

Методические основы определения допустимых режимов колебаний системы в оценке параметров контактных взаимодействий элементов для объекта в виде составного твердого тела

77-48211/657422

12, декабрь 2013

Елисеев А. В.

УДК 62.752

ФГБОУ ВПО Иркутский государственный университет путей сообщения,
Иркутск, Российская Федерация
eavsh@ya.ru

Введение

Механические колебательные системы широко используются в качестве расчетных схем в задачах динамики машин. В состав систем входят разнообразные элементы (массоинерционные, упругие, диссипативные и др.), которые соединяются между собой определенным образом и формируют необходимое динамическое состояние. Неудерживающие связи достаточно хорошо известны в теоретической [1, 2] и аналитической механике [3], включая теорию механизмов и машин, а так же теорию колебаний упругих систем в её различных приложениях. Наиболее развиты теоретические аспекты взаимодействия элементов механических систем с неудерживающими связями в теории вибрационного транспортирования, транспортной динамике, строительной механике. Теоретические основы вибрационного транспортирования представлены в работах по теории колебаниям механизмов [4], вибрационному перемещению [5], динамике контактного взаимодействия [6]. Вопросы вибрационного перемещения материалов нашли отражение в теории вибрационной техники [7]. Динамика транспортных систем дает много примеров проявлений неудерживающих связей, что характерно при движении по неровной поверхности различных транспортных средств.

Необходимость учета неудерживающих связей возникает в задачах обеспечения безопасности перевозок грузов на железнодорожном [8] и автомобильном транспорте. В строительной механике существует необходимость оценки критических условий при

динамических и статических нагрузках [9]. Расчет контактных реакций с учетом неударживающих связей необходим для исключения критических состояний конструкции, при которых возможно раскрытие стыков и возникновение разрушениям.

В общем случае следует выделить два аспекта в исследовании контактного взаимодействия. Первый выражается в изучении явлений неударживающего контакта с периодическим возникновением зазора как фазы технологического процесса. Подобного рода задачи возникают при разработке средств вибрационных перемещений различных предметов (деталей, узлов) в автоматизированных сборочных комплексах, а так же вибротранспортных устройств. Второй аспект заключается в изучении неударживающего контакта с точки зрения сохранения соединения и обеспечения условия не допущения возникновения зазора или ограничения его максимального размера. В этом случае зазор выступает как негативный фактор, ведущий к разрушению механизма. Ключевыми задачами при таком подходе является определение влияния зазора на изнашивание механизмов, минимизация негативного влияния зазора, прогнозирование объектов в будущем времени эксплуатации. В итоге, исследование контактного взаимодействия деталей с зазором выступает элементом многокритериальной задачи общего моделирования состояния машин и механизмов наравне с актуальными направлениями развития современного машиноведения.

Основными теоретическими методами исследования контактного взаимодействия является применение метода Лагранжа исследования динамики механических систем.

Несмотря на разработанный теоретический аппарат и результаты, представленные в работах по исследованию механических систем с неударживающими связями [10-13], не достаточно проработанной остается методика исследования динамического контактного взаимодействия элементов составного тела. В дальнейших исследованиях нуждаются условия сохранения контакта между элементами составного твердого тела в зависимости от характеристик кинематического возмущения.

В предлагаемой статье рассматривается возможность определения области параметров кинематического воздействия на систему на основе аналитических оценок условий, при которых полная контактная реакция исключает возникновение зазоров.

Научная новизна заключается в постановке задачи определения условий обеспечения контакта для составного твердого тела с неударживающими связями и работающего в структуре колебательной системы; предлагается метод решения, позволяющий на основе условия равенства нулю полной контактной реакции, определить области искомых параметров для переходного и установившегося процессов движения.

Цель работы заключается в разработке методов, которые позволяют обосновать последовательность расчетов таких параметров колебательных систем содержащих составное твердое тело с учетом неударживающих связей, что движение системы будет исключать возникновение зазоров.

1. Постановка задачи. Общие положения

Предметом исследования является условие обеспечения контакта между элементами составного твердого тела при наличии неударживающих связей. Составное твердое тело может быть образовано набором твердых тел прижатыми друг к другу плоскостями контакта. Полагается, что контактная реакция направлена по нормали к плоскости контакта. В качестве модели составного твердого тела предлагается использовать набор твердых тел, каждое из которых представляет в свою очередь механическую системы в соответствии с рисунком 1. Такая система называется элементарной. Образующие твердое тело элементарные механические системы имеют одинаковую структуру и обладают одной степенью свободы. Элементарная система образована твердым телом, упругим элементом и точкой крепления. Точка крепления выполняет роль источника кинематического возмущения гармонического типа с некоторой амплитудой и частотой. Дополнительно к твердому телу приложена сила. В зависимости от условий конкретной задачи такая сила может быть конкретизирована. Предполагается, что при движении на твердое тело элементарной механической системы действует сила вязкого трения пропорциональная скорости движения твердого тела.

В начальный момент времени система с составным твердым телом находится в положении статического равновесия и неподвижна. Кинематическое возмущение точек крепления упругих элементов вызывает движение элементов системы. Ключевой характеристикой контактного взаимодействия выступает полная контактная реакция. Предполагается, что для обеспечения контакта в процессе движения достаточно, чтобы соответствующая полная контактная реакция была больше нуля. Критическим состоянием системы в процессе движения является момент равенства полной контактной реакции нулю. Движение системы в ответ на кинематическое возмущение с фиксированной частотой и амплитудой рассматривается с точки зрения наличия или отсутствия критических состояний на промежутке переходного и установившегося процессов.

Задача состоит в определении области параметры кинематического воздействия, которые обеспечивают движение системы без нарушения контакта.

2. Математическая модель контактного взаимодействия. Элементарная механическая система

Детализирована схема элементарной механической системы представлена соответствии с рисунком 1.

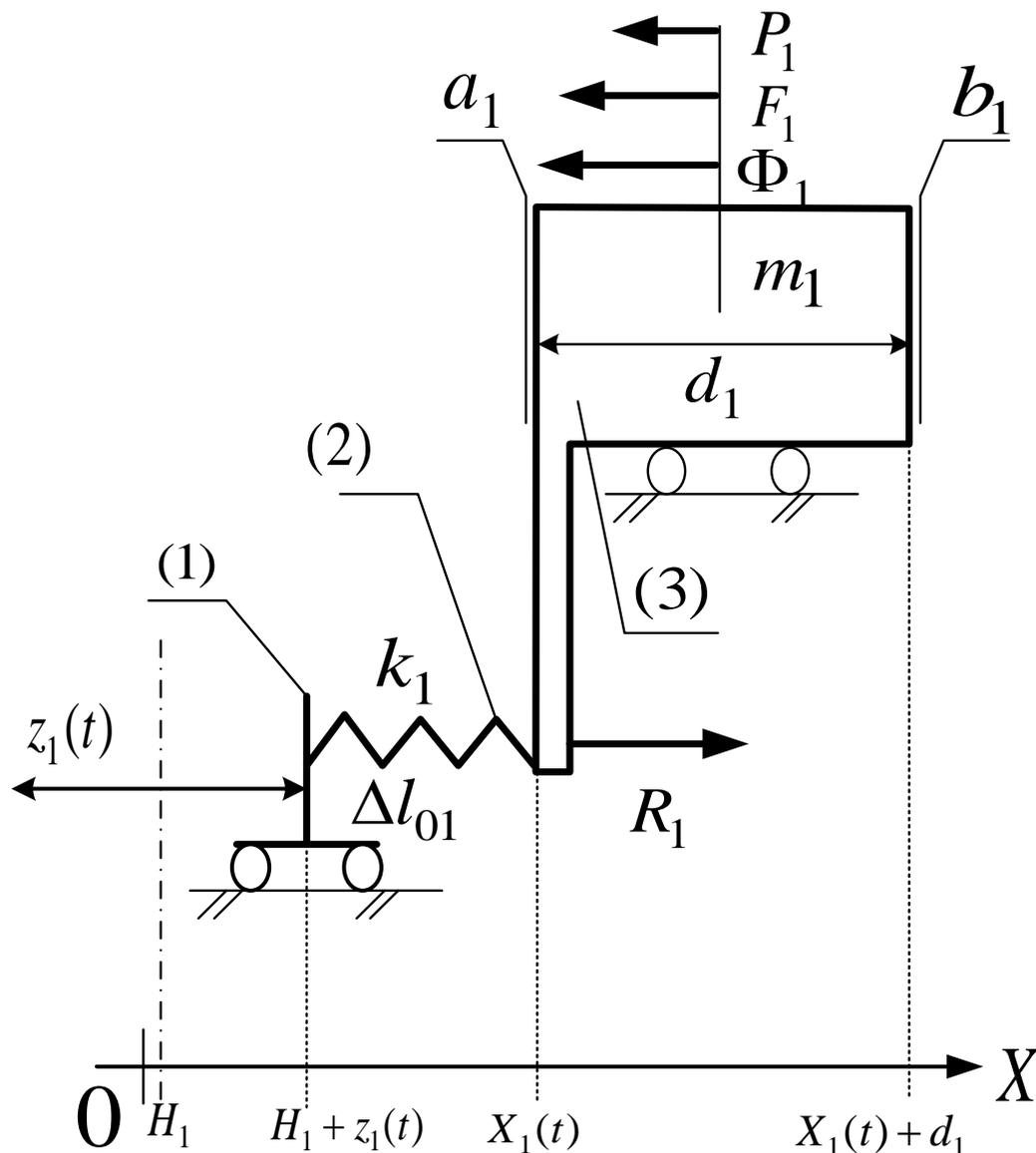


Рис. 1. Элементарная механическая система: 1 – источник кинематического возмущения, 2-упругий элемент с жесткостью k_1 , 3- твердое тело с массой m_1 и продольным размером d_1 , F_1 -сила, приложенная к твердому телу m_1 , R_1 - реакция упругого элемента, Φ_1 - сила инерции, P_1 - сила вязкого трения, H_1 - центр колебания источника возмущения

Система состоит из источника кинематического возмущения 1, упругого элемента 2 и твердого тела 3. Положение статического равновесия твердого тела определяется в неподвижной системе координат OX . Центром колебания источника кинематического возмущения служит точка привязки H_1 . Смещение источника кинематического возмущения относительно точки привязки составляет переменную по времени величину z_1 . Полагаем, что закон колебания носят гармонический характер $z_1 = A_1 \sin \omega_1 t$. Твердое тело длины d_1 обладает двумя поверхностями контакта a_1 и b_1 с координатами $X_1(a_1)$ и $X_1(b_1)$ соответственно. Упругий элемент в ненагруженном состоянии имеет длину Δl_{01} . Дополнительно предполагается, что к твердому телу приложена некоторая постоянная сила F_1 , которая вызывает растяжение или сжатие упругого элемента. В зависимости от условий постановки задачи сила F_1 может быть постоянной величиной или переменной. В частности, сила F_1 может быть силой тяжести, контактной реакцией, дополнительной постоянной силой или их суммой. В качестве обобщенной координаты использует координату плоскости a_1 , которая обозначается $X_1^{(0)}$. Так как рассматривается динамическая система, то возникает сила инерции $\Phi_1 = -m_1 \ddot{X}_1^{(0)}$. Дополнительно полагается, что при движении элементарной системы учитывается сила вязкого трения P_1 . Величина силы вязкого трения определяется согласно выражению:

$$P_1 = -p_1 \dot{X}_1^{(0)}(t), p_1 \geq 0. \quad (1)$$

Используем общие теоремы динамики для определения траектории движения материальной точки и запишем систему дифференциальных уравнений относительно полной координаты $X_1^{(0)\Pi}$:

$$\begin{cases} \frac{m_1 \ddot{X}_1^{(0)\Pi}}{k_1} + \frac{p_1 \dot{X}_1^{(0)\Pi}}{k_1} + X_1^{(0)\Pi} = H_1 + z_1(t) + \Delta l_{01} + \frac{F_1}{k_1} \\ \dot{X}_1^{(0)\Pi} \Big|_{t=0} = 0 \\ X_1^{(0)\Pi} \Big|_{t=0} = H_1 + \Delta l_{01} + \frac{F_1}{k_1} \end{cases} \quad (2)$$

Решение $X_1^{(0)\Pi}$ данной системы в общем случае имеет различное представление в зависимости от корней соответствующего характеристического уравнения. Полагаем, что

рассматривается устойчивое решение системы с некоторым ненулевым коэффициентом вязкого трения; корни характеристического уравнения имеют ненулевую комплексную часть.

3. Динамический контакт двух элементарных систем

Рассматриваются две системы $\Omega_1^{(0)}$ и $\Omega_2^{(0)}$ в соответствии с рисунком 2. Добавление неударяющей связи контакта $\Xi_{12}^{(1)}$ к системам формирует две новые системы $\Omega_1^{(1)}$ и $\Omega_2^{(1)}$ в соответствии с рисунком 2.

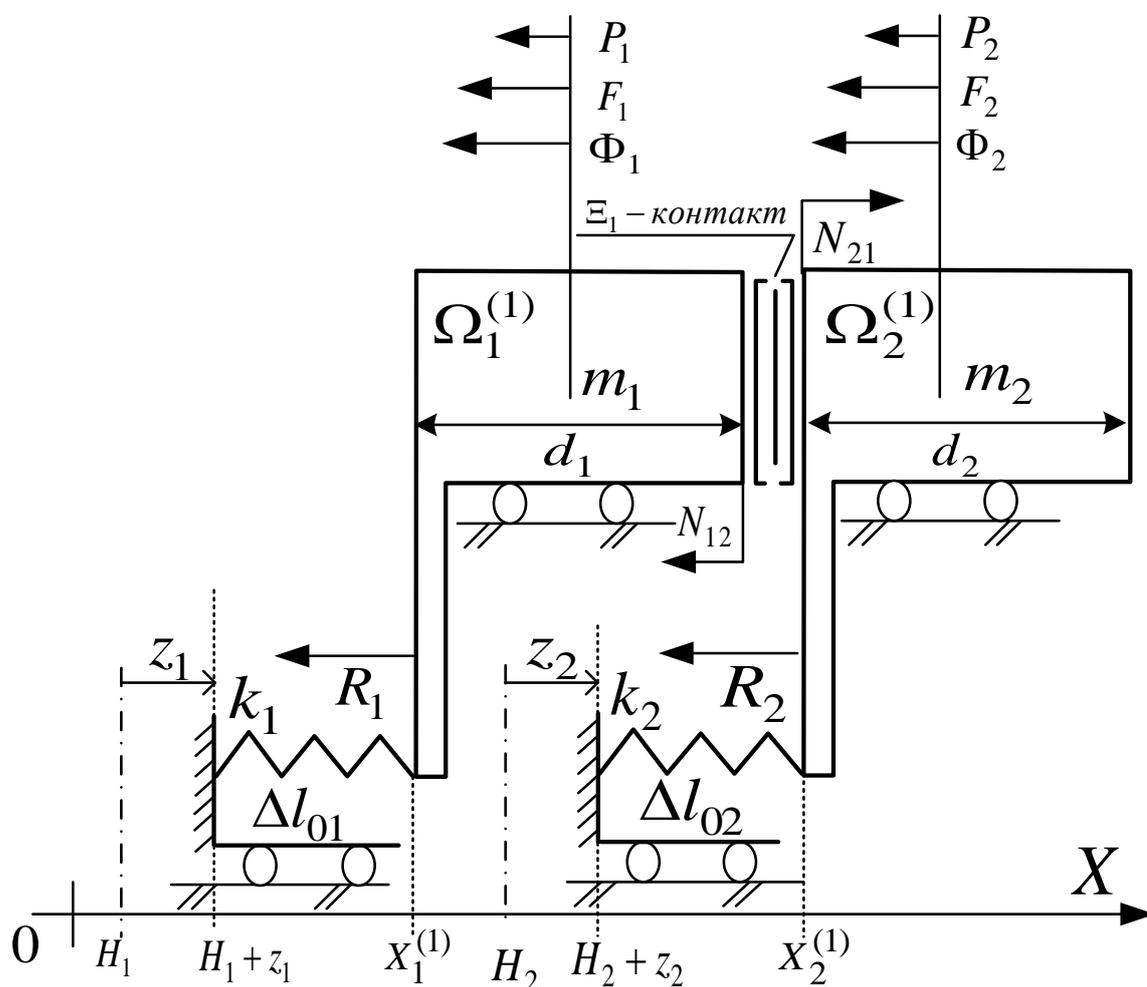


Рис. 2. Динамический контакт двух элементарных систем

Координаты новых систем имеют значения $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}$. Верхний индекс обозначает, что имеется один контакт. Предполагается, что в начальный момент времени система находится в положение статического равновесия и неподвижна. Положение

статического равновесия предполагается положением контакта. В качестве внешнего возмущения рассматривается гармоническое колебание опорных поверхностей $z_1 = A_1 \sin(\omega_1 t)$, $z_2 = A_2 \sin(\omega_2 t)$ относительно положений H_1, H_2 .

Представим полные положения динамических систем с учетом силы вязкого трения и инерции в виде:

$$\begin{aligned} X_1^{(1)\Pi} &= H_1 + z_1(t) + \Delta l_{01} + \frac{F_1 + P_1 + \Phi_1 + N_{12}^{\Pi}}{k_1} \\ X_2^{(1)\Pi} &= H_2 + z_2(t) + \Delta l_{02} + \frac{F_2 + P_2 + \Phi_2 + N_{21}^{\Pi}}{k_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Полные контактные реакции обозначены N_{12}^{Π} , N_{21}^{Π} . Так как в сумме полные контактные реакции, согласно третьему закону Ньютона, дают ноль, введем обозначение:

$$N_{21}^{\Pi} = N^{\Pi}, N_{12}^{\Pi} = -N^{\Pi}. \quad (4)$$

Система дифференциальных уравнений, решение которой описывает искомое движение в контакте, имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{m_1 \ddot{X}_1^{(1)\Pi}}{k_1} + \frac{p_1 \dot{X}_1^{(1)\Pi}}{k_1} + X_1^{(1)\Pi} &= H_1 + z_1(t) + \Delta l_{01} + \frac{F_1 - N^{\Pi}}{k_1} \\ \frac{m_2 \ddot{X}_2^{(1)\Pi}}{k_2} + \frac{p_2 \dot{X}_2^{(1)\Pi}}{k_2} + X_2^{(1)\Pi} &= H_2 + z_2(t) + \Delta l_{02} + \frac{F_2 + N^{\Pi}}{k_2} \\ \dot{X}_1^{(1)\Pi} \Big|_{t=0} &= 0 \\ \dot{X}_2^{(1)\Pi} \Big|_{t=0} &= 0 \\ X_1^{(1)\Pi} \Big|_{t=0} &= X_{01}^{(1)\Sigma} \\ X_2^{(1)\Pi} \Big|_{t=0} &= X_{02}^{(1)\Sigma} \\ X_2^{(1)\Pi} &= X_1^{(1)\Pi} + d_1 \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Величины $X_{01}^{(1)\Sigma}$ и $X_{02}^{(1)\Sigma}$ представляют собою положение статического равновесия элементарных систем в начальный момент времени.

Необходимо отметить, что решение системы дифференциальных уравнений рассматривается на всем промежутке $t \geq 0$ с учетом $N^{\Pi}(t) > 0$. В общем случае, представленная система описывает движение системы с учетом удерживающей связи и не учитывает их неударивающий характер. Необходимые и достаточные условия

нарушения контакта требуют детального рассмотрения и учета сложного движения элементов системы. В данной задаче рассматривается множество решений системы дифференциальных уравнений и, на основании контактной реакции, как реакции удерживающего контакта, определяются траектории движения, при которых контакт не нарушается. Критерием сохранения контакта является условие положительности полной контактной реакции $N^{\Pi}(t) > 0$ в процессе движения механической системы на промежутке переходного или установившегося процессов.

Траектория, для которой справедливо условие сохранения контакта в избыточном смысле называется допустимой. В таком случае, критерием недопустимости траектории является существование критических точек t_K с нулевой полной контактной реакцией $N^{\Pi}(t_K) = 0$. Формально можно показать, что существуют траектории, для которых условие равенства полной реакции нулю ещё не обеспечивают отрыва с последующим возникновением зазора. Под допустимостью траектории движения далее подразумевается свойство траектории не иметь точек с полной реакцией равной нулю на определенном временном промежутке.

4. Характеристики контактного взаимодействия. Статическая контактная реакция

Положим, что найдено полное смещение элементов рассматриваемой механической системы. Представим полное смещение в виде статического и динамического смещения:

$$X_1^{(1)\Pi} = X_1^{(1)\Sigma} + X_1^{(1)\Delta}, X_2^{(1)\Pi} = X_2^{(1)\Sigma} + X_2^{(1)\Delta}, \quad (6)$$

где $X_1^{(1)\Sigma}, X_2^{(1)\Sigma}$ - статические компоненты, $X_1^{(1)\Delta}, X_2^{(1)\Delta}$ - динамические компоненты.

Полную контактную реакцию представим в виде суммы статической и динамической компоненты:

$$N^{\Pi} = N^{\Sigma} + N^{\Delta}, \quad (7)$$

где N^{Σ} - статическая компонента реакции, N^{Δ} - динамическая компонента реакции.

Под статической компонентой подразумевается значение, которое принимает соответствующая величина в начальный момент времени, при условии, что в начальный момент времени система находится в неподвижном состоянии и в положении равновесия.

Для определения статического положения системы рассмотрим начальный момент времени $t = 0$. Такая система будет иметь вид:

$$\begin{cases} X_1^{(1)\Sigma} = H_1 + \Delta l_{01} + \frac{F_1 - N^\Sigma}{k_1} \\ X_2^{(1)\Sigma} = H_2 + \Delta l_{02} + \frac{F_2 + N^\Sigma}{k_2} \\ X_2^{(1)\Sigma} = X_1^{(1)\Sigma} + d_1 \end{cases} \quad (8)$$

Представим данную систему в виде:

$$\begin{cases} X_1^{(1)\Sigma} = X_1^{(0)\Sigma} - \frac{N^\Sigma}{k_1} \\ X_2^{(1)\Sigma} = X_2^{(0)\Sigma} + \frac{N^\Sigma}{k_2} \\ X_2^{(1)\Sigma} = X_1^{(1)\Sigma} + d_1 \end{cases} \quad (9)$$

Отметим, что величины $X_1^{(0)\Sigma}$ и $X_2^{(0)\Sigma}$ представляют собою положения статического равновесия систем, рассматриваемых без условий контакта:

$$X_1^{(0)\Sigma} = H_1 + \Delta l_{01} + \frac{F_1}{k_1}, X_2^{(0)\Sigma} = H_2 + \Delta l_{02} + \frac{F_2}{k_2}. \quad (10)$$

В новых переменных положение статического равновесия и соответствующая статическая реакция имеют вид:

$$N_0^\Sigma = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} (X_1^{(0)\Sigma} + d_1 - X_2^{(0)\Sigma}), X_{01}^{(1)\Sigma} = X_1^{(0)\Sigma} - \frac{N^\Sigma}{k_1}, X_{02}^{(1)\Sigma} = X_2^{(0)\Sigma} + \frac{N^\Sigma}{k_2}. \quad (11)$$

Таким образом, положение статической реакции и положения статического равновесия могут быть представлены в зависимости от положений статического равновесия систем, которые рассматриваются независимо.

5. Динамическая контактная реакция

Полагаем, что у системы определено положение статического равновесия $X_{01}^{(1)\Sigma}, X_{02}^{(1)\Sigma}$ в начальный момент времени и начальная контактная реакция N_0^Σ . Представим величины полного смещения и контактной реакции в виде сумм:

$$X_1^{(1)\Pi} = X_{01}^{(1)\Sigma} + X_1^{(1)\Delta}, X_2^{(1)\Pi} = X_{02}^{(1)\Sigma} + X_2^{(1)\Delta}, N^\Pi = N_0^\Sigma + N^\Delta. \quad (12)$$

После подстановки полных смещений и полной контактной реакции в исходную систему дифференциальных уравнений получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m_1 \ddot{X}_1^{(1)\Delta}}{k_1} + \frac{p_1 \dot{X}_1^{(1)\Delta}}{k_1} + X_1^{(1)\Delta} = z_1(t) - \frac{N^\Delta}{k_1} \\ \frac{m_2 \ddot{X}_2^{(1)\Delta}}{k_2} + \frac{p_2 \dot{X}_2^{(1)\Delta}}{k_2} + X_2^{(1)\Delta} = z_2(t) + \frac{N^\Delta}{k_2} \\ X_2^{(1)\Delta} = X_1^{(1)\Delta} \\ \dot{X}_1^{(1)\Delta} \Big|_{t=0} = 0, \dot{X}_2^{(1)\Delta} \Big|_{t=0} = 0 \\ X_1^{(1)\Delta} \Big|_{t=0} = 0, X_2^{(1)\Delta} \Big|_{t=0} = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

Таким образом, полученная система уравнений однозначно определяет динамическую компоненту смещения и динамическую компоненту контактной реакции.

Применим преобразование Лапласа к полученной системе относительно трех неизвестных функций и получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} s^2 \frac{m_1}{k_1} \bar{X}_1^{(1)\Delta} + s \frac{p_1}{k_1} \bar{X}_1^{(1)\Delta} + \bar{X}_1^{(1)\Delta} = \bar{z}_1(t) - \frac{\bar{N}^\Delta}{k_1} \\ s^2 \frac{m_2}{k_2} \bar{X}_2^{(1)\Delta} + s \frac{p_2}{k_2} \bar{X}_2^{(1)\Delta} + \bar{X}_2^{(1)\Delta} = \bar{z}_2(t) + \frac{\bar{N}^\Delta}{k_2} \\ \bar{X}_2^{(1)\Delta} = \bar{X}_1^{(1)\Delta} \end{array} \right. \quad (14)$$

Функции $\bar{X}_1^{(1)\Delta}$, $\bar{X}_2^{(1)\Delta}$ и \bar{N}^Δ комплексной переменной s представляют собою изображения Лапласа исходных функций $X_1^{(1)\Delta}$, $X_2^{(1)\Delta}$, N^Δ от времени t .

Введем обозначения:

$$L_1(s) = s^2 \frac{m_1}{k_1} + s \frac{p_1}{k_1} + 1, L_2(s) = s^2 \frac{m_2}{k_2} + s \frac{p_2}{k_2} + 1. \quad (15)$$

С учетом таких обозначений система в изображениях искомых функций будем иметь вид:

$$\begin{cases} L_1(s)\bar{X}_1^{(1)\Delta} = \bar{z}_1(t) - \frac{\bar{N}^\Delta}{k_1} \\ L_1(s)\bar{X}_2^{(1)\Delta} = \bar{z}_2(t) + \frac{\bar{N}^\Delta}{k_2} \\ \bar{X}_2^{(1)\Delta} = \bar{X}_1^{(1)\Delta} \end{cases} \quad (16)$$

Рассмотрим функции:

$$W_1(s) = \frac{1}{L_1(s)}, W_2(s) = \frac{1}{L_2(s)}. \quad (17)$$

В таких обозначениях изображение динамической компоненты реакции контакта будет иметь вид:

$$\bar{N}^\Delta = \frac{W_1(s)\bar{z}_1 - W_2(s)\bar{z}_2}{\frac{W_1(s)}{k_1} + \frac{W_2(s)}{k_2}}. \quad (18)$$

При условии, что в системе реализуется только одно из кинематических воздействий z_1 или z_2 , к примеру, только z_1 , то изображение динамической компоненты контактной реакции будет иметь вид:

$$\bar{N}^\Delta = \frac{W_1(s)k_1k_2}{W_1(s)k_2 + W_2(s)k_1} \bar{z}_1. \quad (19)$$

Таким образом, передаточная функция при реализации кинематического воздействия на динамическую компоненту контактной реакции имеет вид:

$$W_{\frac{N^\Delta}{z_1}}(s) = \frac{W_1(s)k_1k_2}{W_1(s)k_2 + W_2(s)k_1}. \quad (20)$$

Соответствующая амплитудно-частотная характеристика имеет вид:

$$A_{\frac{N^\Delta}{z_1}}(j\omega) = \left| \frac{W_1(j\omega)k_1k_2}{W_1(j\omega)k_2 + W_2(j\omega)k_1} \right|. \quad (21)$$

Полученное выражение показывает, что амплитудно-частотная характеристика передаточной функции для случая кинематического возмущения на динамическую компоненту контактной реакции формируется на основе динамических характеристик двух элементарных систем.

6. Определение допустимых режимов кинематического воздействия для установившегося колебания

При определенных условиях амплитудно-частотная характеристика системы представляет собою отношение амплитуды выходного установившегося сигнала системы к амплитуде входного гармонического сигнала. Предположим, что параметры системы таковы, что динамическая компонента контактной реакции имеет установившейся режим в том смысле, что влияние собственных частот на движение системы, начиная с некоторого момента времени, считается пренебрежимо малым. В таком случае, можно предположить, что амплитуда динамической компоненты на промежутке установившегося движения системы может быть оценена с использованием амплитудно-частотной характеристики. Оценка амплитуды динамической компоненты контактной реакции позволяет определить условия, которые достаточны для того, чтобы полная контактная реакция не обращалась в ноль на промежутке установившегося движения.

Предположим, что на промежутке $t > t_\varepsilon$ система имеет установившийся режим движения. Тогда для динамической компоненты контактной реакции для некоторого малого $\varepsilon > 0$ будет выполнено неравенство при $t > t_\varepsilon$:

$$|N^\Delta(t)| < A_{\frac{N^\Delta}{z_1}}(\omega_1)A_1 + \varepsilon. \quad (22)$$

Полагая, что амплитуда A_1 и частота ω_1 кинематического возмущения выбраны таким образом, что для статической компоненты реакции выполнено неравенство:

$$A_{\frac{N^\Sigma}{z_1}}(\omega_1)A_1 + \varepsilon \leq |N^\Sigma|, \quad (23)$$

можно утверждать, что для промежутка $t > t_\varepsilon$ при достаточно малых ε выполнено ограничение на амплитуду динамической компоненты контактной реакции:

$$|N^\Delta(t)| < |N^\Sigma|. \quad (24)$$

В свою очередь, условие строгого ограничения динамической компоненты модулем статической компоненты является достаточным условием для того, чтобы на промежутке установившегося движения системы не существовало критических точек, в которых полная контактная реакция обращается в ноль.

Таким образом, неравенство, которое характеризует множество частот и амплитуд внешнего гармонического воздействия, обеспечивающих контакт, имеет вид:

$$A_{\frac{N^{\Sigma}}{z_1}}(\omega_1)A_1 + \varepsilon \leq |N^{\Sigma}|. \quad (25)$$

В приведенном неравенстве для оценки частот и амплитуд допустимых режимов на промежутке установившегося движения при достаточно больших моментах времени можно полагать, что ε достаточно мало. Тогда множество допустимых характеристик кинематического возмущения имеет границу, которая определяется равенством:

$$A_{\frac{N^{\Sigma}}{z_1}}(\omega_1)A_1 = |N^{\Sigma}|. \quad (26)$$

Частным примером метода определения критических характеристик может быть вариант, когда амплитуда кинематического возмущения фиксирована и необходимо найти диапазон частот, для которого можно утверждать, что контакт будет сохранен.

Рассмотрим контактное взаимодействие двух динамических систем с характеристиками соответствии с таблицей 1.

Таблица 1. Характеристики элементарных динамических систем

Название параметра\название системы	Элементарная система 1	Элементарная система 2
H - точка привязки, м.	0	0
A -амплитуда кинематического возмущения, м.	0.008	0
ω - частота кинематического возмущения, рад./с.	ω	0
Δl_0 Длина упругого элемента, м.	0	0
k - жесткость упругого элемента, Н./м.	1000	1
p -коэффициент вязкого трения, кг./с.	0.1-е9	10
m – масса твердого тела системы, кг.	2	1
F -сила веса, Н.	-9.8	-4.9

Величина статической реакции при контакте рассматриваемых систем равна $|N^{\Sigma}| = 5.88 \text{ Н}$. Положим, что амплитуда кинематического возмущения составляет $A_1 = 8.3 \text{ мм}$. Соответствующая представленным данным амплитудно-частотная характеристика имеет вид:

$$W_{\frac{N^\Delta}{z_1}}(s = j\omega) = \frac{k_1(-m_2\omega^2 + jp_2\omega + k_2)}{-(m_1 + m_2)\omega^2 + j(p_1 + p_2)\omega + k_1 + k_2}. \quad (27)$$

В соответствии с рисунком 3 представлена амплитудно-частотная характеристика (1) системы умноженная на амплитуду A_1 для диапазона частот от 0 до 50 рад./с. В соответствии с рисунком 3 представлен уровень (2) статической компоненты реакции. В точках C_1, C_2 графики пересекаются и определяют два промежутка частот $\omega < \omega_1$ и $\omega_2 < \omega$, в которых можно гарантировать контактное движение системы. Для данного примера критические частоты составляют $\omega_1 \approx 14.75 \text{ др}\ddot{a}./\text{с.}$, $\omega_2 \approx 25.37 \text{ др}\ddot{a}./\text{с.}$

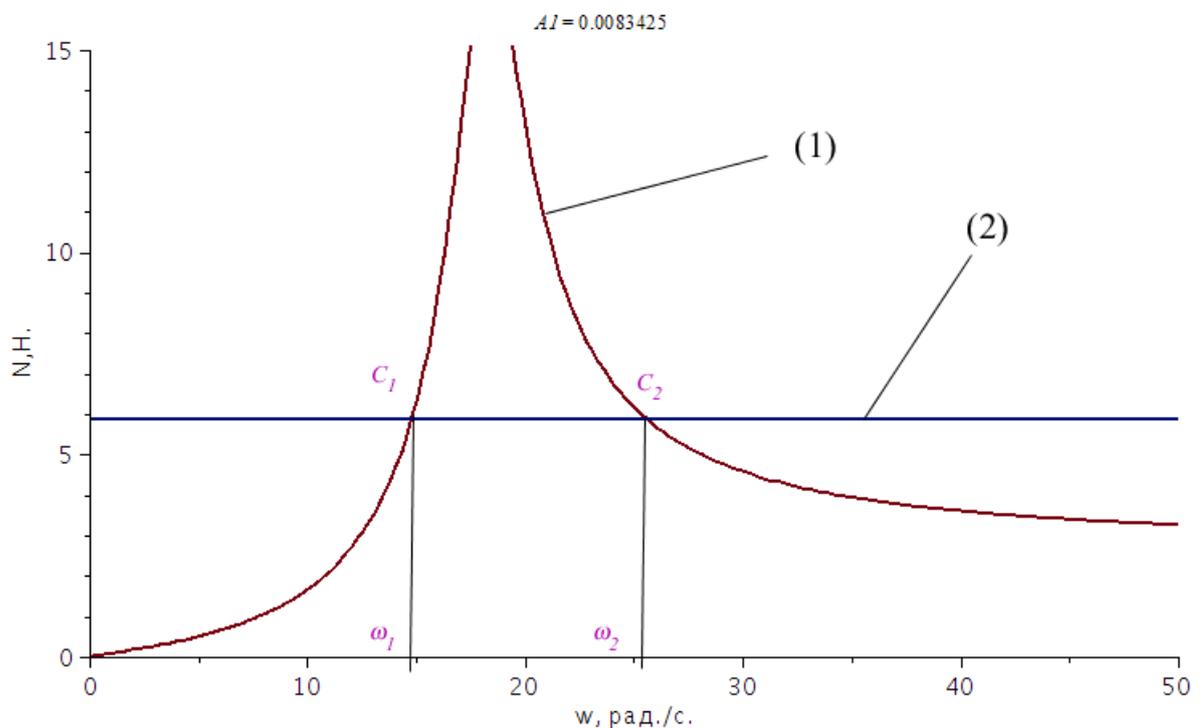


Рис. 3. Компоненты полной контактной реакции. 1-амплитуда динамической компоненты полной контактной реакции, 2-статическая компонента полной контактной реакции. C_1, C_2 – точки пересечения амплитудно-частотной характеристики с уровнем статической реакции. ω_1, ω_2 – критические частоты

В соответствии с рисунком 4 представлена линия (а) уровня $|N^\Sigma|$ функции $A_{\frac{N^\Delta}{z_1}}(\omega_1)A_1$ переменных ω_1 и A_1 . В соответствии с рисунком 4 область (I) представляет собою множество пар частот и амплитуд, при которых контакт в системе не нарушается. Кривая (а) представляет множество критических значений амплитуд и частот. Движение

системы в установившемся режиме для критических параметров может иметь точки с нулевой полной контактной реакцией.

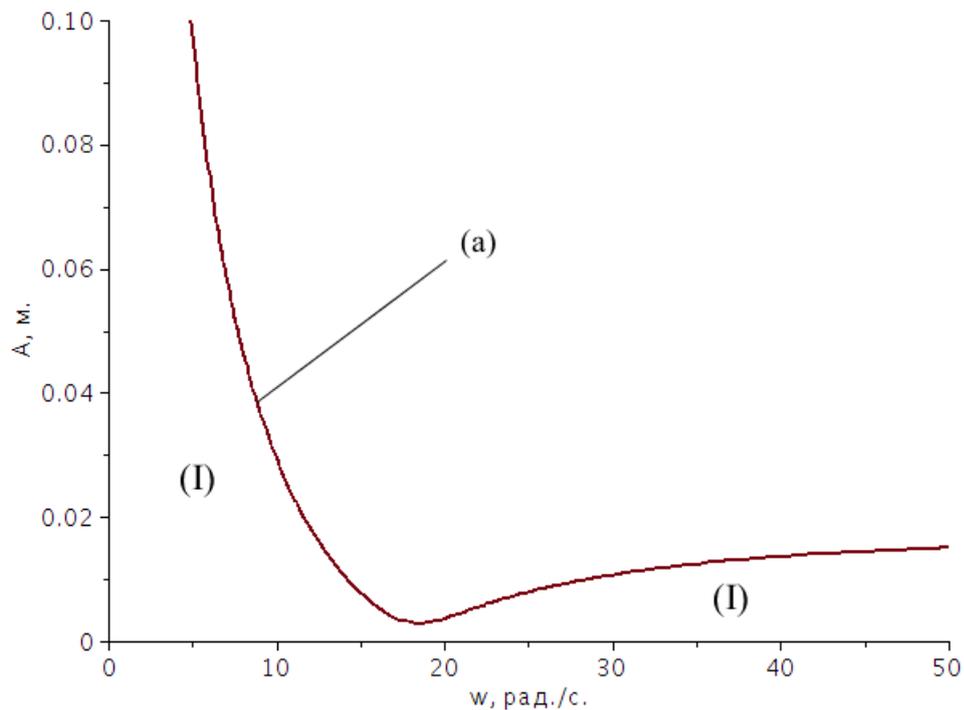


Рис. 4. Область параметров контакта. (a)-линия уровня. (I) область параметров движения системы в контакте

В соответствии с рисунком 5 представлена полная контактная реакция динамического процесса с критическими параметрами кинематического возмущения. Полная контактная реакция на промежутке установившегося движения системы периодически приближается к нулевому значению.

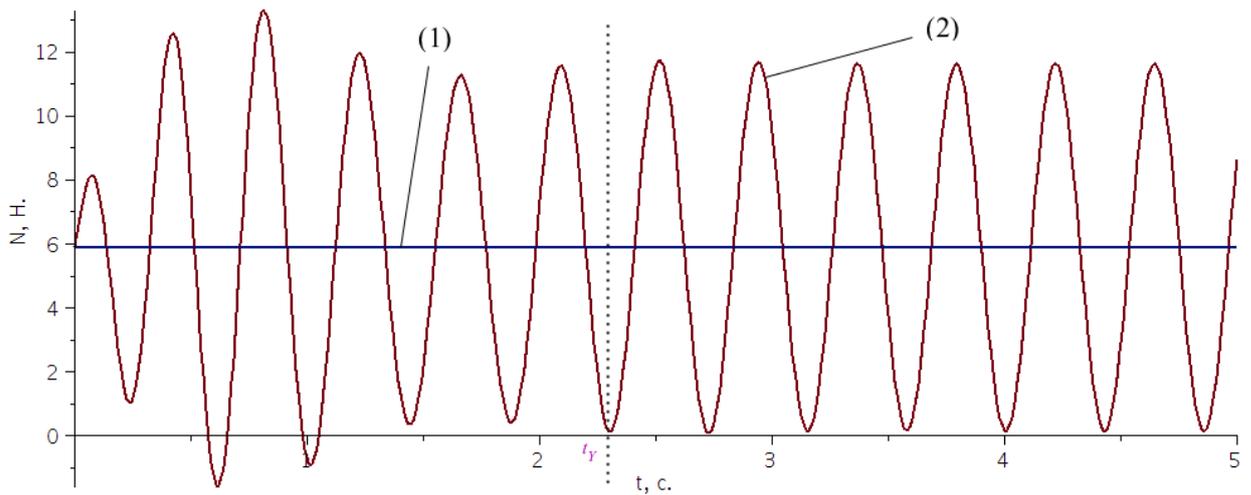


Рис. 5. Критический режим. 1-Статическая контактная реакция. 2-полная контактная реакция.
Характеристики кинематического возмущения: $\omega = 14.75 \text{ д}r\ddot{a}./\dot{n}., A_1 = 8.3\check{\epsilon}\check{\epsilon} . t_\epsilon$ - момент
разделения переходного и установившегося процесса

В соответствии с рисунком 6 представлена траектория движения системы допустимая на промежутке установившегося режима. Полная контактная реакция на интервале установившегося режима нигде не обращается в ноль. Это означает, что на интервале установившегося движения возникновение зазоров в системе исключено. Наличие момента времени, в котором полная контактная реакция равна нулю показывает близость системы к состоянию, после которого возможен зазор.

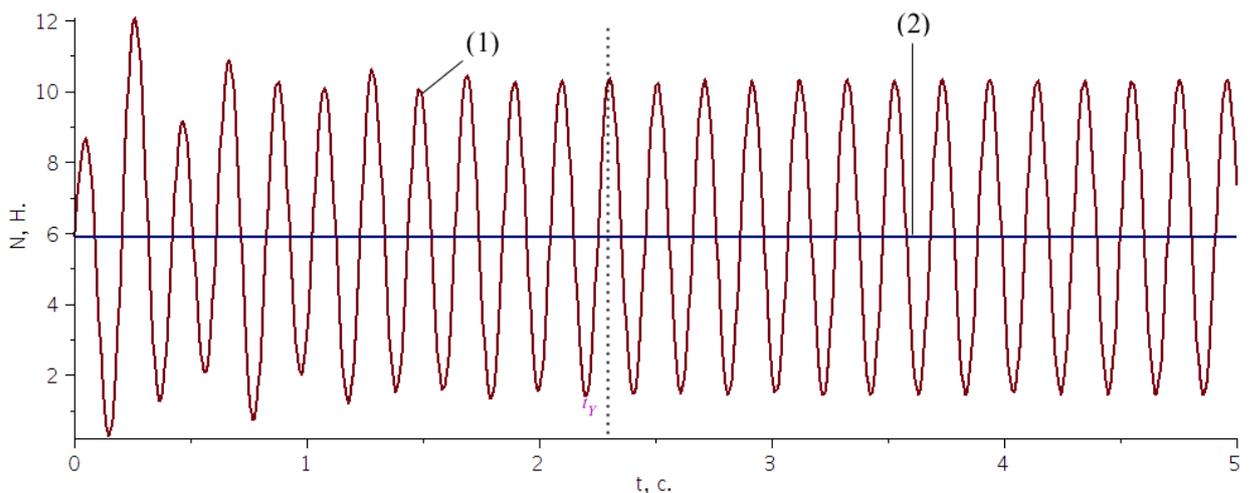


Рис. 6. Допустимая траектория для установившегося режима. 1-Статическая контактная реакция. 2-полная контактная реакция. Характеристики кинематического возмущения:
 $\omega = 30.75 \text{ д}r\ddot{a}./\dot{n}., A_1 = 8.3\check{\epsilon}\check{\epsilon} . t_\epsilon$ - момент разделения переходного и установившегося процесса

В соответствии с рисунком 7 представлено движение траектории, на которой контактная реакция принимает положительное значение на одних интервалах, в определенных точках принимает нулевые значения, в других интервалах принимает отрицательные значения. Такая траектория является не допустимой. При учете неудерживающей связи в системе должен реализоваться зазор, который описывается уже другой системой дифференциального уравнения.

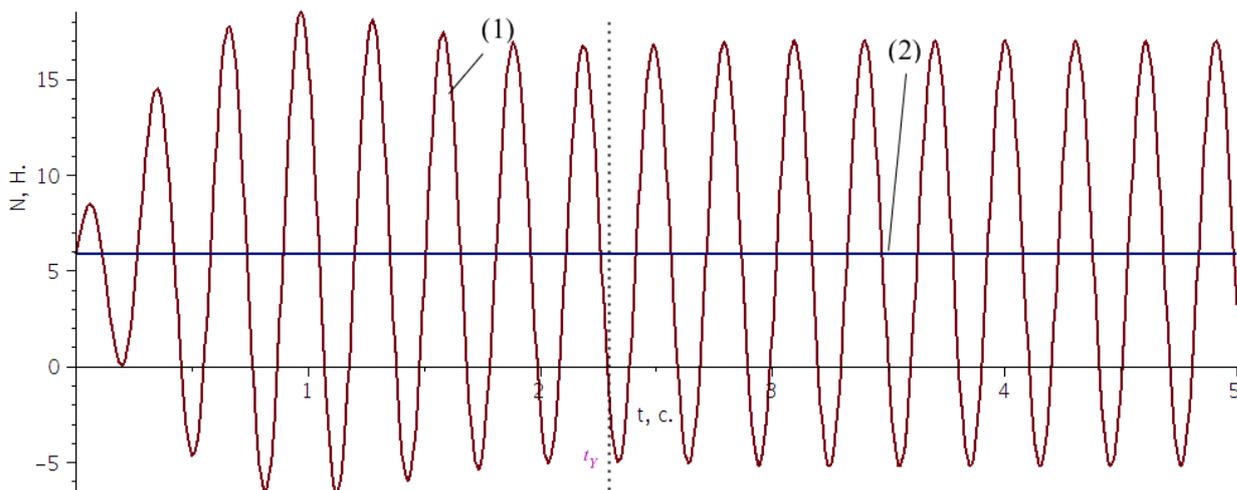


Рис. 7. Недопустимый режим. 1-Статическая контактная реакция. 2-полная контактная реакция.

Характеристики кинематического возмущения: $\omega = 20.75 \text{ д\ddot{r}\ddot{a} . / \dot{n} .}$, $A_1 = 8.3 \text{ \ddot{e}\ddot{e} . t_\epsilon}$ - момент разделения переходного и установившегося процесса

Представленные графики динамических реакций являются примерами возможных движений систем при различных частотах кинематического воздействия. Выбор амплитуды и частоты из представленных на рисунке 4 областей параметров позволяет характеризовать соответствующее движение системы на предмет возможности появления зазоров.

Таким образом, описанный метод может служить решением задачи определения параметров кинематического возмущения, при которых на промежутке установившегося движения системы не возможно возникновение зазоров.

7. Определение допустимых режимов кинематического воздействия для переходного процесса

В ряде случаев интерес представляют характеристики кинематического возмущения, которые обеспечивают контакт в системе не только на промежутке установившегося движения, но и на промежутке переходного процесса. Для оценки

амплитуды динамической реакции на промежутке переходного процесса требуется дополнительная информация о структуре решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. При рассмотрении класса устойчивых линейных систем второго порядка решение дифференциального уравнения формируется из функций вида $e^{-\alpha t}$, $te^{-\alpha t}$, $e^{-\alpha t} \sin \beta t$, $e^{-\alpha t} \cos \beta t$, $\cos \beta t$, $\sin \beta t$ в зависимости от параметров модели. При условии малости коэффициентов вязкого трения динамическая компонента реакции имеет вид:

$$N^\Delta = A_1 \left(B_1(\omega_1) e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \phi_1(\omega_1)) + B_2(\omega_1) \sin(\omega_1 t + \phi_1(\omega_1)) \right), \quad (28)$$

где ω_1 , A_1 - частота и амплитуда кинематического возмущения, $B_1(\omega_1)$, $B_2(\omega_1)$, $\phi_1(\omega_1)$ - некоторые функции от ω_1, α, β , - константы, определяемые параметрами системы.

На основе представления динамической компоненты реакции можно построить функцию

$$A_q(\omega_1) = |B_1(\omega_1)| + |B_2(\omega_1)|. \quad (29)$$

Для такой функции будет справедливо:

$$\frac{\max_{t \geq 0} |N^\Delta(t)|}{A_1} < A_q(\omega_1). \quad (30)$$

В дальнейшем будем называть функцию $A_q(\omega_1)$ амплитудно-частотной квази характеристической системы. Такая функция при условии, что характеристические корни соответствующего дифференциального уравнения системы имеют отрицательные вещественные части и ненулевые мнимые позволяет оценить отношение максимальной амплитуды динамической компоненты контактной реакции к модулю кинематического возмущения.

Пусть рассматривается контакт двух систем с малыми силами трения.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m_1 \ddot{X}_1^{(1)\Delta}}{k_1} + \frac{p_1 \dot{X}_1^{(1)\Delta}}{k_1} + X_1^{(1)\Delta} = z_1(t) - \frac{N^\Delta}{k_1} \\ \frac{m_2 \ddot{X}_2^{(1)\Delta}}{k_2} + \frac{p_2 \dot{X}_2^{(1)\Delta}}{k_2} + X_2^{(1)\Delta} = z_2(t) + \frac{N^\Delta}{k_2} \\ X_2^{(1)\Delta} = X_1^{(1)\Delta} \\ \dot{X}_1^{(1)\Delta} \Big|_{t=0} = 0, \dot{X}_2^{(1)\Delta} \Big|_{t=0} = 0 \\ X_1^{(1)\Delta} \Big|_{t=0} = 0, X_2^{(1)\Delta} \Big|_{t=0} = 0 \end{array} \right. \quad (31)$$

Предположим, что для данной динамической компоненты контактной реакции N^Δ функция $A_\omega(\omega_1)$ является амплитудно-частотной характеристикой, а функция $A_q(\omega_1)$ является квази характеристикой. В отличие от амплитудно-частотной характеристики функция $A_q(\omega_1)$ позволяет оценить решение на всей временной области. Пусть величина N^Σ является статической реакцией. Кинематическое воздействие на систему имеет вид:

$$z_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t), z_2(t) = 0. \quad (32)$$

Тогда достаточные условия отсутствия критических точек с нулевой полной контактной реакцией во всей временной области имеют вид:

$$A_q(\omega_1) \cdot A_1 \leq |N^\Sigma|. \quad (33)$$

Представленное неравенство может служить достаточным условием контактного движения механической системы на всей временной области, и на промежутке переходного процесса, и на промежутке установившегося движения. Отметим, что рассматриваемая система в начальный момент времени находится в положении равновесия и неподвижна.

Рассмотрим пример контакта двух систем под воздействием кинематического возмущения. Характеристики систем представлены в соответствии с таблицей 2.

Таблица 2. Характеристики систем в динамическом контакте

Название параметра\название системы	Элементарная система 1	Элементарная система 2
H - точка привязки, м.	0	0
Δl_0 Длина упругого элемента, м.	0	0
k - жесткость упругого элемента, Н./м.	1000	1
p - коэффициент вязкого трения, кг./с.	0.1-е8	5
m – масса твердого тела системы, кг.	1	0.5
F -сила веса, Н.	-9.8	-4.9

Данные системы учитывают силы трения. Кинематическое воздействие на механическую систему приводит к возникновению переходного процесса, который благодаря силам трения затухает через некоторое время.

Существование оценки максимальной амплитуды динамической реакции для выбранных параметров кинематического возмущения позволяет построить зависимость оценок от частоты при фиксированной амплитуде кинематического возмущения и определить интервалы частот, при которых в системе реализуется контакт.

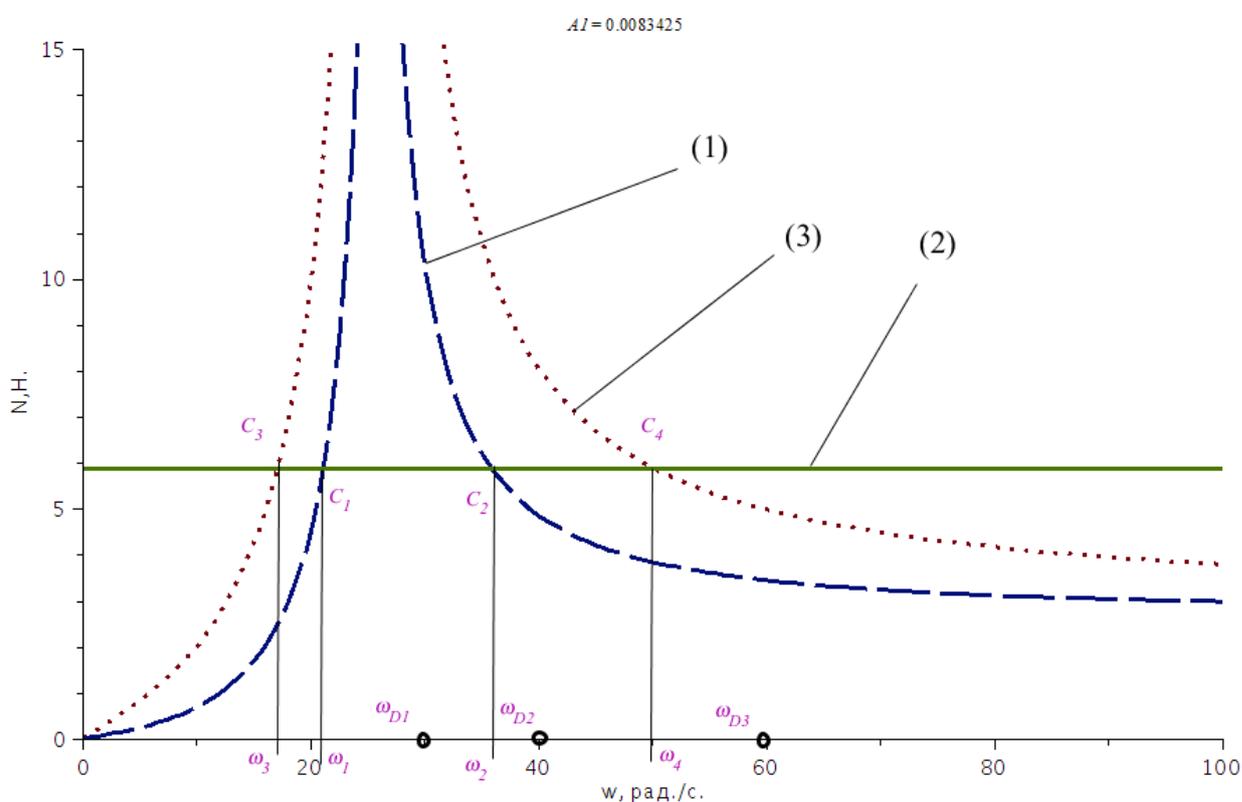


Рис. 8. Оценка амплитуды динамической реакции. 1 – оценка амплитуды на основе АЧХ системы с учетом трения на промежутке установившегося движения, 2 – величина статической реакции, 3- оценка амплитуды системы без трения на основе квази характеристики.

В соответствии с рисунком 8 представлена зависимость от частоты кинематического возмущения оценок амплитуд динамической реакции на основе амплитудно-частотной характеристики и квази-характеристики. Оценка на основе амплитудно-частотной характеристики представлена кривой 1, оценка на основе квази-характеристики представлена кривой 2. Статическая реакция представлена прямой 3. Пересечение оценок с уровнем статической реакции в точках C_1, C_2, C_3, C_4 определяет критические частоты внешнего воздействия $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ при фиксированной амплитуде A_1 внешнего возмущения. Критические частоты ω_1, ω_2 полученные в результате пересечения оценки на основе АЧХ системы и статической реакции в точках C_1, C_2 определяют два частотных диапазона $[0, \omega_1) \cup (\omega_2, \infty)$, в которых обеспечивается контакт для установившегося режима колебания системы. Однако, контакт на промежутке переходного процесса не может быть гарантирован. Для того, чтобы обеспечить контакт во всей временной области процесса необходимо рассмотреть диапазон частот $[0, \omega_3) \cup (\omega_4, \infty)$. Критические частоты ω_3, ω_4 полученные в результате пересечения оценки на основе квази-характеристики системы и статической реакции в точках C_3, C_4 .

Возможность определить по любой амплитуде внешнего возмущения частотные диапазоны допустимых вариантов движения системы позволяет определить множество амплитуд и частот, которые обеспечивают необходимый вариант допустимого движения системы.

В соответствии с рисунком 9 представлены линии уровня статической реакции для функции оценок амплитуд динамической компоненты контактной реакции как функции частоты и амплитуды кинематического возмущения системы.

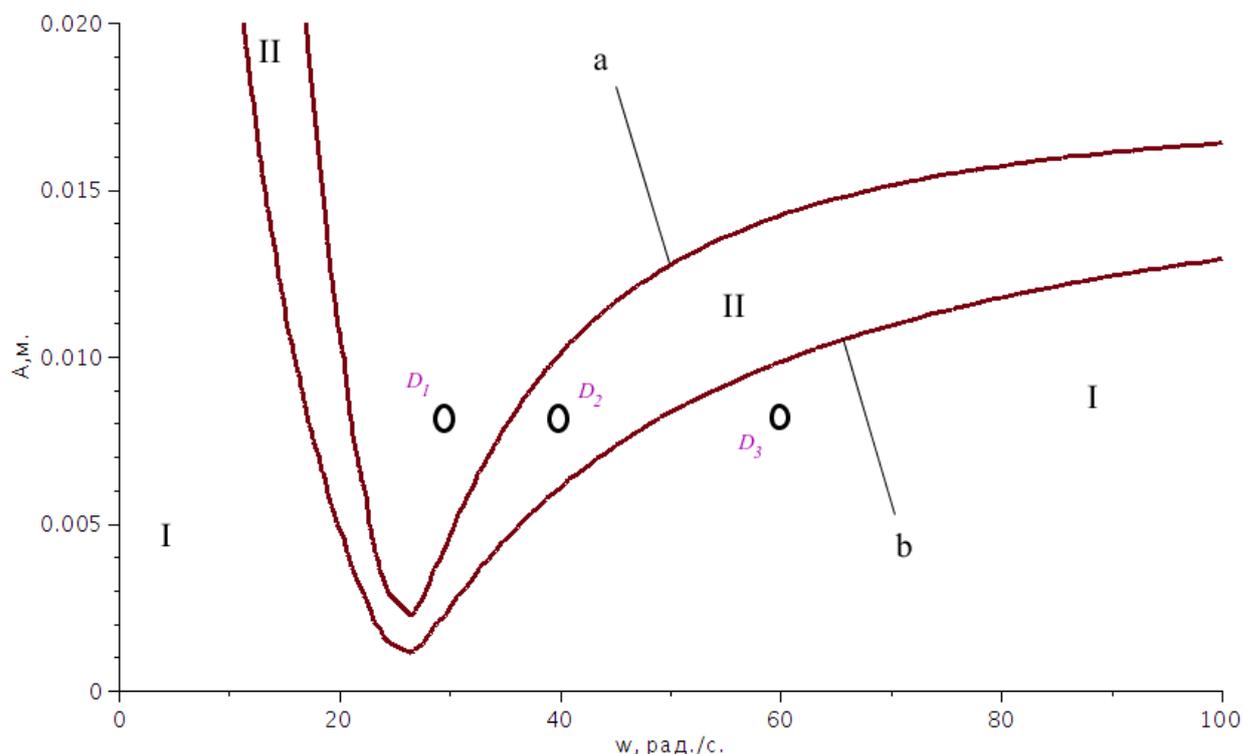


Рис. 9. Множество допустимых частот и амплитуд. а – линия уровня на основе амплитудно-частотной характеристики, б – линия уровня на основе квазихарактеристики. I – область параметров кинематического возмущения обеспечивающих контакт на всей временной области, II – область параметров возмущения обеспечивающих контакт на промежутке установившегося движения с возможным нарушением контакта на промежутке переходного процесса

В соответствии с рисунком 9 кривая (а) представляет собою множество решений ω_1, A_1 уравнения:

$$\frac{A_{N^\Delta}(\omega_1)}{z_1} \cdot A_1 = |N^\Sigma|, \quad (34)$$

где ω_1, A_1 - частота и амплитуда кинематического возмущения, $\frac{A_{N^\Delta}(\omega_1)}{z_1}$ - амплитудно-частотная характеристика, N^Σ - статическая реакция. Множество допустимых режимов определяются областью точек с координатами (ω_1, A_1) , для которых справедливо неравенство:

$$\frac{A_{N^\Delta}(\omega_1)}{z_1} \cdot A_1 \leq |N^\Sigma|. \quad (35)$$

В соответствии с рисунком 9 область допустимых процессов на промежутке установившегося движения представлена объединением областей I и II. Процессы, для

которых выполнены достаточные условия движения в контакте на всей временной области, представлены областью I. В соответствии с рисунком 9 точки D_1, D_2, D_3 с координатами (30;0,0083), (40;0,0083), (60;0,0083) представляют характерные варианты динамической реакции.

Рассмотрим характерные траектории, которые соответствуют точкам D_1, D_2, D_3 в области параметров. График динамической реакции для процесса, который соответствует точке D_1 , представлен на рисунке 10 кривой 1. График данной функции имеет критические точки и на промежутке переходного процесса и на промежутке установившегося движения. Такая траектория является недопустимой.

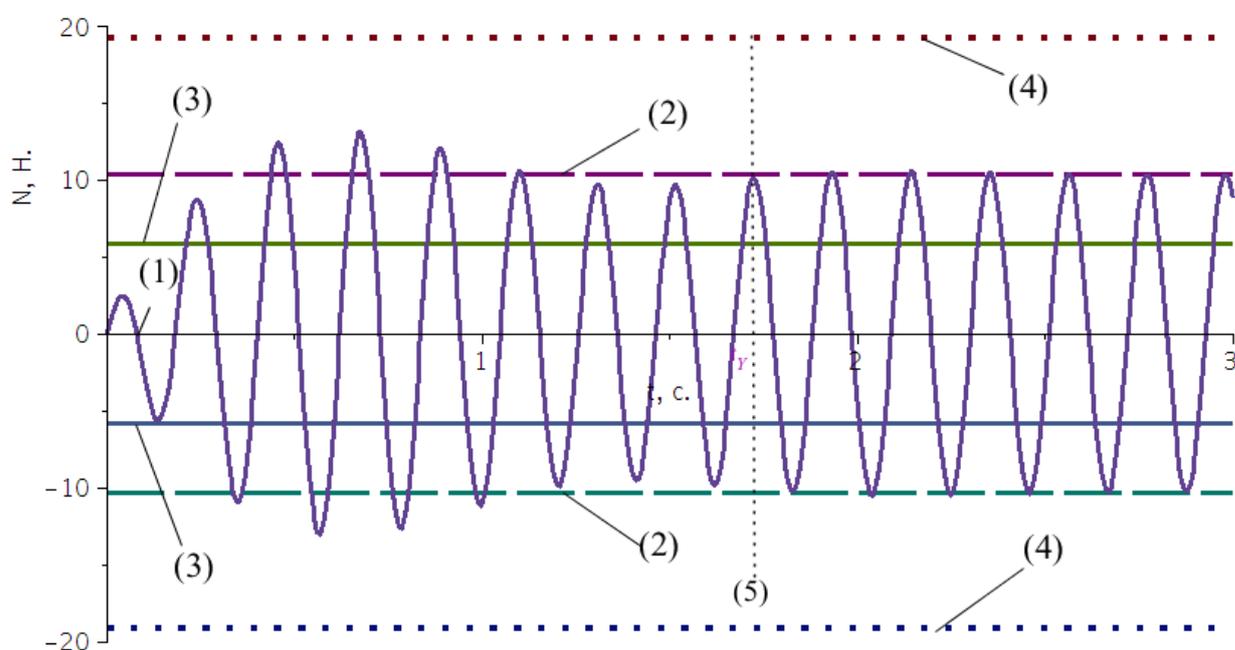


Рис. 10. Динамическая компонента контактной реакции для $A_1 = 0.0083 \text{ э.}$, $\omega_1 = 30 \text{ д} \cdot \text{р} \cdot \text{ä.} / \text{н.}$,

1 – график динамической компоненты реакции контакта, 2-оценка амплитуды установившегося режима на основе амплитудно-частотной характеристики, 3-величина статической реакции, 4-оценка амплитуды реакции на основе квази характеристики, 5 – условный момент разделения промежутков переходного и установившегося процессов.

Траектория системы, которая соответствует точке параметров D_2 представлена в соответствии с рисунком 11 кривой 1. Оценка амплитуды колебания на основе амплитудно-частотной характеристики системы представлена уровнем 2. Статическая реакция соответствующая начальным условиям отображена прямой линией 3. На промежутке переходного процесса кривая динамической реакции 1 пересекает уровни

статической реакции 3. На промежутке установившегося движения пересечения динамической реакции уже не происходит. Зазор не возможен в установившемся режиме, но возможен в промежутке переходного процесса. Уровень оценки на основе квази-характеристики 4 всегда больше по модулю уровня оценки на основе амплитудно-частотной характеристики 2.

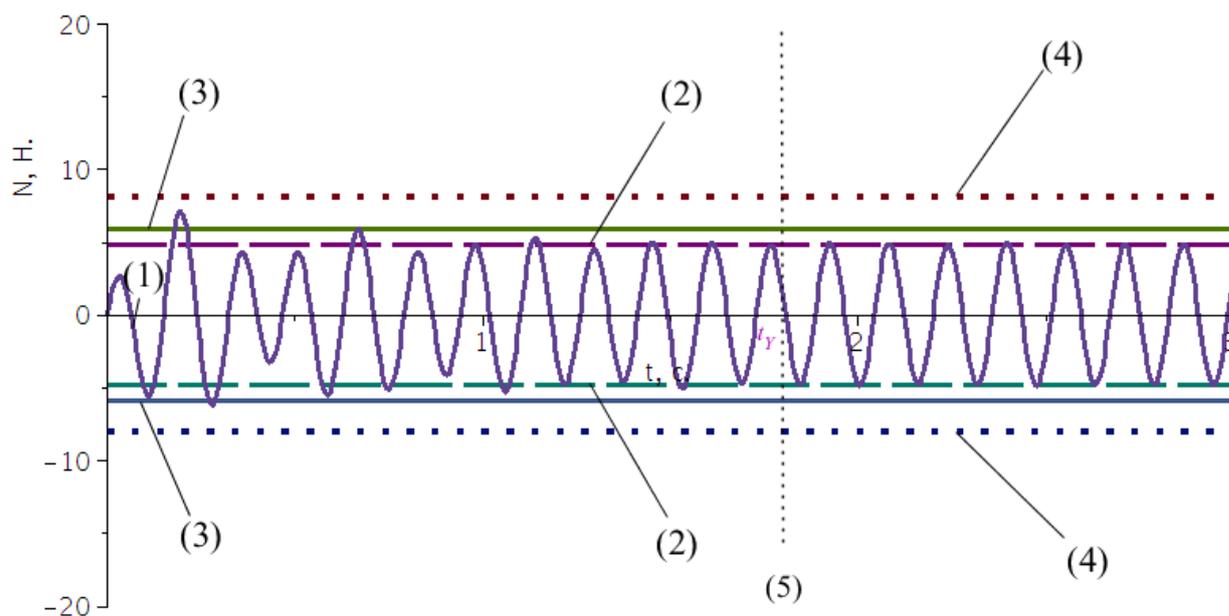


Рис. 11. Динамическая компонента контактной реакции для $A_1 = 0.0083 \ddot{\epsilon}$, $\omega_1 = 40 \ddot{d}r\ddot{a}./\dot{n}$,

1 – график динамической компоненты реакции контакта, 2-оценка амплитуды установившегося режима на основе амплитудно-частотной характеристики, 3-величина статической реакции, 4-оценка амплитуды реакции на основе квази характеристики, 5 – условный момент разделения промежутков переходного и установившегося процессов.

Точке параметров D_3 из области I соответствует динамическая реакция, которая представлена на рисунке 12 графиком 1. Уровень статической реакции 3 находится выше уровня оценки на основе квази-характеристики 4 для всей временной области. Для такой траектории движения системы возникновение зазора невозможно.

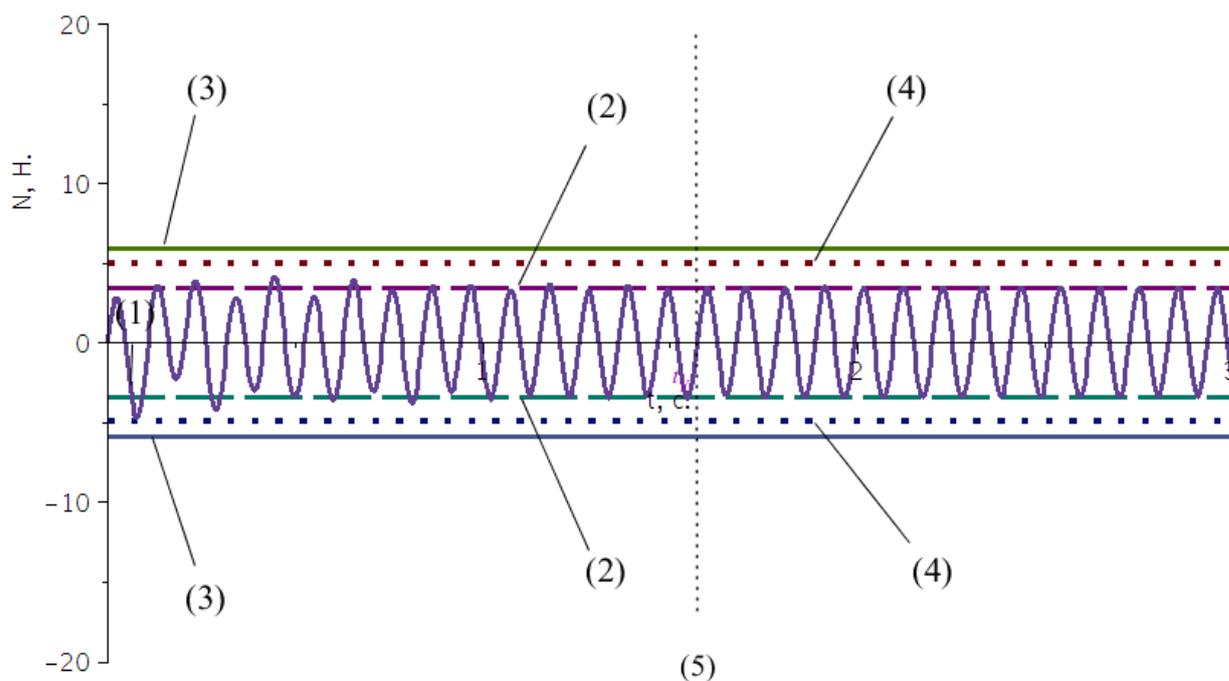


Рис. 12. Динамическая компонента контактной реакции для $A_1 = 0.0083 \text{ э.}$, $\omega_1 = 60 \text{ д.р.д. / н.}$ 1

– график динамической компоненты реакции контакта, 2-оценка амплитуды установившегося режима на основе амплитудно-частотной характеристики, 3-величина статической реакции, 4-оценка амплитуды реакции на основе квази характеристики, 5 – условный момент разделения промежутков переходного и установившегося процессов.

Представленные три рисунка 10, 11, 12 изображают характерные траектории из трех областей, на которые разбивают множество параметров кривые уровни оценок a и b в соответствии с рисунком 9. В областях параметров I и II можно гарантировать отсутствие зазора для переходного или установившегося динамического процесса. В остальной области нельзя гарантировать реализацию движения с зазором. Можно лишь допустить, что с ростом амплитуды и частоты зазор реализуется в области ограниченной кривой a .

Графические материалы и аналитические выкладки частично подготовлены с использованием программы Maple компании Waterloo Maple Inc.

Исследования выполнены по гранту в рамках федеральной целевой программы «Научные и педагогические кадры Инновационной России» на 2012 – 2013 г.г. (мероприятие 1.3.2. – естественные науки) №14.132.21.1362.

Заключение.

Представленное исследование позволяет сделать ряд предварительных выводов:

1. Предлагается метод определения параметров движения модельной механической системы, обеспечивающих неударивающий контакт элементов объекта в виде составного твердого тела. Критерием отсутствия зазора между элементами составного твердого тела служит положительность полной контактной реакции как функции времени, параметров механической системы и внешнего кинематического воздействия. Предполагается, что достаточным условием сохранения контакта является положительность реакции в контакте, а критическим состоянием в определенный момент времени является равенство полной контактной реакции нулю. Множеством критических параметров выступают решения уравнения, представляющего собой равенство динамической контактной реакции полной контактной реакции взятой с минусом. Множество параметров, которые обеспечивают неравенство нулю полной контактной реакции, описывается условием, что модуль динамической компоненты статической реакции строго меньше модуля статической компоненты контактной реакции на временном промежутке переходного или установившегося движения системы.

2. Предложенный метод позволяет определить множество амплитуд и частот кинематического возмущения, для которых сохраняется контакт на промежутке установившегося процесса. При оценке динамической компоненты полной реакции, при соответствующих условиях на параметры системы, используется амплитудно-частотная характеристика. Аналитическое выражение неравенства модулей статической и динамической компоненты позволяет описать область параметров среди множества всевозможных амплитуд и частот кинематического воздействий, которые обеспечивают отсутствие зазора в процессе движения системы в режиме установившегося колебания.

3. Предложенный метод позволяет определить множество амплитуд и частот кинематического возмущения, для которых сохраняется контакт на промежутке переходного процесса. При оценке динамической компоненты реакции используется информация о явном аналитическом представлении динамической компоненты в виде суммы гармонических и экспоненциально-гармонических затухающих слагаемых. Соответствующие аналитические выражения позволяют получать множество амплитуд и частот кинематического воздействия на системы, при которых реализуется движения элементов твердого тела в контакте.

4. Полученные области амплитуд и частот, при которых не возможен зазор на соответствующем интервале переходного или установившегося режима, являются избыточными. Это означает, что во множестве, которое является дополнением к обозначенной области параметров, не обязательно реализуется зазора. Причиной служит грубость оценки модуля динамической реакции на промежутке переходного процесса и тот факт, что равенство полной контактной реакция не является достаточным условием для формирования зазора в системе.

5. Предложенная методика получения множества параметров кинематического возмущения, для которого обеспечиваются безразрывное движение, может быть распространена на системы с апериодическим движением и частично расширена на системы с несколькими степенями свободы с наличием многосоставного твердого тела. Основными этапами методики так же будут являться подзадачи: определение статической компоненты, определение динамической реакции; построение передаточной функции кинематического возмущения на динамическую компоненту; определение частот и амплитуд колебания из условия, что модуль динамической реакции строго меньше модуля статической компоненты на соответствующем задаче исследования временном интервале.

Список литературы

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2-х т. Т. I. Статика и кинематика. -М. : Наука, 1982. - 352 с.
2. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики: в 2 т. Т 2 Динамика / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Наука. 1983.-640 с.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Наука. 1986. - 516 с.
4. Левитский, Н.И. Колебания в механизмах / Н.И. Левитский. – М.: Наука, 1988. – 358 с.
5. Блехман, И.И. Вибрационное перемещение / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанилидзе. М.: Наука, 1964. - 410 с.
6. Сельвинский, В.В. Динамика контактного взаимодействия твердых тел.- Благовещенск: Изд-во Амурского государственного университета. 2009. –164 с.
7. Гончаревич, И.Ф. Теория вибрационной техники / И.Ф. Гончаревич, К.В. Фролов. - М.: Наука, 1981.-320 с.
8. Туранов Х.Т. Организационные особенности технологических процессов размещения грузов на открытом железнодорожном подвижном составе / Х.Т. Туранов, Н.В. Становова //Вестник УрГУПС. - 2009. - №1. С. 43

9. Смирнов А.Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. - М.: Стройиздат, 1984г, -415 с.
10. Ситов И.С., Елисеев А.В. Теоретические основы процессов взаимодействия материальной частицы с вибрирующей поверхностью с неударяющими связями.// Системы. Методы. Технологии. –Братск:БрГУ, 2012.-№4(16). С.17-28
11. Елисеев С.В., Елисеев А.В. Режимы подбрасывания материальной частицы на вибрирующей поверхности в модельной задаче с неударяющими связями. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. –Иркутск: ИрГУПС, 2012. №3(35). С. 86 - 96.
12. Елисеев С.В., Ситов И.С., Елисеев А.В. Движение материальной частицы с подбрасыванием на примере модельной задачи с неударяющими связями //Научный журнал «Машиностроение и безопасность жизнедеятельности». Муром. Выпуск №3/2012.с. 53-59.
13. Елисеев С.В., Ситов И.С., Елисеев А.В. Характеристики взаимодействия материальной частицы и поверхности колебания в зависимости от постоянной силы с учетом неударяющей связи // Техника и технологии новые перспективы развития: Материалы VII Международной научно-практической конференции(26.11.2012). -М.: Спутник+. 2012.248 с.