

УДК 004.421.2

БИБЛИОТЕКА КЛАССОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МНОГОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

*Малеванный Г.Г., студент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Система обработки информации и управление»*

*Научный руководитель: Белоусова В.И., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
bauman@bmstu.ru*

При выполнении научно-исследовательской работы, при обработке результатов наблюдений или экспериментов часто возникает задача вычисления результирующих показателей на основе набора известных. Для большей точности результатов во многих случаях необходимо использовать сложное многопараметрическое уравнение. Однако, при решении конкретных практических задач допустимо получение приближенных результатов. Если вычисления выполняются на основе монотонной линейной функции, то для упрощения вычислений можно применить аппроксимацию.

Аппроксимация позволяет получить упрощенным методом неизвестные значения монотонной линейной функции, если известны некоторые значения аргументов и соответствующие им значения функции. На данный момент отсутствует универсальная программная система для реализации подобного метода. Для создания универсальной программной библиотеки с малыми затратами ресурсов и реализуется данная система.

Необходимо разработать алгоритм линейной аппроксимации монотонной функции от нескольких переменных:

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

, где X_i – аргументы функции.

«Аппроксимация, или приближение — научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным, но более простыми. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны)» [3].

Существует несколько видов линейной аппроксимации:

- «Полиномиальная аппроксимация - позволяет аппроксимировать непрерывную функцию в некотором интервале полиномом достаточно высокого порядка. Точность полиномиальной аппроксимации падает с увеличением степени аппроксимирующих полиномов» [4].
- «Аппроксимация рациональными функциями - представляет аппроксимируемую функцию в виде отношения двух полиномов. Ряд функций, плохо аппроксимируемых полиномиальными методами, удаётся хорошо приблизить рациональной функцией с полиномом в числителе и знаменателе. Недостатком метода является то, что для любого набора точек существует аппроксимирующий полином, но не всегда можно построить аппроксимирующую рациональную функцию» [4].
- Аппроксимация сплайнами - это вид кусочно-полиномиальной аппроксимации, когда вся область, на которой задана функция, разбивается на несколько частей, и в пределах каждой части функция аппроксимируется полиномом. Недостатком метода является отсутствие общего выражения для всей кривой.
- Аппроксимация с использованием линейного метода наименьших квадратов (МНК) является наиболее часто используемым методом аппроксимации на практике. Рассмотрим данный метод подробнее.

«Пусть имеется задача поиска функции из класса алгебраических многочленов m - го порядка:

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (1)$$

такой, что сумма квадратов отклонений ее от табличной функции:

$$R(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^N [F(x_i) - F_i]^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m}$$

является минимальной.

Частные производные функции R при оптимальном выборе неизвестных коэффициентов многочлена должны обращаться в нуль:

$$\frac{\partial R}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=1}^N [a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - F_i] \cdot x_i^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Если обозначить через

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^k = \overline{x^k},$$

то из (2) с учетом (1) возникает система линейных алгебраических уравнений с симметрической матрицей коэффициентов:

Исходные данные для первого алгоритма

X_i	1	5	10	15
Y_i	0.3	0.45	0.6	0.75

Для визуального отображения процесса аппроксимации строим график, представленный на рис. 1.

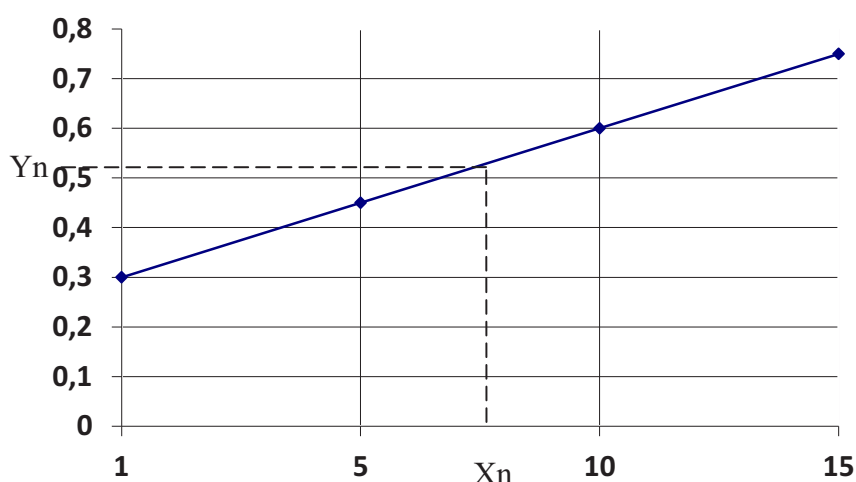


Рис. 1. Пример функции, соответствующей Таблице 1

Необходимо узнать значение функции в точке X_N . Данному аргументу соответствует значение функции Y_N . Для его нахождения выполняются следующие действия:

1. Происходит поиск в таблице исходных данных и выявляются:

X_1 — ближайший меньший аргумент от X_N и для него Y_1 ,

X_2 — ближайший больший аргумент от X_N и для него Y_2 .

2. Вычисляется результирующее значение по формуле:

$$Y_N = Y_1 + (Y_2 - Y_1) \cdot \frac{(X_N - X_1)}{(X_2 - X_1)} \quad (4)$$

При выполнении линейной аппроксимации по нескольким параметрам применяется более сложный алгоритм. В этом случае исходными данными является многомерная таблица или вложенная структура списков. Приведем пример для трех аргументов - $(X1_i, X2_i, X3_i, Y_i)$. Представим данные в Таблице 2. Предполагается, что для получения результата функции нужно указать три значения аргумента: $X1, X2, X3$.

Таблица 2

Исходные данные для второго алгоритма

$X1$	$X2 = 0$	$X2 = 30$	$X2 = 60$	$X2 = 90$	$X2 = 120$
	Y	Y	Y	Y	Y
$X3 = 20$					
0	1	1	1	1	1
10	0,957	0,964	0,995	0,996	0,990
20	0,987	0,988	0,989	0,984	0,982
$X3 = 40$					
0	1	1	1	1	1
10	0,996	0,998	0,995	0,990	0,985
20	0,984	0,982	0,985	0,972	0,964
$X3 = 60$					
0	1	1	1	1	1
10	0,994	0,991	0,994	0,975	0,960
20	0,976	0,979	0,978	0,950	0,923

Для нахождения неизвестного Y_N , соответствующего исходному аргументу, необходимо выполнить несколько аппроксимаций по каждому из исходных значений. Поясним принцип работы алгоритма на примере построения дерева аппроксимации. Узлом дерева является аппроксимированное значение, а дуги показывают исходные данные для аппроксимации.

Введенное значение $X3_N$ будет корнем дерева. По исходной таблице выявляются:
 $X3_1$ — ближайший меньший аргумент от $X3_N$,
 $X3_2$ — ближайший больший аргумент от $X3_N$.

Найденные значения будут составлять дочерние вершины для данной. Затем в выбранных разделах Таблицы 2 (по $X3_1$ и $X3_2$) для указанных $X2_N$ выбрать из таблицы:
 $X2_1$ — ближайший меньший аргумент от $X2_N$,
 $X2_2$ — ближайший больший аргумент от $X2_N$.

Найденные значения составят дочерние вершины для обеих вершин ($X3_1$ и $X3_2$) строящегося дерева. На следующем этапе в выбранных разделах Таблицы 2 (от

$(X3_1, X2_1), (X3_1, X2_2), (X3_2, X2_1), (X3_2, X2_2))$ для указанных $X1_N$ выбрать из таблицы:

$X1_1$ — ближайший меньший аргумент от $X1_N$,

$X1_2$ — ближайший больший аргумент от $X1_N$.

Полученные значения станут следующим уровнем дерева. Причем, каждому листовому элементу $X1_i$ будет соответствовать значение функции Y_i . Допустим, введены значения: $X1=5, X2=20, X3=50$. В результате получится дерево, представленное на рис. 2.

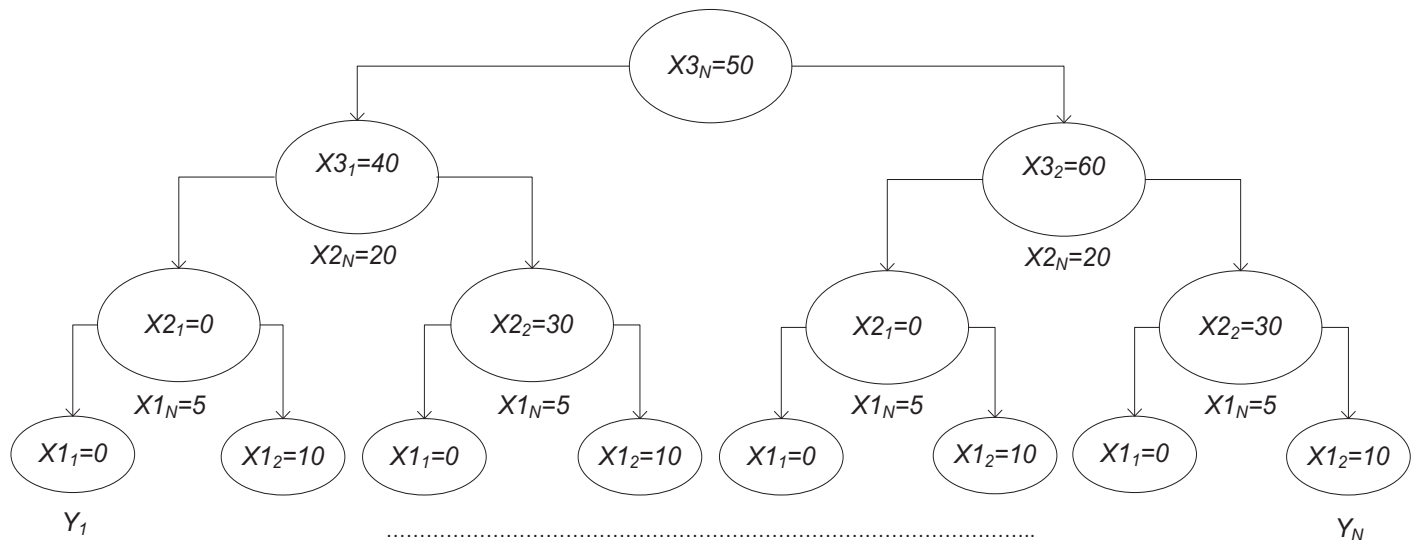


Рис. 2. Дерево алгоритма

Используя формулу (4) выполняем последовательность двумерных аппроксимаций по каждому измерению аргумента от листовых элементов ($X1_i$) к корню ($X3_i$) и в результате получаем Y_N . При этом исходными данными для аппроксимации более верхнего уровня являются аппроксимированные значения, полученные ранее. На самом нижнем уровне выполняется аппроксимация исходных данных.

Для реализации данных алгоритмов аппроксимации создана система классов, представленная на рис. 3. Для построения диаграммы использовался язык UML [1]. При разработке библиотеки использовался язык программирования C++ вместе с инструментарием разработки Qt.

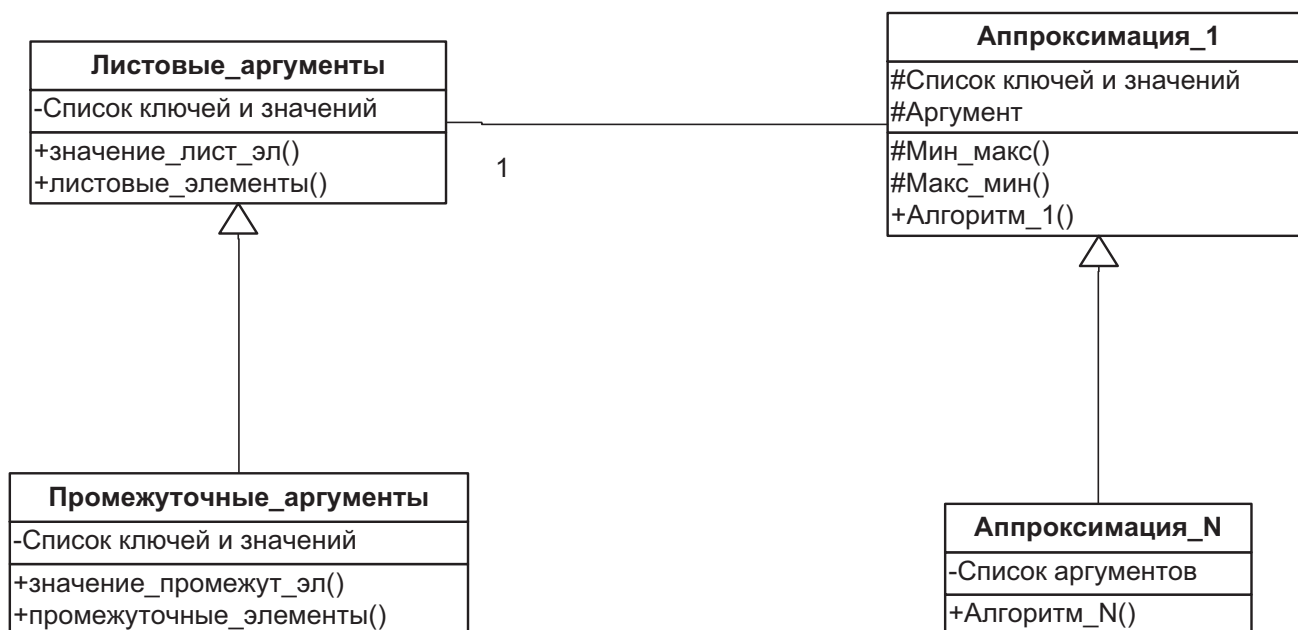


Рис. 3. Диаграмма классов

Рассмотрим более подробно систему классов:

1) Класс Список листовых аргументов (листовые_аргументы)

Данный класс хранит в себе ключи, которыми являются значения аргументов, и соответствующие им значения Y из листовых элементов дерева, изображенного на рис. 2.

При инициализации объекта класса создается массив со списком листовых аргументов X и соответствующим им значениями Y . У класса определены методы:

- получения значения по ключу (значение_лист_эл) – извлекает Y по указанному ключу (аргументу X),
- получения списка ключей (листовые_элементы) – возвращает множество всех значений аргумента X .

2) Класс Список промежуточных аргументов (промежуточные_аргументы)

Данный класс хранит в себе ключи и соответствующие им значения из корневого, а также промежуточных вершин дерева, представленного на рис. 2. Является наследником от класса Список листовых аргументов. При инициализации объекта класса на вход поступает указатель на базовый класс (Список листовых аргументов). Получается, что ключу соответствует не значение функции, а целый список значений. Вложенность может быть любого уровня.

Функция получения списка ключей аналогична функции базового класса.

Метод получения значений отличается от метода базового класса наличием списка аргументов (параметров аппроксимации), введенных пользователем. В зависимости от количества аргументов будет вызываться метод класса Аппроксимация по одному

параметру (если список аргументов равен 1) - первый алгоритм, рассмотренный выше, или метод класса Аппроксимация по нескольким параметрам (если список аргументов больше 1) - второй алгоритм.

3) Класс Аппроксимация по одному параметру (аппроксимация_1)

Данный класс реализует аппроксимацию, соответствующую первому алгоритму аппроксимации, представленному выше. Данному классу на вход поступает указатель на первый класс (Список листовых аргументов) и значение аргумента X , введенное пользователем, которое необходимо аппроксимировать. В данном классе реализовано три метода:

Макс_мин — поиск максимального меньшего значения для введенного пользователем аргумента.

Мин_макс — поиск минимально большего значения для введенного пользователем аргумента.

Алгоритм_1 — функция непосредственной аппроксимации, которая основывается на формуле (4) из первого алгоритма аппроксимации, приведенного выше.

4) Класс Аппроксимация по нескольким параметрам (аппроксимация_N)

Данный класс реализует более сложный алгоритм аппроксимации, который соответствует второму алгоритму поиска приближенного значения, представленному выше. Этот класс является наследником класса Аппроксимация по одному параметру. В отличие от базового класса, на вход данного класса поступает список аргументов, введенных пользователем (для примера выше — это X_{1N} , X_{2N} , X_{3N}), а не один аргумент.

Методы класса аналогичны методам базового класса за исключением метода Алгоритм_N. Данный метод реализует непосредственно аппроксимацию по первому из переданных параметров. При выполнении аппроксимации функция обращается к функции получения значений класса Списка промежуточных аргументов и передает ей параметры аппроксимации без первого (по которому в данный момент выполняется аппроксимация). Указанная функция, в свою очередь, вызывает аппроксимацию по полученным параметрам. Происходит рекурсия и данный метод вызывается повторно, но уже с другим набором аргументов. При этом исключается просмотренный элемент дерева, происходит движение вверх на один элемент по графу на рис. 2. Когда останется только один аргумент аппроксимации, рекурсия остановится и будет возвращено конкретное значение.

В результате проведенной работы была разработана система из четырех классов для реализации алгоритмов линейной аппроксимации по одному и нескольким параметрам. Данная система может быть представлена в виде отдельной библиотеки классов. Предполагается использование данной библиотеки при обработке результатов

экспериментов или расчета неизвестных значений монотонных функций, зависящих от нескольких параметров. Возможно применение данной библиотеки для широкого ряда информационных систем, в том числе использующихся в электронном университете [5]. Данная система довольно удобна, так как не зависит от предметной области и не требует большого количества оперативной памяти для хранения промежуточных результатов вычислений.

Список литературы

1. Рамбо Дж., Якобсон А., Буч Г. UML: специальный справочник. - СПб.: Питер, 2001. - 656 с.: ил.
2. Тынкевич М.А. Численные методы. - Кемерово: КузГТУ. 1997. - 122 с..
3. Бойко Е. Аппроксимация // Википедия. 2012. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BF%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%BA%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F> (дата обращения 15.02.2013, дата публикации 11.01.2012г.)
4. Аппроксимация линейным и нелинейным МНК // Кросс-платформенная библиотека численного анализа ALGLIB 2013. URL: <http://alglib.sources.ru/interpolation/leastquares.php> (дата обращения 17.02.2013г.)
5. Агеева Т.И., Балдин А.В., Барышников В.А. и др. [Под ред. Федорова И.Б., Черненького В.М.]. Информационная управляющая система МГТУ им. Н.Э. Баумана "Электронный университет": концепция и реализация. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. – 2009 г. - 376 с.