитель В.В. Ивашкин, д. ф.-м.н., профессор,
ведущий научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша
kafsm3@sm.bmstu.ru

Проблема определения оптимальных траекторий разгона всегда заслуживала исследования. Одним из первых учёных, рассмотревших её, был Лоуден Д.Ф. Результаты своей работы он опубликовал в книге [1].

Как показали Охоцимский Д.Е. и Энеев Т.М., для модели плоскопараллельного поля притяжения тангенс оптимального угла наклона является дробно-линейной или линейной функцией времени [2], поэтому в качестве аппроксимации закон управления был выбран закон линейной тяги.

В данной работе на примере конкретных средств выведения рассмотрен вопрос технической реализации оптимизации активного участка разгона КА. Её конечной целью является возможность применения полученных оптимальных законов управления при решении задач полёта к Луне путём численного интегрирования активного участка разгона КА.

Постановка задачи теории оптимизации

Рассматривается расчёт оптимального по конечной массе активного участка разгона КА с начальной круговой опорной орбиты у Земли высотой H_0=250 км с целью достижения заданной величины большой полуоси a_0=220000 км орбиты полёта к Луне.

Для уменьшения гравитационных потерь данный импульс необходимо выдать за как можно более короткий промежуток времени, таким образом, можно увеличить конечную массу КА, выводимого к Луне. Также гравитационные потери можно уменьшить за счёт разделения импульса на две или более частей. В данном исследовании рассмотрен случай с одним включением ДУ, т.е. импульс не делится.

Вывод КА на низкую околоземную орбиту осуществляется с помощью ракеты-носителя. Далее КА осуществляет пассивный полёт по околоземной орбите вокруг Земли. Для разгона КА до требуемой скорости перелёта на орбиту Луны используется разгонный блок. В расчетное время в заданной точке орбиты включается ДУ РБ и выдаётся импульс разгона для дальнейшего полёта к Луне.

Рассмотрены два варианта разгонного блока[*]:

а) Блок типа «Фрегат» для ракеты-носителя «Союз». Для него принято:

начальная масса m_0=6635 кг;

скорость истечения газов из сопла W_e=3198 м/с;

тяга P=20000 Н.

б) Блок типа «Бриз-М» для ракеты-носителя «Протон». Его параметры приняты следующими:

начальная масса m0=6475 кг;

скорость истечения газов из сопла W_e=3218.6 м/с;

тяга P=20000 Н.

Одним из возможных критериев оптимизации для участка разгона может стать функционал вида:

(1) $$\vec{J} = \int_0^{t_f} \dot{m} dt = \int_0^{t_f} \frac{P}{W_e} dt = \frac{P}{W_e} t_f \to \min.$$

Для анализа оптимального разгона принято, что величина тяги постоянна, а оптимизация тяги осуществляется варьированием её направления.

Тогда задача поиска максимальной конечной массы эквивалентна задаче минимизации времени разгона, т.е. имеем задачу быстродействия:

(2) $$\vec{J} = t_f \to \min.$$

Рассматривается плоская задача движения и управления.

Анализ оптимального разгона проводился в три этапа:

На первом и втором этапах рассматривалась двухпараметрическая задача оптимальной в рамках линейного закона ориентации вектора тяги. Рассматривались три варианта линейного закона управления:

1. по углу атаки $\alpha(t)$: $\alpha(t) = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0 t$;
2. по углу между вектором тяги **P** и трансверсалью $\varphi(t)$: $\varphi(t) = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 t$;
3. по углу между вектором тяги **P** и положительным направлением оси X в инерциальной системе координат $\gamma(t)$: $\gamma(t) = \gamma_0 + \dot{\gamma}_0 t$.

Анализ первого этапа

На первом этапе решение задачи разгона проводилось методом перебора с помощью РБ «Фрегат» для двух вариантов начальных масс:

1. m_0=5300 кг
2. m_0=5000 кг.

Движение рассматривалось в орбитальной системе координат.

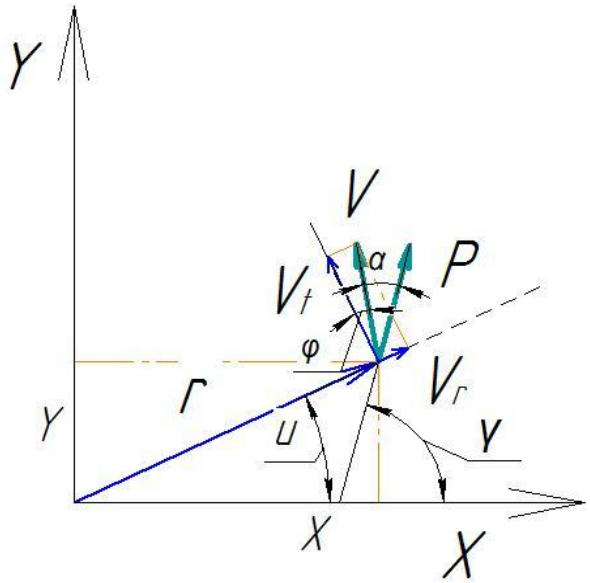

Рис. 1. Геометрическая схема расположения углов и направлений векторов скорости и тяги в орбитальной системе координат

Здесь и далее

V_r, V_t – радиальная и трансверсальная составляющие вектора скорости,

r – текущий радиус-вектор КА,

u – полярный угол, характеризующий текущее угловое положение КА на участке разгона,

φ –угол между вектором тяги $\bar{P}$ и трансверсалью.

Начальные данные, соответствующие круговой орбите радиуса r_0:

$$t = t_0 : r = r_0 = 6628.136\ км,\ u = u_0 = 180^0,$$
$$V_r = V_{r0} = 0\ {}^{км}\!/_{c}, \qquad (3)$$
$$V_t = V_{t0} = V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}},$$

где μ – гравитационный потенциал Земли.

Условие, соответствующее достижению заданной большой полуоси a_f=220000 км и конечной энергии h_f:

$$h_f = -\frac{\mu}{a} = V_f^2 - \frac{2\mu}{r_f} = V_{fr}^2 + V_{ft}^2 - \frac{2\mu}{r_f}. \qquad (4)$$

Дифференциальные уравнения движения в орбитальной системе координат имеют вид (5):

$$\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = V_r, \\
&\frac{du}{dt} = \frac{V_t}{r}, \\
&\frac{dV_r}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{V_t^2}{r} + \frac{P}{m_0 - \dot{m}t}\sin\varphi, \\
&\frac{dV_t}{dt} = -\frac{V_r V_t}{r} + \frac{P}{m_0 - \dot{m}t}\cos\varphi,
\end{aligned} \qquad (5)$$

где $\dot{m} = \frac{P}{W_e}$=const – секундный расход топлива.

В ходе решения задачи строились изолинии конечного времени разгона:
На их основе определялась область нахождения оптимального закона управления.

Метод перебора. Результаты

Вариант №1: m_0=5300 кг рис. 2.а, рис. 3.а, рис. 4.а, рис.5.а.

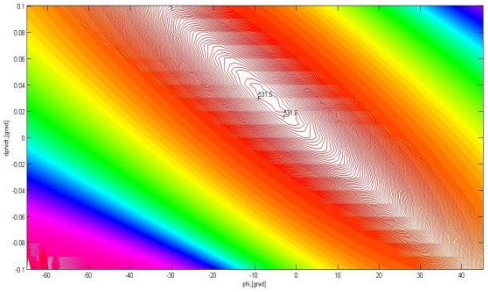

Рис. 2.а Изолинии конечного времени для φ(t): $\varphi_0 \in$[-65;45]; $\dot{\varphi}_0 \in$[-0.1;0.1].

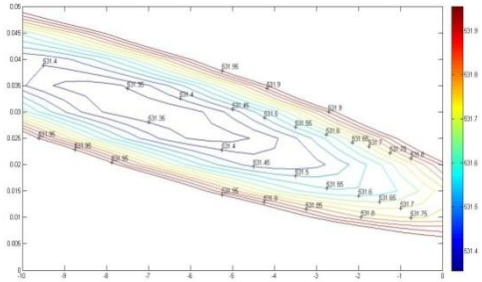

Рис. 3.а Изолинии конечного времени для φ(t): $\varphi_0 \in$[-10;0]; $\dot{\varphi}_0 \in$[0;0.05].

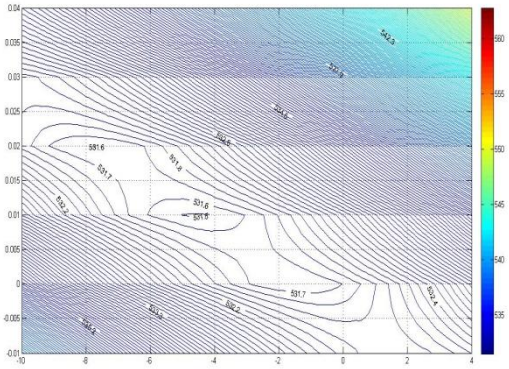

Рис. 4.а Изолинии конечного времени для α(t): $\alpha_0 \in$[-10;4]; $\dot{\alpha}_0 \in$[-0.01;0.04].

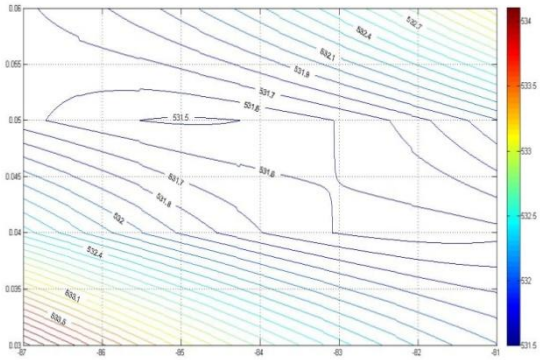

Рис. 5.а Изолинии конечного времени для γ(t) γ(t): $\gamma_0 \in$[-85.0;-84.5]; $\dot{\gamma}_0 \in$[0.007;0.012].

Вариант №2:m_0=5000 кг рис. 2.б, рис. 3.б, рис. 4.б, рис.5.б.

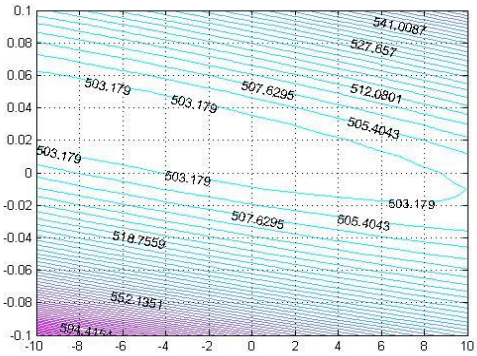

Рис. 2.б Изолинии конечного времени для φ(t): $\varphi_0 \in [-10;10]$; $\dot{\varphi}_0 \in [-0.1;0.1]$.

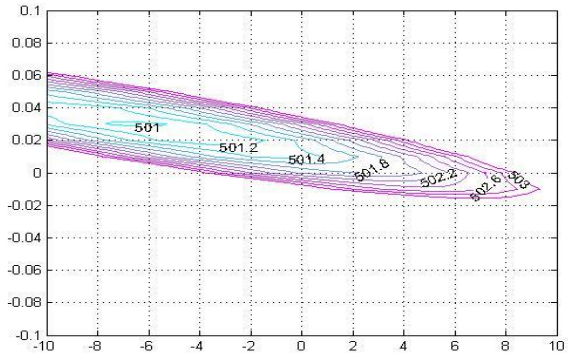

Рис. 3.б Изолинии конечного времени для φ(t): $\varphi_0 \in [-10;10]$; $\dot{\varphi}_0 \in [-0.1;0.1]$.

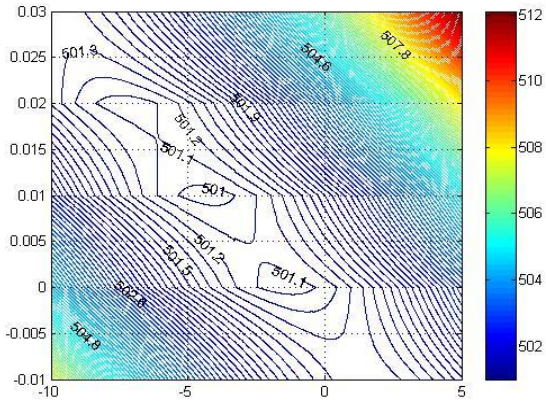

Рис. 4.б Изолинии конечного времени для α(t): $\alpha_0 \in [-10;5]$; $\dot{\alpha}_0 \in [-0.01;0.03]$.

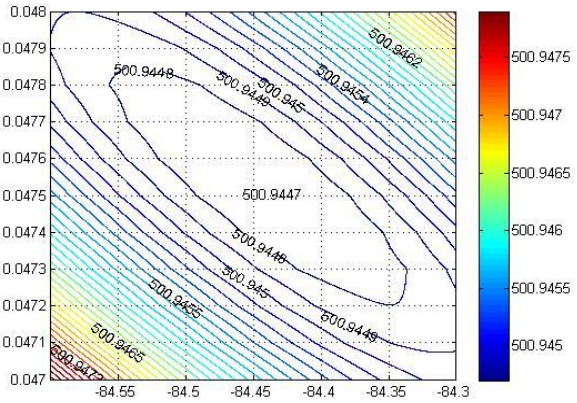

Рис. 5.б Изолинии конечного времени для γ(t): $\gamma_0 \in [-84.6;-84.3]$; $\dot{\gamma}_0 \in [0.047;0.048]$.

На основе анализа результатов этого этапа пришли к выводу о том, что в начальный момент активного участка разгона КА при управлении по законам φ(t), α(t) φ_0<0, α_0<0, а $\dot{\varphi}_0 < 0$ и $\dot{\alpha}_0 < 0$, а при управлении по закону γ(t) γ_0>90^0, если u_0=0^0 иγ_0>-90^0, если u_0=180^0, а $\dot{\gamma}_0 > 0$, если $u_0 \in [0^0, 360^0]$.

Полученные для двух вариантов результаты отражёны в таблицах 1.а, 1.б.

Таблица 1.а

Характеристики оптимального закона управления для варианта №1

Параметр управления	φ	α	γ
Закон управления	$\varphi(t) = -6.963^0 + 0.03t$	$\alpha(t) = -4.649^0 + 0.01t$	$\gamma(t) = -85.027^0 + 0.05t$
t_f, с	531.490170	531.488198	531.487069
r_f, км	6893.045881	6871.674789	6898.175774
Δu_f, град	40.989122	41.030909	40.962389
m_f, кг	1976.109004	1976.121338	1976.128393

ΔV_X, м/с	3155.073	3155.053	3155.042
$\Delta V_{имп}$, м/с	3129.245	3129.245	3129.245
$\delta V_{гр}$, м/с	25.828	25.808	25.797

Здесь и далее $\Delta V_{имп}$ - характеристическая скорость разгона для импульсного случая, ΔV_X - характеристическая скорость оптимального управления с конечной тягой $\Delta V_X = c \cdot \ln(\frac{m_0}{m_f})$, $\delta V_{гр} = \Delta V_X - \Delta V_{имп}$ - гравитационные потери.

Таблица 1.б

Характеристики оптимального закона управления для варианта №2.

Параметр управления	φ	α	γ
Закон управления	$\varphi(t) = -6.611^0 + 0.03t$	$\alpha(t) = -4.364^0 + 0.01t$	$\gamma(t) = -85.452^0 + 0.0475t$
t_f, с	500.953586	500.951859	500.944706
r_f, км	6863.838872	6780.916796	6718.540695
Δu_f, град	38.706696	37.285036	36.138935
m_f, кг	1863.653437	1863.954803	1863.999585
ΔV_X, м/с	3156.103	3155.586	3155.509
$\Delta V_{имп}$, м/с	3129.245	3129.245	3129.245
$\delta V_{гр}$, м/с	26.858	26.341	26.264

Анализ второго этапа

На втором этапе оптимизация участка траектории разгона рассматривалась на примере квазиньютоновского метода Пауэлла. При этом рассматривались варианты с начальными данными, соответствующими конкретным техническим изделиям РН «Союз» с РБ «Фрегат» и РН «Протон» с РБ «Бриз-М»[*].

Квазиньютоновские методы — методы оптимизации, основанные на накоплении информации о кривизне целевой функции по наблюдениям за изменением градиента, чем принципиально отличаются от ньютоновских методов. Алгоритм расчёта взят из [4].

Опишем алгоритм ДФП-метода (Давидон-Флетчер-Пауэлл) в случае, когда (не квадратичная) целевая функция f(x) (масса как функция двух параметров) дифференцируема в R^n, n=2. На предварительном этапе задаем значение ε_3 *параметра точности поиска* в условии прекращения итераций $|\omega^k|<\varepsilon_3$и выбираем начальную точку $\boldsymbol{x}°$. Принимаем $A_1=I_n$ (I_n – единичная матрица), формируем множество $I_0=\{n.$ 2n, ...} *моментов обновления алгоритма,* полагаем k=1 и переходим к основной части алгоритма.

1. На k-й итерации в точке x^{k-1} вычисляем антиградиент w^k=-gradf(x^{k-1}) целевой функции и проверяем выполнение неравенства $|w^k|<\varepsilon_3$. Если оно выполнено, то итерации прекращаем и полагаем $x^k \approx x^{k-1}$, f(x*)≈f(x^{k-1}). В противном случае переходим к п. 2.

2. Используя (7), вычисляем вектор $p^\kappa = A^k w^k$, определяющий направление спуска из точки x^{k-1}, и, минимизируя функцию $\psi_k(\lambda) = f(x^{k-1} + \lambda p^\kappa)$, находим значение λ_k и точку $x^k = x^{k-1} + \lambda_k p^\kappa$. Если $k \in I_0$, то принимаем $A_{k+1}=I_n$, полагаем $k := k+1$ и возвращаемся к п. 1. В противном случае переходим к п. 3.

3. Полагаем $\Delta x^k = x^k - x^{k-1}$, $\Delta w^k = w^{k+1} - w^k$ по формуле (7) вычисляем матрицу A_{k+1}, полагаем k:=k+1 и возвращаемся к п. 1.

Для реализации второго этапа используются следующие формулы метода Пауэлла.

$$p^k = -A_k gradf(x^{k-1}) = A_k \omega^k, k \in N. \tag{6}$$

$$A_{k+1} = A_k - \frac{\Delta\tilde{x}^k (\Delta\tilde{x}^k)^T}{(\Delta\tilde{\omega}^k, \Delta\tilde{x}^k)}, \tag{7}$$

$$где\ \Delta\tilde{x}^k = \Delta x^k + A_k \Delta\omega^k, k \in N.$$

Здесь $w^k = -gradf(x^{k-1})$ *– антиградиент целевой функции в точке* x^{k-1},
а A_k *– положительно определённая матрица порядка* n, *обновляемая на* k *– й итерации.*

Для поиска величины шага λ_K используется критерий Armijo. Показателем данного критерия является функция вида: $\Delta f(x_k)=f(x_k)-f(x_k+\lambda_k d_k)$[6], где d_k - направление поиска, а значения параметров β, σ, λ_K выбираются из следующих условий: $\beta \in (0,1), \sigma \in (0,0.5)$. $\lambda_k = \beta^{m_k}$, где m_k – минимальное неотрицательное целое число, соответствующее следующему неравенству: $f(x_k + \beta^m d_k) \le f(x_k) + \sigma\beta^m g_k^T d_k$, $g_k = g(x_k) = \nabla f(x_k)$.

В итоге были получены результаты, отражённые в таблицах 2. а, 2.б.

Таблица 2.а

Характеристики оптимального управления. Вариант №1.

Параметр управления	φ	α	γ
Закон управления	$\varphi(t) = -8.5347^0 + 0.02978t$	$\alpha(t) = -5.6189^0 + 0.00982t$	$\gamma(t) = 97.32482^0 + 0.04723t$
t_f, с	666.274504	666.272375	666.271318
r_f, км	7051.981946	7052.320696	7050.563542
Δu_f, град	50.832154	50.815764	50.858128
m_f, кг	2466.769856	2466.779524	2466.789425
ΔV_X, м/с	3164.258	3164.245	3164.232
$\Delta V_{имп}$, м/с	3129.245	3129.245	3129.245
$\delta V_{гр}$, м/с	35.013	35	34.987

При оптимизации по φ(t) получаем следующие угловые значения на конце:
$\varphi(t_f)$= 11.31523^0, $\gamma(t_f)$= 129.516924^0, $\alpha(t_f)$= -1.068645^0, $\beta(t_f)$= 12.383879 ^{0}.
При оптимизации по α(t) получаем следующие угловые значения на конце:
$\varphi(t_f)$= 13,311247^0, $\gamma(t_f)$=127.504517^0, $\alpha(t_f)$= 0.92828^0, $\beta(t_f)$= 12.3829678848519^0.
При оптимизации по γ(t) получаем следующие угловые значения на конце:
$\varphi(t_f)$= 12.02799^0, $\gamma(t_f)$=128,830138^0, $\alpha(t_f)$= -0.338731726971^0, $\beta(t_f)$= 12,3667263096836^0.

Таблица 2.б

Характеристики оптимального управления. Вариант №2.

Параметр управления	φ	α	γ
Закон управления	$\varphi(t) = -8.4027^0 + 0.02987t$	$\alpha(t) = -5.5425^0 + 0.00992t$	$\gamma(t) = 97.1784^0 + 0.04733t$
t_f, с	652.468108	652.465851	652.451052
r_f, км	7027.192343	7027.507134	7027.174485
Δu_f, град	49.890826	49.875235	49.884175
m_f, кг	2420.640291	2420.654313	2420.746274
ΔV_X, м/с	3166.833	3166.815	3166.692
$\Delta V_{имп}$, м/с	3129.245	3129.245	3129.245
$\delta V_{гр}$, м/с	37.588	37.57	37.447

При оптимизации по φ(t) получаем следующие угловые значения на конце:
$\varphi(t_f)$= 11.0891^0, $\gamma(t_f)$= 128.80168^0, $\alpha(t_f)$= -1.05686^0, $\beta(t_f)$= 12.14601^0.
При оптимизации по α(t) получаем следующие угловые значения на конце:
$\varphi(t_f)$= 13.0776^0, $\gamma(t_f)$= 126.797587^0, $\alpha(t_f)$= 0.92992^0, $\beta(t_f)$= 12.14628^0.
При оптимизации по γ(t) получаем следующие угловые значения на конце:
$\varphi(t_f)$= 11.8259^0, $\gamma(t_f)$= 128.058247^0, $\alpha(t_f)$= -0.319882^0, $\beta(t_f)$= 12.14581^0.

Анализ третьего этапа

На третьем этапе оптимизация управления вектором тяги рассматривалась с использованием принципа максимума Понтрягина. Были рассмотрены два варианта управления ориентацией вектора тяги:

- по γ(t) в инерциальной системе координат,
- по φ(t) в орбитальной системах координат.

Решение задачи с использованием РН «Союз» и РБ типа «Фрегат». Вариант №1.

I. Постановка задачи.

1. Уравнения движения в декартовой системе координат

$$\frac{dx}{dt} = V_X$$
$$\frac{dy}{dt} = V_Y$$
$$\frac{dV_X}{dt} = g_x + \frac{P}{m_0 - \dot{m}t}\cos\gamma \qquad (8)$$
$$\frac{dV_Y}{dt} = g_y + \frac{P}{m_0 - \dot{m}t}\sin\gamma$$
$$\frac{dm}{dt} = -\frac{P}{W}$$

где $\dot{m}$ *– массовый расход топлива,*

γ *– угол наклона вектора тяги к оси* Ox,

где $g_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\mu}{r^3}x,\ g_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\mu}{r^3}y,\ U = \frac{\mu}{r}$ *– потенциал.*

2. Начальные условия

$$u_0 = 0, \qquad r_0 = 6628.136\ км,$$
$$x = x_0 = r_0\cos u_0, \qquad y = y_0 = r_0\sin u_0,$$
$$V_x = V_{x0} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}\sin u_0, \quad V_y = V_{y0} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}\cos u_0, \qquad (9)$$
$$m = m_0 = 6635\ кг, \qquad W_e = 3198\ м/с.$$

3. Конечное условие

В качестве конечного взято условие, соответствующее достижению заданной большой полуоси a_f=220000 км и конечной энергии h_f:

$$h_f = -\frac{\mu}{a} = V_f^2 - \frac{2\mu}{r_f} = V_{xf}^2 + V_{yf}^2 - \frac{2\mu}{r_f}. \qquad (10)$$

4. Управление

Тяга берётся постоянной $P = P_{yo} g\dot{m} = W\beta = const, W = P_{yo} g$ *– скорость истечения газов из сопла РБ,* $\dot{m} = \beta$ *– массовый расход.*

Угол ориентации тяги γ – произвольный, подлежит оптимизации.

5. Функционал. Минимизируется время в конечный момент разгона, когда достигается требуемое значение большой полуоси орбиты перелёта к Луне:

$$t_f \Rightarrow \min . \tag{11}$$

II. Сопряжённые переменные

В соответствии с системой фазовых координат x=(x, y, V_x, V_y)* сопряженные переменные $\bar{\psi} = (\psi_X, \psi_Y, \psi_{Vx}, \psi_{Vy})^*$.

$$H = \psi_X V_X + \psi_Y V_y + \psi_{Vx}(-\frac{\mu_E}{r^3} x + \frac{P}{m_0 - \dot{m}t}\cos\gamma) + \psi_{Vy}(-\frac{\mu_E}{r^3} y + \frac{P}{m_0 - \dot{m}t}\sin\gamma). \tag{12}$$

Оптимальное управление γ_{opt}(t) максимизирует гамильтониан H(ψ, x, γ, t) по γ (t).

Дифференциальные уравнения для ψ(t):

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_X &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\psi_{Vx}(-\frac{\mu_E}{r^3} + \frac{3\mu_E}{r^3}\frac{x^2}{r^2}) - \psi_{Vy}(\frac{3\mu_E}{r^3}\frac{xy}{r^2}),\\
\dot{\psi}_Y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\psi_{Vx}(\frac{3\mu_E}{r^3}\frac{xy}{r^2}) - \psi_{Vy}(-\frac{\mu_E}{r^3} + \frac{3\mu_E}{r^3}\frac{x^2}{r^2}),\\
\dot{\psi}_{Vx} &= -\frac{\partial H}{\partial Vx} = -\psi_x,\\
\dot{\psi}_{Vy} &= -\frac{\partial H}{\partial Vy} = -\psi_y.
\end{aligned} \tag{13}$$

III. Оптимальное управление

Оптимальное управление γ_{opt}(t) максимизирует гамильтониан $H(\psi, x, t, \gamma)$ по γ:

$$\psi_{Vx}\frac{P}{m_0-\dot{m}t}\cos\gamma+\psi_{Vy}\frac{P}{m_0-\dot{m}t}\sin\gamma=>\max. \qquad (14)$$

Откуда следует, что единичный вектор тяги $\overline{P}^0=(\cos\gamma,\sin\gamma)$, должен быть ориентирован вдоль базис-вектора $\psi_V(\psi_{Vx},\psi_{Vy})$, т.е. угол между ними должен быть нулевой:

$$\cos\gamma=\frac{\psi_{Vx}}{\sqrt{\psi_{Vx}{}^2+\psi_{Vy}{}^2}};\sin\gamma=\frac{\psi_{Vy}}{\sqrt{\psi_{Vx}{}^2+\psi_{Vy}{}^2}};\tan\gamma=\frac{\psi_{Vy}}{\psi_{Vx}}. \qquad (15)$$

Для оптимального управления часть гамильтониана, зависящая от управления:

$$\frac{P}{m}(\psi_{Vx}\cos(\gamma)+\psi_{Vy}\sin(\gamma))=\sqrt{\psi_{Vx}{}^2+\psi_{Vy}{}^2}\frac{P}{m}=\xi\frac{P}{m},\ где\ \xi=\sqrt{\psi_{Vx}{}^2+\psi_{Vy}{}^2}. \qquad (16)$$

Тогда $H(\gamma_{opt})=(\overline{\psi}_{\overline{r}},\overline{V})+(\overline{\psi}_{\overline{V}},\overline{g})+\frac{P}{m(t)}\xi.$ (17)

IV.Начальные условия оптимальности определяются варьируемыми параметрами управления $\gamma_0,\dot{\gamma}_0$:

$$\begin{aligned}
&\psi_{X0}=\frac{(\dot{\gamma}_0+\frac{V_0}{r_0}\cos^2\gamma_0)}{\sin\gamma_0},\\
&\psi_{Y0}=\frac{V_0}{r_0}\cos\gamma_0,\\
&\psi_{Vx0}=\cos\gamma_0,\\
&\psi_{Vy0}=\sin\gamma_0.
\end{aligned} \qquad (18)$$

В качестве начального приближения взяты $\gamma_0,\dot{\gamma}_0$ из двухпараметрического решения. Далее они меняются.

V. Конечные условия оптимальности

$$\begin{aligned}
&y_1=\frac{V_{yf}\psi_{Vxf}-V_{xf}\psi_{Vyf}}{\xi_f V_f}=0,\\
&y_2=\psi_{rf}-\frac{\xi_f\mu}{V_f r_f^2}=0,\\
&y_3=H(\gamma_{opt})=\psi_{Xf}V_{Xf}+\psi_{Yf}V_{yf}-(\psi_{Vxf}x_f+\psi_{Vyf}y_f)\frac{\mu_E}{r_f^3}+\frac{P}{m_f}\sqrt{\psi_{Vxf}{}^2+\psi_{Vyf}{}^2}>0,\\
&y_4=\psi_{rf}=\frac{\psi_{xf}x_f+\psi_{yf}y_f}{r_f}>0,
\end{aligned} \qquad (19)$$

Условие $y_1=0$ соответствует нулевому углу атаки в конце разгона в соответствии с [1].

Варьируя γ_0 и $\dot{\gamma}_0$, решаем краевую задачу, добиваясь выполнения условий (19) с

точностью $\varepsilon = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, меньшей 10^{-6}, при этом следим за выполнением условий y_3 и y_4. Метод показал хорошую сходимость (4 итерации).

Таблица 3.а

Характеристики оптимального управления по ПМП. Вариант №1

Параметр управления	γ
Закон управления	$\gamma(t) = 97.145967^0 + 0.04773t$
t_f, с	666.243541
r_f, км	7050.462668
m_f, кг	2466.806425
ΔV_X , м/с	3164.210
$\Delta V_{имп}$, м/с	3129.245
$\delta V_{гр}$, м/с	34.965

Результаты:

Число итераций k=4, и время расчета решения в пакете прикладных программ Matlab 7.11.0 на PC MSI E6603 t= 6.715324 с.

Погрешности конечных условий

Δy_1= 8.97120115397124e-12;

Δy_2=-3.264641161571102e-14;

y_3= 0.00830154046795220>0

y_4= 0.000777491955184050>0.

Запишем начальные величины для сопряженных переменных после итераций:

Ψ_x^0=0.000857824726675485;

Ψ_y^0= -0.000145543776488376;

Ψv_x^0-0.124397560777521;

Ψv_y^0= 0.992232456066926.

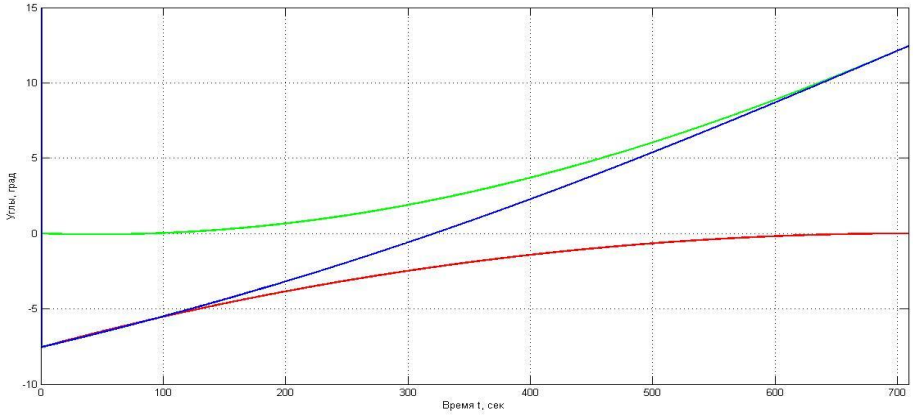

Рис.6. Зависимости углов:
1. красный цвет – α(t) – угол атаки;
2.зелёный цвет – Θ(t) – угол наклона вектора скорости к горизонту;
3.синий цвет – φ(t) – угол между вектором тяги $\bar{P}$ и трансверсалью.

На рис.6 видно, что в конце разгона $\alpha_f = 0$ угол атаки равен нулю.

Проверим область сходимости задачи. Для начального приближения γ_0, $\dot{\gamma}_0$ в (18) выберем $\gamma_0 = 90$ град, $\dot{\gamma}_0 = 0$ град/с. Получено, что процесс решения задачи сходится до ошибки $\varepsilon = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ <10^{-6} за 6 итераций.

Таблица 3.б.

Характеристики оптимального управления по ПМП. Вариант №1

Параметр управления	γ
Закон управления	$\gamma(t) = 97.139787^0 + 0.04773t$
t_f, с	666.344912
r_f, км	7050.857243
m_f, кг	2466.706425
ΔV_X, м/с	3164.340
$\Delta V_{имп}$, м/с	3129.245
$\delta V_{гр}$, м/с	35.095

Результаты:

Число итераций k=6, и время расчета решения в пакете прикладных программ Matlab 7.11.0 на PC MSI E6603 CPU: Intel(R) Core™ i5-460M t= 12.202017 с.

Погрешности конечных условий:

Δy_1=-7.24007183650915e-10;
Δy_2 =2.40602297200271e-12;
y3=0.00830122061652527 >0;
y_4=0.000777566228049459>0.

Результаты итераций совпадают с конечными условиями. Запишем начальные величины для сопряженных переменных после итераций:

$\Psi_x{}^0$=0.000857944665738353;
$\Psi_y{}^0$= -0.000145418570391434;
$\Psi v_x{}^0$=-0.124290546012411;
$\Psi v_y{}^0$=0.992245866795089.

Решение задачи с использованием РН «Протон» и РБ типа «Бриз-М». Вариант №2.

I. Постановка задачи.

1. Уравления движения КА в полярной системе координат

$$\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = V_r, \\
&\frac{du}{dt} = \frac{V_t}{r}, \\
&\frac{dV_r}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{V_t^2}{r} + \frac{P}{m_0 - \dot{m}t}\sin\varphi, \\
&\frac{dV_t}{dt} = -\frac{V_r V_t}{r} + \frac{P}{m_0 - \dot{m}t}\cos\varphi,
\end{aligned} \tag{20}$$

2. Начальные условия

$$\begin{aligned}
&r_0 = 6628.136\ км, && u_0 = 0, \\
&V_r = 0, && V_t = 7.759024038\ км/с, \\
&\dot{m} = \frac{T}{W_e} = 0.6253\ {}^{кг}\!/_{с}, && \mathrm{P} = 20000\ H, \\
&m = m_0 = 6475\ кг, && W_e = 3218.6\ {}^{м}\!/_{с}.
\end{aligned} \tag{21}$$

3. Конечное условие

Как условие, соответствующее достижению заданной большой полуоси a_f=220000 км и конечной энергии h_f:

$$h_f = -\frac{\mu}{a} = V_f^2 - \frac{2\mu}{r_f} = V_{xf}^2 + V_{yf}^2 - \frac{2\mu}{r_f}. \tag{22}$$

4. Управление

Тяга $P = P_{уд} g\dot{m} = W\beta = const, W = P_{уд} g$ *– скорость истечения газов из сопла РБ,* $\dot{m} = \beta$ *– массовый расход.*

Угол ориентации тяги φ – произвольный, подлежит оптимизации.

5. Функционал. Минимизируется время в конечный момент разгона, когда достигается требуемое значение большой полуоси орбиты перелёта к Луне:

$$t_f \Rightarrow \min . \tag{23}$$

II. Сопряжённые переменные величины

В соответствии с системой фазовых координат $x = [r, u, V_r, V_t]^T = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]$ сопряженные переменные $\lambda = [\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4]$.

Запишем гамильтониан системы:

$$H = \lambda_1 x_3 + \lambda_2 \frac{x_4}{x_1} + \lambda_3 (-\frac{\mu_E}{x_1^2} + \frac{x_4^2}{x_1} + \frac{P}{m_0 - \dot{m}t} \sin\varphi) + \lambda_4 (-\frac{x_3 x_4}{x_1} + \frac{P}{m_0 - \dot{m}t} \cos\varphi). \tag{24}$$

Оптимальное управление $\gamma_{opt}(t)$ максимизирует гамильтониан $H(\lambda, x, \varphi, t)$ по $\varphi(t)$.

Дифференциальные уравнения для $\psi(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\left[\lambda_2 \left(-\frac{x_4}{x_1^2}\right) + \lambda_3 \left(2\frac{\mu}{x_1^3} - \frac{x_4^2}{x_1^2}\right) + \lambda_4 \left(\frac{x_3 x_4}{x_1^2}\right)\right], \\ \dot{\lambda}_2 = 0, \\ \dot{\lambda}_3 = -\left[\lambda_1 + \lambda_4 \left(-\frac{x_4}{x_1}\right)\right], \\ \dot{\lambda}_4 = -\left[\lambda_2 \frac{1}{x_1} + \lambda_3 \frac{2x_4}{x_1} + \lambda_4 \left(-\frac{x_3}{x_1}\right)\right]. \end{cases} \tag{25}$$

III. Оптимальное управление

Оптимальное управление $\gamma_{opt}(t)$ максимизирует гамильтониан $H(\lambda, x, \varphi, t)$ по $\varphi(t)$.

$$\lambda_3 \frac{P}{m_0 - \dot{m}t} \cos\varphi + \lambda_4 \frac{P}{m_0 - \dot{m}t} \sin\varphi \Rightarrow \max . \tag{26}$$

Откуда следует, что единичный вектор тяги $\overline{P}^0 = (\cos(\gamma), \sin(\gamma))$, должен быть ориентирован вдоль базис-вектора $\psi_V(\lambda_3, \lambda_4)$, т.е. угол между ними должен быть нулевой.

$$\cos\varphi = \frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}; \sin\varphi = \frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}; \tan\varphi = \frac{\lambda_4}{\lambda_3}. \tag{27}$$

Для оптимального управления часть гамильтониана, зависящая от управления:

$$\frac{P}{m}(\lambda_3\cos\varphi+\lambda_4\sin\varphi)=\sqrt{\lambda_3{}^2+\lambda_4{}^2}\,\frac{P}{m}=\xi\frac{P}{m}. \qquad (28)$$

Тогда $H(\varphi_{opt})=(\overline{\psi}_{\bar{r}},\bar{V})+(\overline{\psi}_{\bar{V}},\bar{g})+\frac{P}{m(t)}\xi.$ (29)

IV. Начальные условия оптимальности определяются варьируемыми параметрами управления $\varphi_0,\dot{\varphi}_0$:

$$\lambda_1^0=\frac{\left(\frac{x_4^0}{x_1^0}\sin^2(\varphi_0)+\frac{x_4^0}{x_1^0}-\dot{\varphi}_0\right)}{\cos(\varphi_0)},\quad \lambda_2^0=0, \qquad (30)$$

$$\lambda_3^0=\sin(\varphi_0),\qquad \lambda_4^0=\cos(\varphi_0).$$

Для первой итерации φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ взяты из двухпараметрической задачи:
$\varphi_0=-8.402659$ град, $\dot{\varphi}_0=0.029874$ град/с

Конечные условия оптимальности

$$y_1=\frac{\lambda_3x_4-\lambda_4x_3}{\xi_f\sqrt{x_3^2+x_4^2}_f}=0,$$

$$y_2=\frac{\lambda_4-\frac{x_4}{\mu}x_1^2\lambda}{\xi}_f=0, \qquad (31)$$

$$y_3=H(\gamma_{optf})>0,$$

$$y_4=\lambda_1^f>0,$$

Первое условие соответствует нулевому углу атаки в конце разгона.

Варьируя φ_0 и $\dot{\varphi}_0$, решаем краевую задачу, добиваясь выполнения условий y_1 и y_2 с точностью $\varepsilon=\sqrt{y_1^2+y_2^2}$, меньшей 10^{-5} и следим за выполнением условий y_3 и y_4. Метод показал хорошую сходимость (3 итерации).

Таблица 3.в. Характеристики оптимального управления по ПМП. Вариант №2.

Параметр управления φ_0	-6.997702^0
Параметр управления $\dot{\varphi}$	0.0193191
t_f, с	652.450138
r_f, км	7050.462668
m_f, кг	2420.751953
ΔV_X, м/с	3166.685
$\Delta V_{имп}$, м/с	3129.245
$\delta V_{гр}$, м/с	37.44

Результаты:

Число итераций $k=4$, и время расчета решения в пакете прикладных программ Matlab 7.11.0 на PC lenovo G480 CPU: Intel(R) Core™ i5-3210M $t=4.673764$с.

Погрешности конечных условий

Δy_1=6.161149649093695e-06;
Δy_2=7.643601324703674e-06;
y_3=0.008444863166993>0
y_4=7.808802375195393e-04>0.

Результаты итераций совпадают с конечными условиями. Запишем начальные величины для сопряженных переменных после итераций:

λ_1^0=0.000857824726675485;
λ_2^0= -0.000145543776488376;
λ_3^0=-0.124397560777521;
λ_4^0= 0.992232456066926.

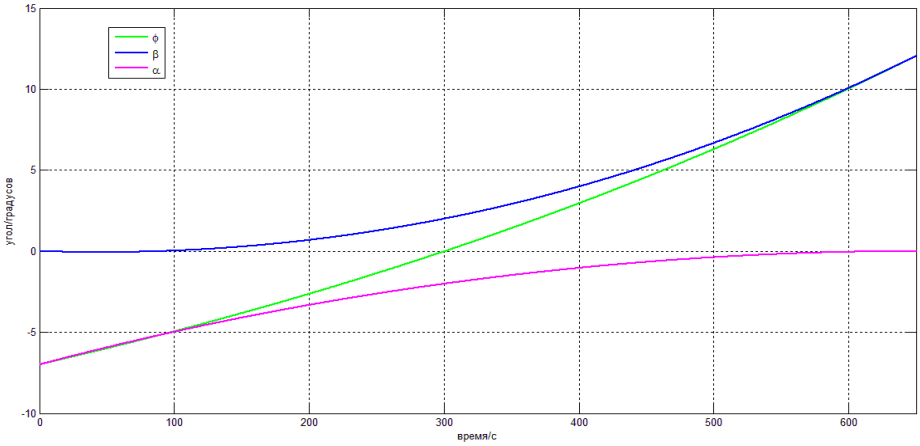

Рис. 7. Зависимости углов:
1.фиолетовый цвет – α(t) – угол атаки;
2.синий цвет – Θ(t) – угол наклона вектора скорости к горизонту;
3.зелёный цвет–φ(t) – угол между вектором тяги $\bar{P}$ и трансверсалью.

На рис.7 видно, что в конце разгона $\alpha_f = 0$ угол атаки равен нулю.

Выводы

1. Поиск оптимального закона методом перебора требует больших затрат времени (несколько часов), зато найденные с его помощью законы управления могут служить хорошими начальными приближениями для поиска оптимальных значений законов управления с помощью квазиньютоновских методов или принципа максимума Понтрягина.

2. Квазиньютоновские методы намного быстрее выполняют поиск оптимальных значений закона управления, время работы алгоритма, основанного на методе Пауэлла, в зависимости от закона управления составило от 75 до 320 секунд, но их сходимость определяется корретностью подбора начального приближения.

3. Метод перебора и квазиньютоновский метод Пауэлла для разных вариантов начальных данных (соответвующих конкретным технических изделиям) показали, что наиболее оптимальным по критерию минимального времени разгона или максимальной конечной массы является закон управления по углу $\gamma(t)$.

4. На третьем этапе анализ проводился с применением принципа максимума Понтрягина. По результатам его выполнения можно сделать вывод о корректной и быстрой сходимости задачи оптимизации активного участка разгона.

5. Принцип максимума, обладая большей областью сходимости и меньшим временем расчёта (время работы 4-13 секунд), даёт лишь небольшой выигрыш в конечной массе разгона по сравнению с квазиньютоновским методом Пауэлла.

6. Метод может быть обобщён на задачу торможения при переходе на орбиту искусственного спутника Луны.

Список литературы

1. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. М.:Мир, 1966, 152с.
2. Д. Е. Охоцимский, Т. М. Энеев. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. Журнал Успехи физических наук, том 63, № 1а, 1957, с. 33-50.
3. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1975, 392 с.
4. Машиностроение. Энциклопедия. Том IV-22. Ракетно-космическая техника. Книга 1. М.:Машиностроение, 2012, 925с.

5. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001, – 440 с.
6. "Line Search Methods". *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. 2006. pp. 30–32. doi:10.1007/978-0-387-40065-5_3. ISBN 978-0-387-30303-1.edit