

## Метод решения задачи оптимизации структуры дисперсно-армированных композитов при ограничениях на тепловые и прочностные свойства

# 11, ноябрь 2013

DOI: 10.7463/1113.0621065

Димитриенко Ю. И., Дроголюб А. Н., Соколов А. П., Шпакова Ю. В.  
УДК 539.3

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

[dimit.bmstu@gmail.com](mailto:dimit.bmstu@gmail.com)

[adrogolub@gmail.com](mailto:adrogolub@gmail.com)

[alsokolo@bmstu.ru](mailto:alsokolo@bmstu.ru)

[ayulya@yandex.ru](mailto:ayulya@yandex.ru)

**Введение.** Полимерные композиционные материалы находят широкое применение при создании тепловой защиты аэрокосмических летательных аппаратов и возвращаемых аппаратов. При проектировании теплозащитных материалов к ним предъявляется комплекс требований: обладания относительно высокими теплопрочностными свойствами, пониженной теплопроводностью, пониженной плотностью и другими. В [1] был предложен аналитический подход к проектированию оптимальной микроструктуры теплозащитных композитов для обеспечения выполнения комплекса требуемых эксплуатационных характеристик материалов. В данной работе предложено развитие этого метода с учетом более детального рассмотрения микронапряжений и тепловых полей в композитах, и с применением метода конечного элемента для решения локальных задач для расчета микрохарактеристик композитов, возникающих при использовании метода асимптотического осреднения композитов с периодической структурой [2-7].

**Постановка задачи оптимального проектирования композиционного материала.** Рассмотрим композиционный материал, состоящий из изотропной матрицы и  $N-1$  изотропного наполнителя со следующими характеристиками:  $\rho^\alpha$  – плотность;  $E^\alpha$  – модуль Юнга;  $\nu^\alpha$  – коэффициент Пуассона;  $G^\alpha$  – модуль сдвига;  $\sigma_i^\alpha, \sigma_c^\alpha, \sigma_s^\alpha$  – пределы прочности при растяжении, сжатии и сдвиге, соответственно;  $\lambda^\alpha$  – коэффициент теплопроводности. Здесь индекс  $\alpha = \overline{1, N-1}$  соответствует наполнителю с номером  $\alpha$ , а

индекс  $\alpha=N$  соответствует матрице. Объемные концентрации компонент обозначим  $\varphi_\alpha$ , для них выполняется очевидное соотношение:  $\sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha = 1$ .

Введем обозначения для эффективных характеристик композиционного материала:  $\bar{\rho}$  – плотность;  $\bar{C}_{ijkl}$  – компоненты тензора эффективных модулей упругости;  $\bar{\sigma}_{iT}, \bar{\sigma}_{iC}$  – эффективные пределы прочности композита при одноосных растяжениях и сжатиях вдоль трех ортогональных осей, соответственно;  $\bar{\lambda}_{ij}$  – компоненты эффективного тензора теплопроводности. Все эти эффективные характеристики зависят от объемных концентраций компонентов, а также от их геометрической формы. Будем далее полагать, что геометрическая форма может быть параметризована только с помощью одного числового параметра. Это допущение является достаточно сильным, ему удовлетворяет ограниченное число геометрических форм армирующих компонентов композитов, например, дисперсные частицы с шаровой формой, частицы в виде микросфер с постоянной толщиной стенок микросфер, цилиндрические волокна и некоторые другие типы, в которых меняется только один геометрический параметр. Тогда для такого типа однопараметрических композитов их эффективные характеристики могут быть представлены как функции только концентраций компонентов:

$$\bar{\rho}(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \varphi_\alpha ; \quad \bar{C}_{ijkl}(\varphi_1 \dots \varphi_N) ; \quad \bar{\lambda}_{ij}(\varphi_1 \dots \varphi_N) ; \quad \bar{\sigma}_{iT}(\varphi_1, \dots, \varphi_N) ; \quad \bar{\sigma}_{iC}(\varphi_1 \dots \varphi_N). \quad (1)$$

Аналитическое выражение для функций (1) при любых структурах армирования возможно только для плотности (линейная функция), для остальных функций эти зависимости имеют сложный нелинейный вид, аналитически они могут быть вычислены только приближенно ([2]), или для очень простых микроструктур, например, слоистых ([1]). Методика численного конечно-элементного вычисления функций (1) представлена в следующих разделах статьи.

Зададим ограничения на эффективные характеристики композита:

$$\bar{\lambda}_{ii} \leq \hat{\lambda}_i, \quad \bar{\sigma}_{iT} \geq \hat{\sigma}_{iT}, \quad \bar{\sigma}_{iC} \geq \hat{\sigma}_{iC}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (2)$$

где  $\hat{\lambda}_i, \hat{\sigma}_{iT}, \hat{\sigma}_{iC}$  – некоторые числовые константы – ограничения, задаваемые проектировщиком композиционного материала.

Задачей оптимального проектирования микроструктуры композита будем называть задачу минимизации плотности композита

$$\bar{\rho}(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \varphi_\alpha \rightarrow \min \quad (3)$$

при выполнении ограничений (2). Задача (3) с ограничениями (2) представляет собой задачу поиска минимума линейной функции в условиях нелинейных ограничений.

**Методика решения вспомогательной задачи расчета эффективных характеристик композита.** Для нахождения функций  $\bar{C}_{ijkl}(\varphi_1 \dots \varphi_N)$  и  $\bar{\lambda}_{ij}(\varphi_1 \dots \varphi_N)$  - эффективных характеристик упругости и теплопроводности композита применим метод асимптотического осреднения [5-12], согласно которому для нахождения этих функций необходимо решить специальные краевые трехмерные задачи теории упругости и теории теплопроводности на 1/8 части ячейки периодичности композита. Эти задачи называются локальными задачами  $L_{pq}$  и  $L_q$ , соответственно.

В соответствии с [7] локальные задачи  $L_{pq}$  теории упругости имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{ij(pq)/j}^\alpha = 0 \text{ в } V_\alpha, \\ \sigma_{ij(pq)}^\alpha = C_{ijkl}^\alpha \varepsilon_{kl(pq)}^\alpha \text{ в } V_\alpha \cup \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_s \cup \Sigma'_s \\ \varepsilon_{ij(pq)}^\alpha = \frac{1}{2} (U_{i(pq)/j}^\alpha + U_{j(pq)/i}^\alpha) \text{ в } V_\alpha \cup \Sigma_{\alpha N} \cup \Sigma_s \cup \Sigma'_s \\ U_{i(pq)}^\alpha = U_{i(pq)}^N \text{ на } \Sigma_{\alpha N} \\ (\sigma_{ij(pq)}^\alpha - \sigma_{ij(pq)}^N) n_j = 0 \text{ на } \Sigma_{\alpha N}, \quad \alpha = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\Sigma_{\alpha N}$  – поверхности контакта компонентов композита;  $\Sigma_s$  – координатные плоскости,  $\Sigma_s = \{\xi_s : \xi_s = 0\}$ ;  $\Sigma'_s = \{\xi_s : \xi_s = 1/2\}$  – торцевые поверхности ячейки периодичности, имеющей форму единичного куба,  $s=1,2,3$ ;  $\xi_s$  - безразмерные координаты, изменяющиеся в единичном кубе (локальные координаты),  $U_{i(pq)}^\alpha$ ,  $\sigma_{ij(pq)}^\alpha$ ,  $\varepsilon_{ij(pq)}^\alpha$  – перемещения, напряжения (микронапряжения) и деформации в компонентах композита  $V_\alpha$ ,  $C_{ijkl}^\alpha$  – тензоры модулей упругости компонентов, вычисляемые через упругие константы  $E^\alpha$ ,  $\nu^\alpha$ ,  $G^\alpha$  изотропных компонентов стандартным образом [13],  $_{/j}$  – производная по локальной координате  $\xi_j$ ,  $n_j$  - компоненты вектора нормали. Функции  $U_{i(pq)}^\alpha$  удовлетворяют следующим граничным условиям на  $\Sigma'_s$ :

$$\begin{cases} U_{i(pq)}^\alpha = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, U_{j(pq)/i}^\alpha = 0, U_{k(pq)/i}^\alpha = 0, \xi \in \Sigma'_i, i \neq j \neq k \neq i \text{ при } p = q \\ U_{i(pq)}^\alpha = \frac{1}{4} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, U_{j(pq)/j}^\alpha = 0, U_{k(pq)}^\alpha = 0, \xi \in \Sigma'_j, \text{ при } i, j = \{p, q\}, p \neq q \\ U_{i(pq)}^\alpha = \frac{1}{4} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}, U_{j(pq)/k}^\alpha = 0, U_{k(pq)}^\alpha = 0, \xi \in \Sigma'_k, i \neq j \neq k \neq i \text{ при } i, j \neq \{p, q\}, p \neq q, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\bar{\varepsilon}_{pq}$  – заданные средние деформации (макродеформации) композита.

Локальная задача  $L_p$  теории теплопроводности имеет вид:

$$\begin{cases} q_{i(p)/i} = 0 \text{ в } V_\alpha, \\ q_{i(p)} = -\lambda_{ij}^\alpha g_{j(p)} \text{ в } V_\alpha, \\ g_{i(p)} = \theta_{(p)/i}^\alpha \text{ в } V_\alpha, \\ \theta_{(p)}^\alpha = \theta_{(p)}^N, \quad (q_{i(p)}^\alpha - q_{i(p)}^N) n_i = 0 \text{ на } \Sigma_{\alpha N}, \quad \alpha = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, 3}, \end{cases}, \quad (6)$$

где  $q_{i(p)}$  – компоненты вектора теплового потока,  $g_{j(p)}$  – компоненты вектора градиента температуры,  $\theta_{(p)}^\alpha$  – температура. Граничные условия для задачи  $L_p$  теории теплопроводности имеют вид:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \bar{g}_p \text{ на } \Sigma'_p, & \theta_{,p} &= 0 \text{ на } \Sigma_p, \\ \theta_{,i} &= 0 \text{ на } \Sigma'_i, \Sigma_i, & p &= \overline{1, 3}; \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (7)$$

$\bar{g}_p$  – заданные компоненты осредненного вектора градиента температуры.

Локальные задачи (4),(5) и (6),(7) для каждого значения  $p, q = \{1, 2, 3\}$  решаем методом конечного элемента [7], в результате решения этих задач вычисляем поля микронапряжений  $\sigma_{ij(pq)}^\alpha$  и тепловых микропотоков  $q_{i(p)}^\alpha$  для всей 1/8 ячейки периодичности  $V = \bigcup_{\alpha=1}^N V_\alpha$ . С помощью этих полей вычисляем эффективные характеристики композита по формулам:

$$\bar{C}_{ijpq} = \frac{1}{\mathcal{E}_{pq}} \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_\alpha} \sigma_{ij(pq)}^\alpha dV, \quad \bar{\lambda}_{pq} = -\frac{1}{g_q} \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_\alpha} q_{p(q)}^\alpha dV, \quad (8)$$

Осуществляя описанным выше методом решение локальных задач  $L_{pq}$  и  $L_p$  при различных значениях концентраций компонентов  $\varphi_\alpha$ , с помощью формул (8) находим искомые функции (1) – зависимости эффективных характеристик композита от концентраций  $\varphi_\alpha$  его структурных компонентов.

**Методика расчета эффективных констант прочности композита.** Для вычисления пределов прочности  $\bar{\sigma}_{iT}$  и  $\bar{\sigma}_{iC}$  композита используем следующую методику, предложенную в [8]. Вычислим поля компонент тензоров концентрации напряжений  $B_{ijkl}(\xi_s)$  в компонентах композита, которые связывают микронапряжения со средними напряжениями

$$\sigma_{ij}^\alpha(\xi_s) = B_{ijkl}^\alpha(\xi_s) \bar{\sigma}_{kl}, \quad (9)$$

где  $\sigma_{ij}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \sigma_{ij(pq)}^\alpha$ . Компоненты этих тензоров вычисляются по формулам:

$$B_{ijkl}^\alpha(\xi_s) = \tilde{C}_{ijpq}^\alpha(\xi_s) \bar{\Pi}_{pqkl}, \quad (10)$$

где  $\overline{\Pi}_{pqkl}$  – компоненты тензора эффективных упругих податливостей композита, обратного к эффективному тензору модулей упругости  $\overline{C}_{ijpq}$  (8), а поля компонент тензоров  $\tilde{C}_{ijpq}^\alpha(\xi_s)$  - локальных модулей упругости, вычисляются с помощью соотношения

$$\tilde{C}_{ijpq}^\alpha(\xi_s) = \frac{\sigma_{ij(pq)}^\alpha(\xi_s)}{\varepsilon_{pq}}. \quad (11)$$

В [8] был предложен метод расчета первичного разрушения композитов на основе критериев прочности Малмейстера-Ву, а в [14] был исследован критерий прочности Писаренко-Лебедева [15]. В данной работе использован критерий прочности Малмейстера-Ву, согласно которому будем считать, что происходит разрушение в некоторой точке материала, принадлежащей компоненте  $\alpha$ , если выполняется критерий прочности (условие разрушения)

$$f(\sigma_{ij}^\alpha(\xi_s^*)) = B_1^\alpha \sigma^\alpha(\xi_s^*) + B_2^\alpha (\sigma^\alpha(\xi_s^*))^2 + B_3^\alpha (\sigma_u^\alpha(\xi_s^*))^2 \geq 1, \quad (12)$$

здесь обозначены  $\sigma^\alpha$  - среднее напряжение и  $\sigma_u^\alpha$  - интенсивность напряжений

$$\sigma^\alpha = \sigma_{11}^\alpha + \sigma_{22}^\alpha + \sigma_{33}^\alpha, \quad (13)$$

$$\sigma_u^{\alpha 2} = \frac{1}{2} \left( (\sigma_{11}^\alpha - \sigma_{22}^\alpha)^2 + (\sigma_{11}^\alpha - \sigma_{33}^\alpha)^2 + (\sigma_{22}^\alpha - \sigma_{33}^\alpha)^2 + 6(\sigma_{12}^{\alpha 2} + \sigma_{13}^{\alpha 2} + \sigma_{23}^{\alpha 2}) \right),$$

а  $B_i^\alpha$  - параметры прочности материала компоненты  $\alpha$ , определяемые по формулам

$$B_1^\alpha = \frac{\sigma_c^\alpha - \sigma_T^\alpha}{\sigma_T^\alpha \sigma_c^\alpha}, \quad B_2^\alpha = \frac{1}{\sigma_T^\alpha \sigma_c^\alpha} - \frac{1}{3\sigma_s^{\alpha 2}}, \quad B_3^\alpha = \frac{1}{3\sigma_s^{\alpha 2}} \quad \alpha = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Рассмотрим процесс простого (пропорционального) нагружения в 6-ти мерном пространстве макронапряжений  $\overline{\sigma}_{ij}$ , при котором компоненты макронапряжений изменяются пропорционально одному параметру  $\chi$ , т.е.  $\overline{\sigma}_{ij} = \overline{\sigma}_{ij}^0 \chi$ . Если осуществляется одноосное нагружение, то среди компонент тензора  $\overline{\sigma}_{ij}^0$  имеется только одна ненулевая компонента  $\overline{\sigma}_{\beta\gamma}^0$ , т.е.  $\overline{\sigma}_{ij}^0 = \frac{1}{2} (\delta_{i\beta} \delta_{j\gamma} + \delta_{j\beta} \delta_{i\gamma}) \overline{\sigma}_{\beta\gamma}^0$ . Будем называть точку  $\xi_\chi^*$  ячейки периодичности композита точкой первоначального разрушения, а напряжение  $\overline{\sigma}_{\beta\gamma}^* = \chi^* \overline{\sigma}_{\beta\gamma}^0$  - первоначальным пределом прочности композита при нагружении по направлению  $\overline{\sigma}_{\beta\gamma}^0$  в 6-ти мерном пространстве, если для некоторого значения  $\chi^* > 0$  выполняется условие

$$f(B_{ijkl}^\alpha(\xi_s^*) \overline{\sigma}_{kl}^*) \geq 1, \quad (15)$$

а для значений  $\chi < \chi^*$  выполняются условия  $f(B_{ijkl}^\alpha(\xi_s)\bar{\sigma}_{kl}^*) < 1$  для всех значений  $\xi_s \in V$ . Определение (15) дает конструктивный способ нахождения первоначального предела прочности. Для этого необходимо решить задачи  $L_{pq}$  теории упругости, в соответствии с формулами (8)-(9) вычислить тензор концентрации напряжений, задать малое начальное значение параметра нагружения  $\chi$ , и последовательно увеличивать его, пока при некотором его значении  $\chi^*$  в некоторой точке ячейки периодичности композита не будет выполнен критерий (15).

Для определения пределов не первоначального, а полного разрушения композита, будем использовать следующий алгоритм. Назовем трещиной непрерывную область композита, во всех точках которой выполняется критерий (15), а полным разрушением композита в целом будем называть ситуацию, когда существует по крайней мере одна трещина, соединяющая противоположные грани ячейки периодичности. Минимальное значение напряжения  $\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^{**} = \chi^{**}\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^0$ , приводящее к полному разрушению ячейки периодичности, будем называть эффективным пределом прочности композита при нагружении по лучу  $\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^0$ .

Алгоритм расчета пределов прочности композита был следующим.

1) Выбираем произвольные значения макродеформаций  $\bar{\varepsilon}_{pq}$ . Решая задачи  $L_{pq}$  (4),(5) для  $p,q=1,2,3$  методом конечных элементов, по формулам (10),(11) вычислим тензор концентрации напряжений  $B_{ijkl}(\zeta)$ .

2) Выбираем луч  $\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^0$  в 6-мерном пространстве макронапряжений, по которому будет осуществляться нагружение композита. Выбираем начальное малое значение параметра нагружения  $\chi^{(0)}$ , при котором критерий (15) первоначального разрушения композита заведомо не выполняется. Далее осуществляем итерационный цикл по параметру нагружения, на каждом  $m$ -м шаге последовательно увеличивая значения параметра  $\chi^{(m)}$ . На каждом  $m$ -м шаге решения локальных задач  $L_{pq}$  не требуется, а проверяется только выполнение условия (15). Значение  $\chi^*$ , при котором впервые выполняется условие (15), соответствует первоначальному пределу прочности  $\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^*$ .

3) Далее увеличиваем значение параметра нагружения  $\chi^{(m)}$ . Конечные элементы, в которых выполнен критерий (15), будем трактовать как новую компоненту композита с номером  $N+1$  и называть разрушенной компонентой. При этом модуль упругости  $E_{N+1}$  разрушенной компоненты полагается существенно меньшим, чем модуль упругости всех остальных компонентов:  $E_{N+1} \ll E_\alpha$  при  $\alpha \neq N+1$ .

4) При  $\chi^{(m)} > \chi^*$  на каждом шаге итерации пересчитываем значение эффективного модуля упругости  $\bar{C}_{ijkl}^{(m)}$  по формуле (8), в которой напряжения  $\sigma_{ij(pq)}^{\alpha(m-1)}$  и средние деформации  $\bar{\varepsilon}_{pq}^{(m-1)}$  берутся с предыдущего шага итерации :

$$\bar{C}_{ijkl}^{(m)} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_{pq}^{(m-1)}} \sum_{\alpha=1}^N \int_{V_{\alpha}} \sigma_{ij(pq)}^{\alpha(m-1)} dV, \quad (16)$$

затем вычисляются новые средние значения деформации  $\bar{\varepsilon}_{pq}^{(m)}$  на  $m$ -м шаге

$$\bar{\varepsilon}_{pq}^{(m)} = \bar{\Pi}_{pqkl}^{(m)} \bar{\sigma}_{kl}^{(m)}, \quad \bar{\Pi}_{pqkl}^{(m)} = (\bar{C}_{pqkl}^{(m)})^{-1}, \quad \bar{\sigma}_{kl}^{(m)} = \chi^{(m)} \bar{\sigma}_{kl}^0. \quad (17)$$

С этими значениями  $\bar{\varepsilon}_{pq}^{(m)}$  решается локальная задача (4), (5) на  $m$ -м шаге итерации, по ее результатам вычисляются компоненты  $\sigma_{ij}^{\alpha(m)}$  тензоров микронапряжений на  $m$ -м шаге.

5) Далее осуществляется проверка выполнения критерия (15) в каждом не разрушенном конечном элементе для шага итерации  $m$ . В случае выполнения условия (15) для дополнительных КЭ, разрушенная область композита увеличивается за счет этих КЭ и далее осуществляется переход к следующему шагу итерации.

6) Эффективный предел прочности композита  $\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^{**}$  будет соответствовать ситуации, когда разрушенные конечные элементы сформируют трещину, соединяющую противоположные грани ячейки периодичности.

7) Описанную процедуру проведем для 6 различных лучей нагружения  $\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^0$ , соответствующих одноосному растяжению и сжатию вдоль 3-х координатных осей  $\xi_i$ , т.е. выбирая значения  $\bar{\sigma}_{\beta\gamma}^0$  равными:  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^0 > 0$  и  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^0 < 0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . В результате получим эффективные пределы прочности композита  $\bar{\sigma}_{\alpha T} = \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{**}$ ,  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{**} > 0$ ,  $\alpha = \overline{1, 3}$  при растяжении и сжатии,  $\bar{\sigma}_{\alpha T} = |\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{**}|$ ,  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{**} < 0$ ,  $\alpha = \overline{1, 3}$ , соответственно.

#### **Алгоритм метода численного решения задачи оптимального проектирования.**

Рассмотрим далее случай, когда имеется только одна армирующая компонента композита с концентрацией  $\varphi_1 = \varphi$ . Для численного решения задачи оптимального проектирования (1)-(3) композиционного материала с одной армирующей компонентой применим следующий алгоритм.

Задачу условной минимизации (1)-(3) представим в виде задачи безусловной минимизации с помощью метода барьерных функций [16]. С учетом ограничений (2) введем барьерную функцию

$$R(\varphi) = \sum_{i=1}^3 \max\{0, \bar{\lambda}_{ii}(\varphi) - \hat{\lambda}_i\} + \sum_{i=1}^3 \max\{0, \hat{\sigma}_{iT} - \bar{\sigma}_{iT}(\varphi)\} + \sum_{i=1}^3 \max\{0, \hat{\sigma}_{iC} - \bar{\sigma}_{iC}(\varphi)\}. \quad (18)$$

Тогда задача (1)-(3) сводится к задаче безусловной минимизации

$$P(r) = \inf_{\varphi} (\rho(\varphi) + rR(\varphi)) \rightarrow \min, \quad (19)$$

которая, в свою очередь, сводится к последовательности следующих задач минимизации

$$\varphi^{(k+1)} = \arg \min (\rho(\varphi) + r_k R(\varphi)), \quad r_k = \beta r_{k-1}, \quad \beta = \text{const} > 1 \quad (20)$$

с критерием остановки

$$r_k R(\varphi_{k+1}) < \varepsilon \quad (21)$$

для заранее определенного  $\varepsilon$ .

Барьерная функция (18) имеет нелинейный характер из-за присутствия функций  $\bar{\sigma}_{it}(\varphi), \bar{\sigma}_{ic}(\varphi)$ , для решения каждой из задач (20) будем пользоваться методом Хука-Дживса. В качестве начальной точки для метода барьерных функций требуется точка, заведомо не удовлетворяющая ограничениям. В качестве такой точки выберем решение задачи (3) без ограничений (2):  $\varphi^{(0)} = \arg \min \rho(\varphi)$ . В случае, если  $\varphi^{(0)}$  удовлетворяет ограничениям (2), то, очевидно, является точным решением исходной задачи (1)-(3). В противном случае  $\varphi^{(0)}$  можно использовать в качестве начальной точки процесса оптимизации. Таким образом, решение последовательности задач (13) с начальной точкой  $\varphi^{(0)}$  и критерием остановки (21) является решением исходной задачи (1)-(3).

Итерационную процедуру вычисления эффективных функций (2), описанную в предыдущих разделах, основанную на применении методов МКЭ, используем на каждом шаге оптимизации структуры.

**Результаты численного моделирования.** Численные расчеты проводились для дисперсно-армированного композита с изотропной матрицей и одним изотропным наполнителем, представляющим собой тонкие микросферы (рис. 1).

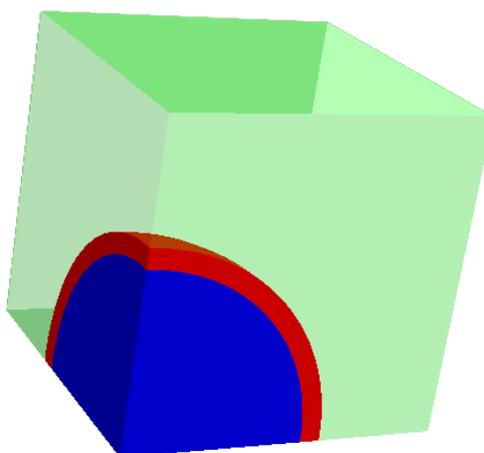


Рис. 1. Изображение 1/8 ячейки периодичности дисперсно-армированного композита на основе микросфер.

В процессе расчета для каждой концентрации наполнителя ячейка периодичности разбивалась приблизительно на 400 тысяч конечных элементов. Разбиение проводилось с помощью свободно распространяемого программного продукта Netgen 4.4. Локальные задачи для поиска эффективных характеристик решались в программном комплексе GCD, разрабатываемом на кафедре ФН-11 МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В качестве материала тонкой оболочки микросфер было использовано стекло с характеристиками:  $\rho^1=2600$  кг/м<sup>3</sup>,  $E^1=70$  ГПа,  $\nu^1=0,2$ ,  $\lambda^1=0,7$  Вт/(м·К),  $\sigma_T^1 = 0,5$  ГПа,  $\sigma_C^1 = 0,6$  ГПа,  $\sigma_S^1 = 0,4$  ГПа; в качестве матрицы рассматривалось кремнийорганическое связующее со следующими характеристиками:  $\rho^2=1100$  кг/м<sup>3</sup>,  $E^2=2$  ГПа,  $\nu^2=0,35$ ,  $\lambda^2=0,2$  Вт/(м·К),  $\sigma_T^2 = 0,01$  ГПа,  $\sigma_C^2 = 0,02$  ГПа,  $\sigma_S^2 = 0,005$  ГПа. Вследствие симметрии структуры рассмотренного типа композита относительно всех 3-х координатных направлений, он будет обладать изотропными эффективными свойствами, т.е. все эффективные модули упругости  $\bar{E}_i(\varphi)$  композита совпадают, совпадают также все 3 коэффициента теплопроводности  $\bar{\lambda}_i(\varphi) = \bar{\lambda}(\varphi)$ , а также пределы прочности  $\bar{\sigma}_{iT}(\varphi) = \bar{\sigma}_T(\varphi)$ . В процессе численного моделирования были рассчитаны зависимости эффективных характеристик от концентрации стеклянной компоненты микросфер, эти зависимости показаны на рисунках 2-5. В процессе численного моделирования были рассчитаны зависимости эффективных характеристик от концентрации стеклянной компоненты микросфер, эти зависимости показаны на рисунках 2-5. Графики зависимости модуля упругости и коэффициента теплопроводности от коэффициента армирования являются монотонными, как это и следует из теоретических соображений [3]. Коэффициент Пуассона  $\bar{\nu}(\varphi)$  композита меняется немонотонным образом – до значения концентрации  $\varphi = 0.27$  он уменьшается, а затем снова возрастает, однако эти изменения невелики по абсолютной величине (от 0.35 до 0.337), в целом, значения коэффициента Пуассона композита близки по своим значениям к коэффициенту Пуассона матрицы. График зависимости прочности на растяжение  $\bar{\sigma}_T(\varphi)$  не является монотонным: при увеличении концентрации микросфер прочность композита вначале резко падает почти в 2 раза по сравнению с прочностью неармированной матрицы, далее при увеличении содержания микросфер она немного возрастает (примерно на 15%), а затем при предельном содержании микросфер – снова падает. Небольшие осцилляции прочности, показанные на рисунке 5, обусловлены численной погрешностью вычислений прочности, которая вызвана сеточными эффектами (при различных концентрациях микросфер конечно-элементная сетка была различной и это вносило определенную погрешность в результат расчета прочности).

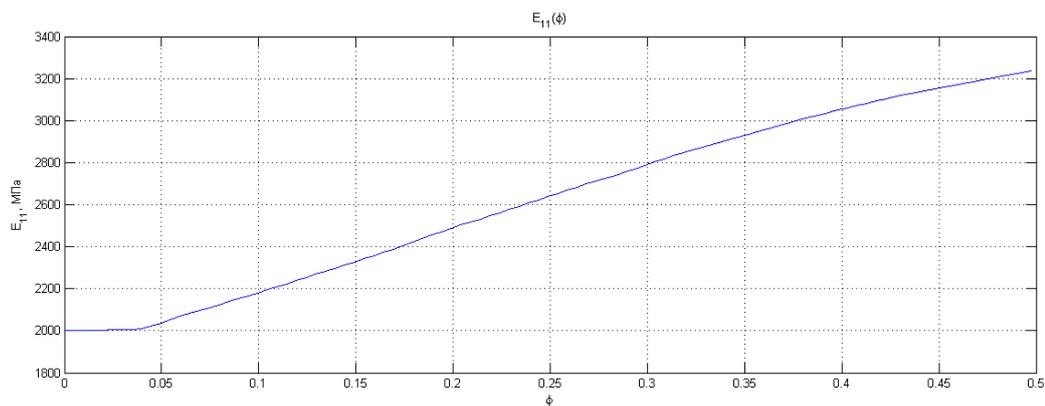


Рисунок 2. Зависимость эффективного модуля упругости  $\bar{E}_i(\varphi)$  дисперсно-армированного композита от концентрации микросфер  $\varphi$ .

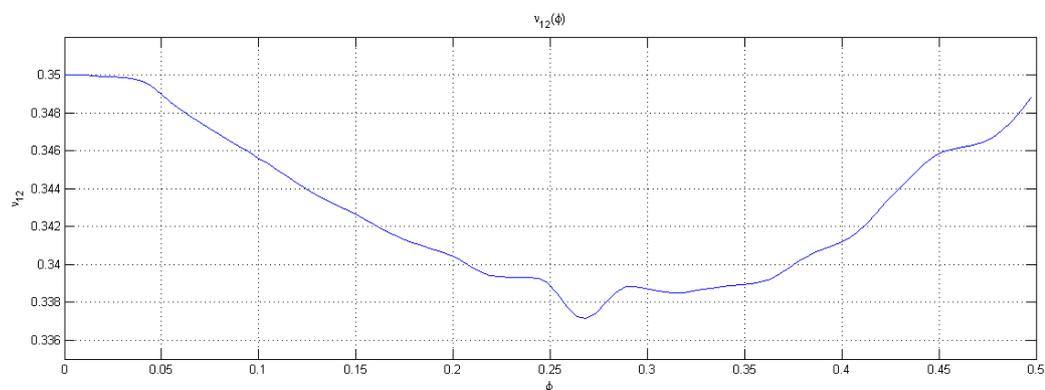


Рис. 3. Зависимость эффективного коэффициента Пуассона дисперсно-армированного композита от концентрации микросфер  $\varphi$ .

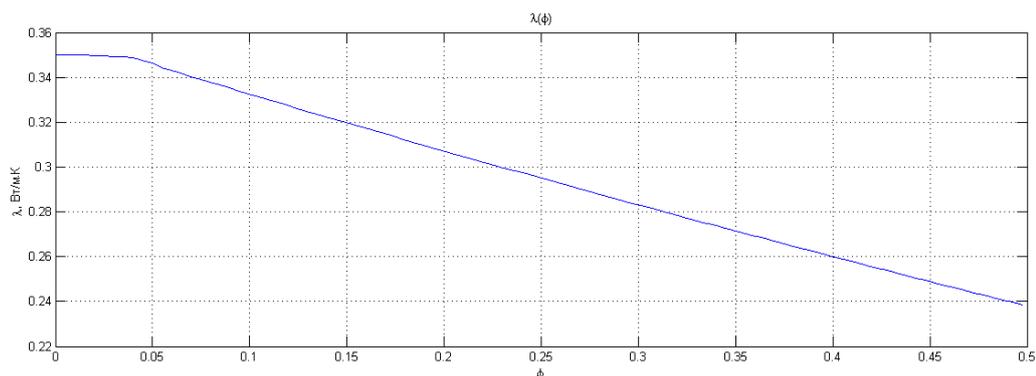


Рис. 4. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности  $\bar{\lambda}(\varphi)$  дисперсно-армированного композита от концентрации микросфер

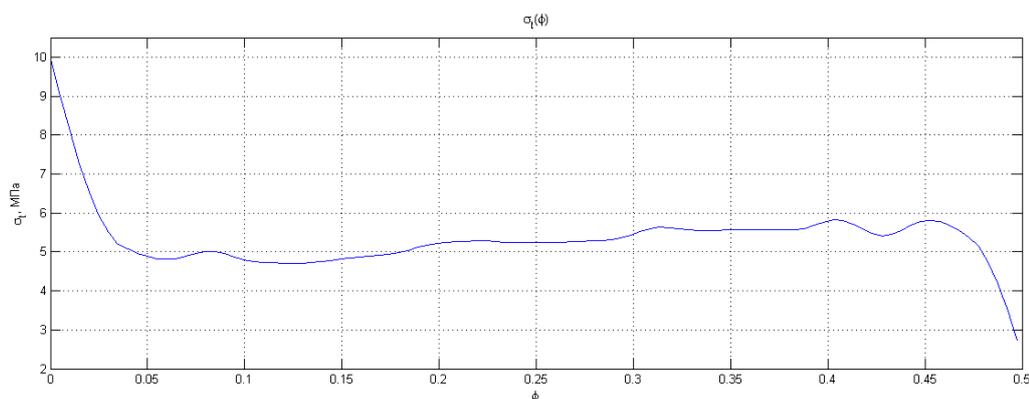


Рис. 5. Зависимость прочности на растяжение  $\bar{\sigma}_T(\varphi)$  дисперсно-армированного композита от концентрации микросфер

Для задачи оптимизации были выбраны следующие ограничения (2):  $\hat{\lambda}_i = 0,3 \text{Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$  и  $\hat{\sigma}_{iT} = \hat{\sigma}_{iC} = 5,6 \text{МПа}$ .

При этом значение оптимума было достигнуто при концентрации стекляннй фазы  $\varphi' = 0,084$ , что соответствует концентрации микросфер  $\varphi_0 = 0,31$ . Соответствующее оптимальное значение плотности композита составляет  $\rho = 977 \text{кг/м}^3$ .

**Выводы.** Разработан численный метод решения задачи оптимизации микроструктуры композиционного материала, с одновременными ограничениями на теплофизические и механические характеристики. Метод основан на конечно-элементном расчете эффективных характеристик композита: модулей упругости, коэффициентов теплопроводности и прочностей, а также на итерационном решении задач оптимизации функционала плотности. Предложенный метод реализован на примере дисперсно-армированного композиционного материала с наполнителем в виде стеклянных микросфер. Численно рассчитаны зависимости эффективных характеристик композита от коэффициента армирования, а также найдено оптимальное содержание наполнителя композита. Предложенный метод может использоваться для определения оптимальных структур композитов в задачах проектирования тепловой защиты.

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (Соглашения №14.В37.21.0448, 14.В37.21.1869, государственные контракты №14.514.11.4052, 14.516.11.0083, НИР № 1.5433.2011), грантов Президента РФ (МК-6421-2012-9, МК-765.2012.8, МК-6573.2013.3) и гранта РФФИ №12-08-00998.*

## Список литературы

1. Yu.I. Dimitrienko, G.A. Efremov, S.A. Chernyavsky. Optimum design of erosion-stable heatshield composite materials // Applied Composite Materials. 1997. № 4. 35-52.
2. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
3. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: МГУ, 1984. 336 с.
4. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний: пер. с англ. М.: Мир, 1984. 336 с.
5. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка автоматизированной технологии вычисления эффективных упругих характеристик композитов методом асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 2. С. 57-67.
6. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Автоматизация прогнозирования свойств композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения // Информационные технологии. 2008. № 8. С. 31-38.
7. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2002. № 2. С. 95-108.
8. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Шпакова Ю.В., Юрин Ю.В. Моделирование поверхностей прочности композитов на основе микроструктурного конечно-элементного анализа // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 11. DOI: <http://dx.doi.org/10.7463/1112.0496336>.
9. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов// Математическое моделирование.- 2012. – Т. 24. – № 5. – С. 3-20.
10. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Современный численный анализ механических свойств композиционных материалов // Известия РАН. Физическая серия – Т. 75, № 11. - 2011. – с. 1551-1556.
11. Димитриенко Ю.И., Морозов А.Н., Соколов А.П., Ничеговский Е.С. Моделирование эффективных пьезоэлектрорупругих свойств композиционных материалов// Вестник МГТУ им.Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.-№ 3. -2010.- с. 86-97.
12. Димитриенко Ю.И., Ничеговский Е.С. Численное моделирование магнитных свойств композиционных материалов// Вестник МГТУ им.Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.-№ 1. -2010.- с. 3-12.

13. Димитриенко Ю.И. Основы механики твердого тела/ Механика сплошной среды.Т.4.-Изд-во МГТУ им.Н.Э. Баумана.-2013.-580 с.
14. Ю.И. Димитриенко, А.П. Соколов, С.В. Сборщиков Моделирование микро-разрушения тканевых композитов// Вестник МГТУ им.Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. Спец.выпуск № 3 «Математическое моделирование».-2012.-с. 5-19.
15. Лебедев А.А. Развитие теорий прочности в механике материалов // Проблемы прочности. 2010. № 5. С. 127-146.
16. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988.

**Method for solving an optimization problem of the structure of fiber reinforced composites under restrictions on thermal and strength properties**

# 11, November 2013

DOI: [10.7463/1113.0621065](https://doi.org/10.7463/1113.0621065)

Dimitrienko Yu.I., Drogolyub A.N., Sokolov A.P., Shpakova Yu.V.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

[dimit.bmstu@gmail.com](mailto:dimit.bmstu@gmail.com)[adrogolub@gmail.com](mailto:adrogolub@gmail.com)[alsokolo@bmstu.ru](mailto:alsokolo@bmstu.ru)[ayulya@yandex.ru](mailto:ayulya@yandex.ru)

In this paper the authors formulated a problem of optimising the composite micro-structure, which is a problem of minimisation of the composite density under given restrictions on the components of effective elasticity and heat-conduction tensors, and effective limits of the composite strength. The authors proposed a method for solving an optimal design problem of a composite material reinforced with micro-spheres and designed for thermal shielding. The method of asymptotical averaging (homogenisation method) was used for calculating effective composite characteristics such as elastic and heat-conduction modulus tensors and strength limits; the finite element method was used for solving local 3D heat conduction and elasticity theory problems on the composite's periodicity cells. The finite element method was implemented with the use of GCD software developed at "FN-11" department of Bauman MSTU. The Hooke Jeeves algorithm was used for solving optimisation problems. Numerical implementation of the proposed method of micro-structure optimisation was developed by the example of a composite based on glass micro-spheres.

---

**Publications with keywords:** [strength](#), [elasticity](#), [composites](#), [finite element method](#), [optimization methods](#), [optimization](#), [thermal conductivity](#), [asymptotic averaging method](#), [micro-sphere](#)

**Publications with words:** [strength](#), [elasticity](#), [composites](#), [finite element method](#), [optimization methods](#), [optimization](#), [thermal conductivity](#), [asymptotic averaging method](#), [micro-sphere](#)

---

**References**

1. Dimitrienko Yu.I., Efremov G.A., Chernyavsky S.A. Optimum design of erosion-stable heatshield composite materials. *Applied Composite Materials*, 1997, no. 4, pp. 35-52. DOI: 10.1007/BF02481387

2. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging processes in periodic media]. Moscow, Nauka, 1984. 352 p.
3. Pobedria B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, MSU Publ., 1984. 336 p.
4. Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Springer Verlag, Berlin, 1980. (Ser. *Lecture Notes in Physics*, vol. 127.). DOI: 10.1007/3-540-10000-8 (Russ. ed.: Sanchez-Palencia E. *Neodnorodnye sredy i teoriia kolebanii*. Moscow, Mir, 1984. 471 p.).
5. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Razrabotka avtomatizirovannoi tekhnologii vychisleniia effektivnykh uprugikh kharakteristik kompozitov metodom asimptoticheskogo osredneniia [Development of automated technology of calculation of effective elastic characteristics of composites by method of asymptotic averaging]. *Vestnik MGTU im. N.E.Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2008, no. 2, pp. 57-67.
6. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Avtomatizatsiia prognozirovaniia svoistv kompozitsionnykh materialov na osnove metoda asimptoticheskogo osredneniia [Automation of predicting the properties of composite materials on basis of the method of asymptotic averaging]. *Informatsionnye tekhnologii*, 2008, no. 8, pp. 31-38.
7. Dimitrienko Iu.I., Kashkarov A.I. Konechno-elementnyi metod dlia vychisleniia effektivnykh kharakteristik prostranstvenno-armirovannykh kompozitov [Finite-element method to calculate the effective characteristics of spatially reinforced composites]. *Vestnik MGTU im. N.E.Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2002, no. 2, pp. 95-108.
8. Dimitrienko Ju.I., Sokolov A.P., Shpakova Ju.V., Jurin Ju.V. Modelirovanie poverhnostej prochnosti kompozitov na osnove mikrostrukturnogo konechno-jelementnogo analiza [Modeling of surfaces of composite strength on the basis of the microstructural finite element analysis]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 11. DOI: [10.7463/1112.0496336](https://doi.org/10.7463/1112.0496336)
9. Dimitrienko Ju.I., Sokolov A.P. Mnogomasshtabnoe modelirovanie uprugikh kompozicionnykh [Multiscale modeling of elastic composite materials]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3-20.
10. Dimitrienko Ju.I., Sokolov A.P. Sovremennyj chislennyj analiz mekhanicheskikh svoystv kompozicionnykh materialov [Modern numerical analysis of mechanical properties of composite materials]. *Izvestija RAN. Ser. Fizicheskaja*, 2011, vol. 75, no. 11, pp. 1551-1556.
11. Dimitrienko Ju.I., Morozov A.N., Sokolov A.P., Nichegovskij E.S. Modelirovanie jeffektivnykh p'ezojelektroprugikh svoystv kompozicionnykh materialov [Simulation of Efficient Piezoelectric-Elastic Composite Materials]. *Vestnik MGTU im. N.E.Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2010, no. 3, pp. 86-97.
12. Dimitrienko Ju.I., Nichegovskij E.S. Chislennoe modelirovanie magnitnykh svoystv kompozicionnykh materialov [Numerical Simulation of Magnetic Properties of Composites]. *Vestnik MGTU im. N.E.Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2010, no. 1, pp. 3-12.

13. Dimitrienko Ju.I. *Mehanika sploshnoj sredy. V 4 t. T. 4. Osnovy mehaniki tverdyh sred* [Continuum Mechanics. 4 vols. Vol. 4. Fundamentals of mechanics of solid media]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2013. 580 з.
14. Dimitrienko Ju.I., Sokolov A.P., Sborshhikov S.V. Modelirovanie mikro-razrushenija tkanevyh kompozitov [Simulation of Microfracture of Textile Composites]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2012, no. 2. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/32.html> , accessed 01.10.2013.
15. Lebedev A.A. Razvitie teorij prochnosti v mehanike materialov [Development of the theories of strength in the mechanics of materials]. *Problemy prochnosti*, 2010, no. 5, pp. 127-146. (English Translation: *Strength of Materials*, October 2010, vol. 42, iss. 5, pp. 578-592. DOI: 10.1007/s11223-010-9246-9 ).
16. Bunday B. *Basic optimization methods*. London, Edward Arnold, 1984. (Russ. ed.: Bunday B. *Metody optimizacii. Vvodnyj kurs*. Moscow, Radio i svjaz', 1988. 128 p.).