

Синтез квазиоптимальной траектории движения беспилотного летательного аппарата

12, декабрь 2013

DOI: 10.7463/1213.0646471

Велищанский М. А.

УДК 519.71, 62-50

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

mathmod@bmstu.ru

Введение

Одной из известных задач для беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) является задача автоматического построения пространственных траекторий, проходящих через заданные путевые точки [1, 2]. Задача синтеза траекторий, удовлетворяющих наложенным на переменные состояния и управления ограничениям, достаточно сложна. Для нахождения требуемых траекторий достаточно широко используется подход, основанный на концепции обратных задач динамики [4], включающий два этапа: задание кинематической траектории движения объекта и определение управлений, реализующих данную траекторию. Преимуществом данного подхода является возможность непосредственно сформировать желаемую траекторию, удовлетворяющую заданным ограничениям, и исследовать ее реализуемость. Для проектирования сложных пространственных траекторий можно использовать метод [1, 2], основанный на компоновке траектории из определенного набора более простых траекторий, соответствующих типовым маневрам (смена эшелона, разворота, прямолинейного движения и т.д.). Построение типовых маневров может также базироваться на концепции обратных задач динамики.

Для формирования программной траектории при известных граничных условиях на состояния и управления используют полиномиальный подход. При этом траектория ищется в классе полиномов заданной степени, коэффициенты которых определяются по известным значениям переменных состояния и управления БПЛА в граничных точках траектории. Для того, чтобы по заданной программной траектории найти реализующее ее программное управление, отображение "вход-выход" математической модели, описывающей движение БПЛА, должно быть обратимым. Под входом математической модели понимается управление, а под выходом — соответствующая данному управлению кинематическая траектория. Обратимость отображения "вход-выход" подразумевает, что для любой программной траектории

из заданного класса функций, удовлетворяющей заданным граничным условиям, найдется реализующее ее программное управление и наоборот, любому программному управлению будет соответствовать единственная кинематическая траектория, удовлетворяющая заданным граничным условиям.

При использовании 6-мерной модели движения БПЛА для задания программных траекторий можно использовать полиномы 5-й степени от времени [1, 2]. Для траекторий с монотонным изменением энергии вдоль траектории в качестве независимой переменной можно использовать полную механическую энергию и рассматривать полиномы 5-й степени, где в качестве независимой переменной вводится полная механическая энергия БПЛА [2].

Использовать энергии в качестве независимой переменной для построения программной траектории удобно в случае, когда не задано время перелета БПЛА в заданную точку, а известны лишь граничные условия в начальной и конечной точках траектории.

Использование времени в качестве независимой переменной для построения программной траектории является с одной стороны, более удобным, но с другой стороны, выбор времени перелета оказывает существенное влияние как на форму траектории так и на динамику движения БПЛА. Поэтому нахождение времени перелета, обеспечивающего выполнение требуемых ограничений на состояние и управления является отдельной важной задачей.

Целью данной работы является разработка алгоритма, обеспечивающего нахождение минимально возможного времени маневра БПЛА, при котором построенные по изложенной в [1] методике кинематическая траектория и программное управление удовлетворяли бы наложенным на переменные состояния и управления ограничениям. Аналитическое решение указанной задачи в общем случае получить не удастся, однако ее решение можно найти с использованием методов численной оптимизации.

1. Получение программного движения

Следуя [1], приведем математическую модель движения БПЛА, метод получения программной траектории и реализующего ее программного управления.

Математическая модель движения БПЛА как материальной точки имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (n_x - \sin \vartheta)g, & \dot{H} &= V \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= \frac{(n_y \cos \gamma - \cos \vartheta)g}{V}, & \dot{L} &= V \cos \vartheta \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= -\frac{n_y g \sin \gamma}{V \cos \vartheta}, & \dot{Z} &= -V \cos \vartheta \sin \psi,\end{aligned}\tag{1}$$

где V — путевая скорость; ϑ — угол наклона траектории; ψ — угол курса; H — высота; L — продольная дальность; Z — боковая дальность; n_x — продольная перегрузка; n_y — поперечная перегрузка; γ — угол крена; g — ускорение свободного падения. При этом высота H , продольная дальность L и боковая дальность Z представляют собой координаты

положения центра масс БПЛА в нормальной земной неподвижной системе координат, а V , ϑ и ψ задают вектор скорости в траекторной системе координат.

В качестве управлений рассматривают перегрузки n_x , n_y и угол крена γ .

Требуется построить траекторию полета БПЛА приводящую БПЛА из некоторого начального состояния

$$(H_0, L_0, Z_0, V_0, \vartheta_0, \psi_0), \quad (n_{x0}, n_{y0}, \gamma_0) \quad (2)$$

в заданное конечное состояние

$$(H_*, L_*, Z_*, V_*, \vartheta_*, \psi_*), \quad (n_{x*}, n_{y*}, \gamma_*) \quad (3)$$

за время t_* , а так же рассчитать реализующее ее программное управление.

Решение поставленной задачи может быть получено на основе приведения системы (1) к каноническому виду и использования концепции обратных задач динамики [3, 4]. Для этого в качестве новых переменных состояний выбирают следующие функции:

$$\begin{aligned} y_1 &= H, & y_2 &= L, & y_3 &= Z, \\ y_4 &= V \sin \vartheta, & y_5 &= V \cos \vartheta \cos \psi, & y_6 &= -V \cos \vartheta \sin \psi, \end{aligned} \quad (4)$$

а в качестве новых управлений, называемых виртуальными, выбирают

$$v_1 = n_x, \quad v_2 = n_y \cos \gamma, \quad v_3 = n_y \sin \gamma.$$

Соотношения (4) в области $\Omega = \{|\vartheta| < \frac{\pi}{2}, |\psi| < \pi, V > 0\}$ задают гладкую невырожденную замену переменных. Обратная к (4) замена переменных имеет вид

$$\begin{cases} H = y_1, & L = y_2, & Z = y_3, \\ V = \sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2}, & \sin \vartheta = \frac{y_4}{\sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2}}, \\ \sin \psi = -\frac{y_6}{\sqrt{y_5^2 + y_6^2}}, & \cos \psi = \frac{y_5}{\sqrt{y_5^2 + y_6^2}}. \end{cases} \quad (5)$$

В новых переменных система (1) примет вид, называемый каноническим [3]

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_4, \\ \dot{y}_4 = -g + v_1 g \sin \vartheta + v_2 g \cos \vartheta, \\ \dot{y}_2 = y_5, \\ \dot{y}_5 = v_1 g \cos \vartheta \cos \psi - v_2 g \sin \vartheta \cos \psi + v_3 g \sin \psi, \\ \dot{y}_3 = y_6, \\ \dot{y}_6 = -v_1 g \cos \vartheta \sin \psi + v_2 g \sin \vartheta \sin \psi + v_3 g \cos \psi, \end{cases} \quad (6)$$

где ϑ и ψ выражаются согласно (5). Исключая из системы (6) переменные y_4 , y_5 , y_6 , получают систему трех дифференциальных уравнений, разрешимых в области Ω относительно

управлений:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{(\ddot{y}_1 + g) \sin \vartheta + \ddot{y}_2 \cos \vartheta \cos \psi - \ddot{y}_3 \cos \vartheta \sin \psi}{g}, \\ v_2 = \frac{(\ddot{y}_1 + g) \cos \vartheta - \ddot{y}_2 \sin \vartheta \cos \psi + \ddot{y}_3 \sin \vartheta \sin \psi}{g}, \\ v_3 = \frac{\ddot{y}_2 \sin \psi + \ddot{y}_3 \cos \psi}{g}. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, для любой траектории движения, заданной в виде

$$y_i = y_i(t), \quad t \in [0, t_*], \quad i = \overline{1, 3}, \quad (8)$$

уравнения (7) позволяют найти управления $v_i = v_i(t)$, реализующие данную траекторию. Необходимые для построения программной траектории (8) граничные условия на $y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i, i = \overline{1, 3}$, могут быть получены из (2)-(3) с использованием (4) и (6).

В качестве функций $y_i(t)$ используют многочлены пятой степени следующего вида:

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^2 \frac{y_{i0}^{(j)}}{j!} t^j + \sum_{j=1}^3 c_{ij} t^{2+j}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (9)$$

где неизвестные коэффициенты $c_{ij}, i, j = \overline{1, 3}$, однозначно определяются из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} \Delta^3 c_{i0} + \Delta^4 c_{i1} + \Delta^5 c_{i2} = y_{i*} - y_{i0} - \dot{y}_{i0} \Delta - 0,5 \ddot{y}_{i0} \Delta^2, \\ 3\Delta^2 c_{i0} + 4\Delta^3 c_{i1} + 5\Delta^4 c_{i2} = \dot{y}_{i*} - \dot{y}_{i0} - \ddot{y}_{i0} \Delta, \\ 6\Delta c_{i0} + 12\Delta^2 c_{i1} + 20\Delta^3 c_{i2} = \ddot{y}_{i*} - \ddot{y}_{i0}, \end{cases} \quad i = \overline{1, 3},$$

где $\Delta = t_* \neq 0$, что гарантирует существование и единственность решений данных систем уравнений.

2. Оптимизационный подход к выбору времени маневра БПЛА

Как показывают результаты моделирования [1], выбор времени маневра оказывает серьезное влияние как на вид программной траектории, так и на реализующее ее программное управление. Кроме того, как правило, заданы ограничения на переменные состояния и управления. Так как граничные условия полностью определяют вид полинома (9) и получаемых из него программной траектории (8) и программных управлений (7), то возникает задача выбора времени маневра таким образом, чтобы удовлетворялись наложенные на переменные состояния и управления ограничения.

Рассмотрим задачу минимизации времени маневра БПЛА t_* , отвечающего заданным граничным условиям (2), (3), при наличии следующих ограничений на переменные состояния:

$$\begin{aligned} H &\in [H_{\min}, H_{\max}], \quad L \in [L_{\min}, L_{\max}], \quad Z \in [Z_{\min}, Z_{\max}], \\ V &\in [V_{\min}, V_{\max}], \quad \vartheta \in [\vartheta_{\min}, \vartheta_{\max}], \quad \psi \in [\psi_{\min}, \psi_{\max}], \end{aligned} \quad (10)$$

и управления

$$n_x \in [n_{x \min}, n_{x \max}], \quad n_y \in [n_{y \min}, n_{y \max}], \quad \gamma \in [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]. \quad (11)$$

Обозначим через T множество, допустимых значений времени маневра t_* , при которых построенные программные траектория и управления удовлетворяют ограничениям (10), (11). Будем предполагать, что множество T есть отрезок.

Пусть множества U и S задаются неравенствами (10) и (11) соответственно. Таким образом получаем следующую задачу одномерной минимизации при наличии ограничений:

$$t_*|_{u \in U, s \in (\Omega \cap S), t_* \in T} \rightarrow \min, \quad (12)$$

где $u = (n_x, n_y, \gamma)$ вектор управлений, $s = (H, L, Z, V, \vartheta, \psi)$ вектор переменных состояния.

Поскольку в действительности множество T неизвестно, необходимо получить оценку $\hat{T}$, которая будет использоваться при численном решении задачи минимизации (12). Положим $\hat{T} = [\hat{t}_0, \hat{t}_*]$.

В качестве нижней границы $\hat{t}_0$ отрезка $\hat{T}$ можно использовать время, затрачиваемое БПЛА при движении с максимально допустимой скоростью по прямой из начального в конечное положение:

$$\hat{t}_0 = \frac{\sqrt{(L_* - L_0)^2 + (H_* - H_0)^2 + (Z_* - Z_0)^2}}{V_{\max}}.$$

При времени маневра, меньшем указанного значения, заведомо будут нарушены ограничения по скорости, так что $\hat{t}_0$ не превышает минимально допустимое время маневра.

Определение верхней границы $\hat{t}_*$ — более сложная задача, предполагающая учет различных факторов, таких как граничные условия, ограничения на переменные состояния и управления. В зависимости от вида маневра можно использовать разные способы определения $\hat{t}_*$. Наиболее просто это время можно оценить для маневров смены эшелона и прямолинейного движения:

- при смене эшелона $\hat{t}_* = \frac{|(H_* - H_0)|}{V_{\min}};$
- при прямолинейном движении $\hat{t}_* = \frac{\sqrt{(L_* - L_0)^2 + (Z_* - Z_0)^2}}{V_{\min}}.$

Для других видов маневров наиболее общим способом нахождения $\hat{t}_*$ является метод поразрядного поиска. В этом случае рассматривается последовательность моментов времени $\hat{t}_i = \hat{t}_0 + \Delta t \cdot i, i \geq 1$, для каждого момента времени рассчитывается траектория и проверяется выполнение ограничений. Поиск заканчивается, когда найдена допустимая траектория.

Заметим, что при решении задачи (12) множество $\hat{T}$ может не охватывать все множество допустимых значений времени маневра. Достаточно лишь, чтобы оно включало в себя искомого минимальное время маневра. Поэтому в качестве $\hat{t}_*$ может быть взято любое допустимое время маневра. Допустимое время маневра может быть известно, например, из заранее рассчитанной базы типовых маневров [1, 2]. Допустимая траектория может быть скомпонована из определенного набора маневров базы маневров. В этом случае допустимое время полета

также определяется как сумма времен типовых маневров. Отметим, что предлагаемый в данной статье алгоритм может быть использован для минимизации времени выполнения типовых маневров, входящих в базу.

Заметим, что задача (12) есть задача минимизации при наличии неявных ограничений. Заменим ее задачей безусловной оптимизации, для чего сформируем новый критерий

$$J(t_m) = \begin{cases} t_m, & u(t) \in U, \quad s(t) \in (\Omega \cap S), \quad t \in [0, t_m]; \\ \hat{t}_* + \sum_{i=1}^6 a_i \Delta s_i + \sum_{i=1}^3 b_i \Delta u_i, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (13)$$

где Δs_i — величина максимального по абсолютной величине отклонения i -й переменной состояния от допустимого диапазона (10); Δu_i — величина максимального по абсолютной величине отклонения i -го управления от допустимого диапазона (11); a_i, b_i — весовые множители.

Рассмотрим некоторые примеры решения поставленной оптимизационной задачи.

Пример 1. Найдём минимальное время маневра, представляющего собой разворот БПЛА на 175 градусов. Граничные условия для рассматриваемого маневра представлены в табл. 1, ограничения — в табл. 2.

Т а б л и ц а 1

Граничные условия в задаче разворота БПЛА на 175 градусов

	$V, \frac{\text{км}}{\text{ч}}$	ϑ , град	ψ , град	H , м	L , м	Z , м	n_x	n_y	γ , град
Начальное состояние	80	0	0	1000	0	0	0,0	1,0	0
Конечное состояние	80	0	175	1010	0	–150	0,0	1,0	0

Т а б л и ц а 2

Ограничения на состояние и управления в задаче разворота БПЛА на 175 градусов

	$V, \frac{\text{км}}{\text{ч}}$	ϑ , град	ψ , град	H , м	L , м	Z , м	n_x	n_y	γ , град
Минимальное значение	50	–89	–179	10	0	–2000	–3	0,2	–60
Максимальное значение	100	89	179	3000	3000	2000	3	6,0	60

Решение данной задачи проводилось в среде Matlab стандартным методом библиотеки оптимизации пакета, представляющего собой комбинацию методов золотого сечения и параболической интерполяции [7].

В качестве верхней границы времени маневра $\hat{t}_*$ выбрано время 11,5 с из базы маневров [1]. В результате численного решения задачи (12) найдено следующее минимальное значение времени маневра $t_{\min} = 9,85$ с. На рис. 1 представлены графики переменных состояния в зависимости от времени, на рис. 2 — графики управлений в зависимости от времени. На рис. 3 приведен график связи боковой дальности и продольной. При этом на

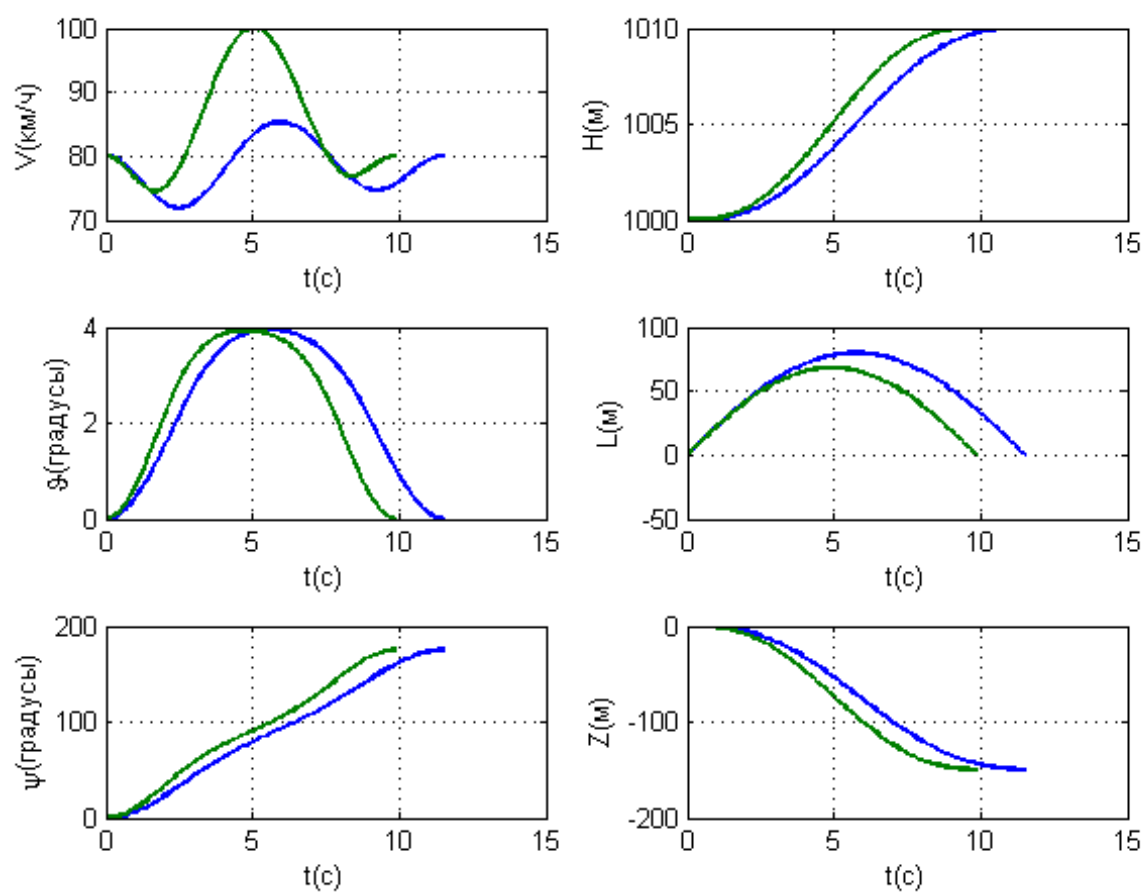


Рис. 1

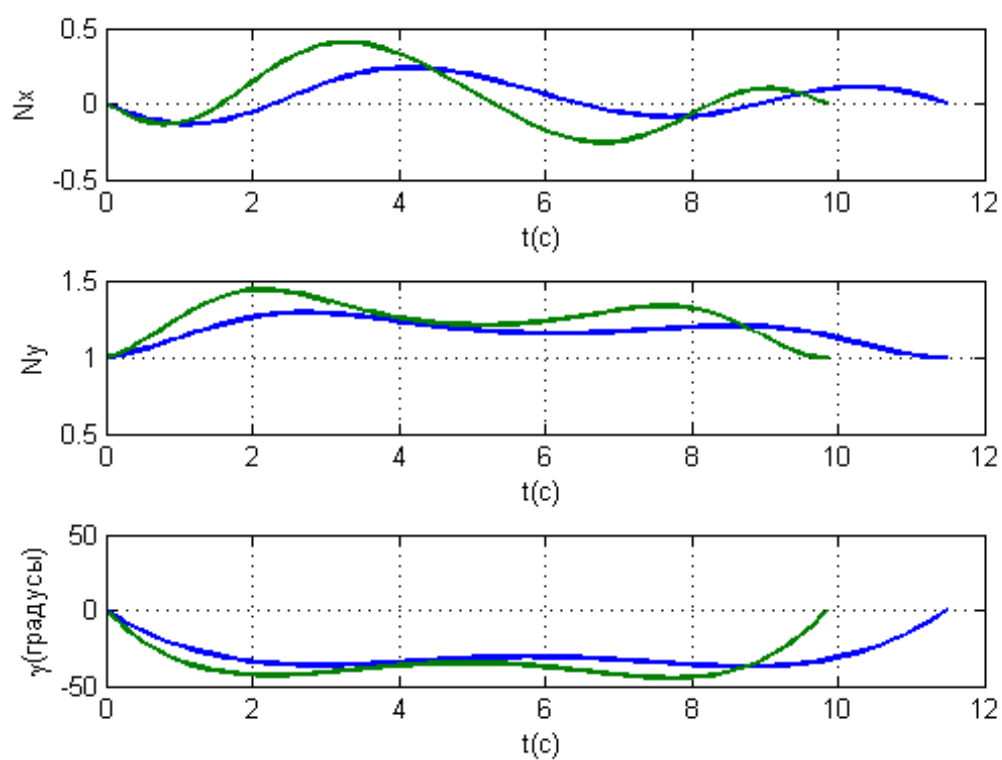


Рис. 2

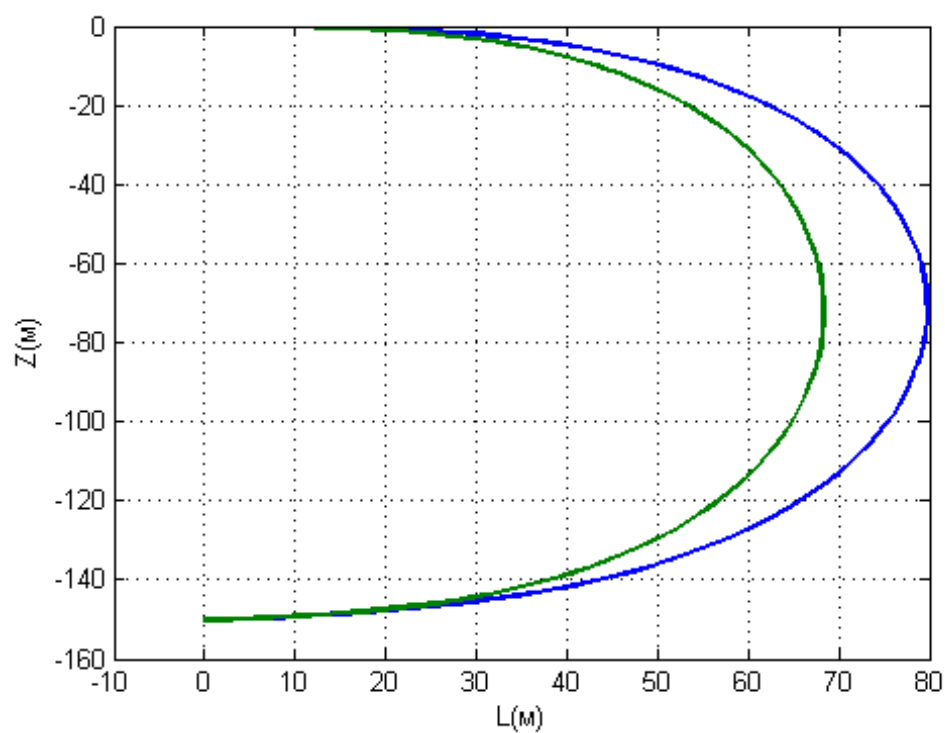


Рис. 3

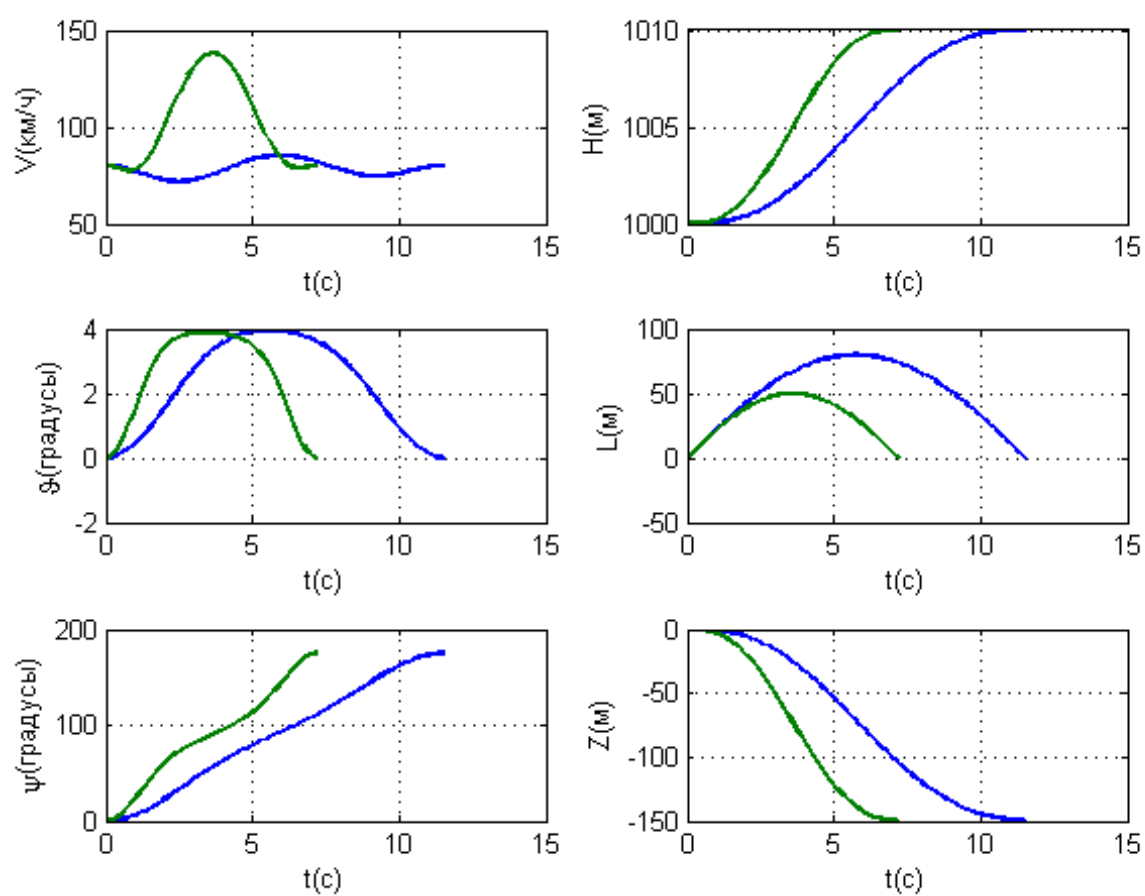


Рис. 4

рисунках синим цветом обозначены графики, соответствующие времени маневра $t = 11,5$ с, зеленым — времени маневра $t = 9,85$ с.

Ослабление ограничений на переменные состояния и управления приведет к уменьшению минимального допустимого времени полета. Так, при замене диапазона допустимых скоростей $V \in [50, 100]$ на диапазон $V \in [10, 140]$ минимальное время маневра составляет $t_{\min} = 7,19$ с. Графики переменных состояния и управлений в зависимости от времени представлены на рис. 4 и 5. На этих рисунках также приведены эталонные графики из базы маневров [1] (синий цвет). Из представленных графиков видно, что характер изменения переменных состояния и управлений существенно не поменялся, однако максимальное значение скорости V и максимальные значения поперечных перегрузок n_y возросли.

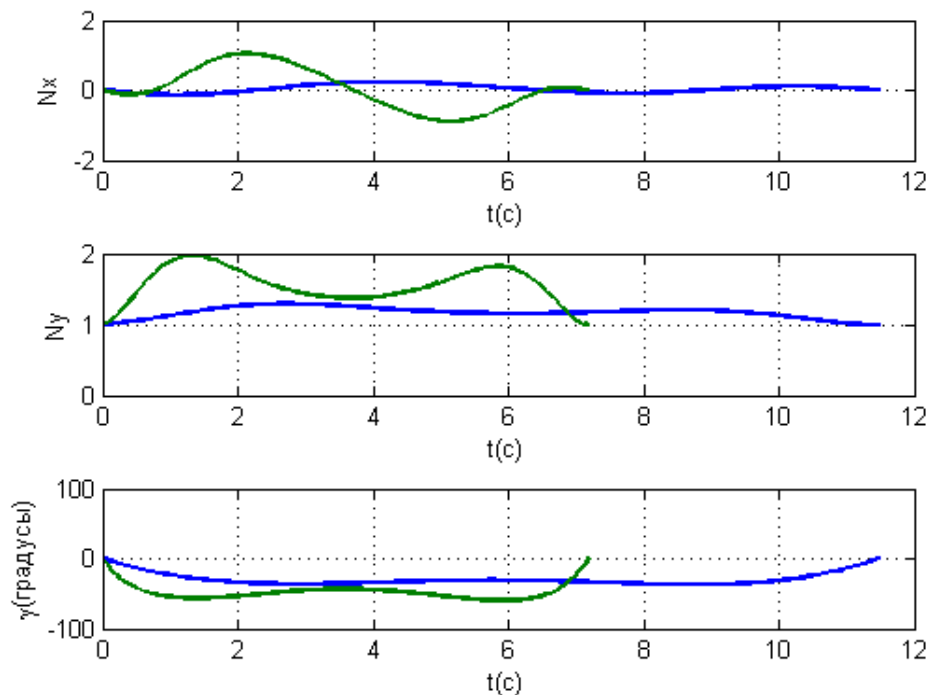


Рис. 5

Пример 2. Найдём минимальное время маневра, представляющего собой движение в вертикальной плоскости. Считаем, что движение происходит в плоскости $Z = 0$, так что $Z_0 = Z_* = \psi_0 = \psi_* = \gamma_0 = \gamma_* = 0$. Граничные условия для рассматриваемой задачи представлены в табл. 3 (взяты из [1]), ограничения — в табл. 4.

Таблица 3

Граничные условия в задаче движения БПЛА в вертикальной плоскости

	$V, \frac{\text{км}}{\text{ч}}$	$\vartheta, \text{град}$	$H, \text{м}$	$L, \text{м}$	n_x	n_y
Начальное состояние	100	0	100	0	0	1,0
Конечное состояние	105	0	400	800	0	1,0

Ограничения в задаче движения БПЛА в вертикальной плоскости

	$V, \frac{\text{км}}{\text{ч}}$	$\vartheta, \text{град}$	$H, \text{м}$	$L, \text{м}$	n_x	n_y
Минимальное значение	20	-89	10	0	-3	0,2
Максимальное значение	140	89	3000	3000	3	6,0

В качестве верхней границы времени маневра $\hat{t}_*$ выбрано время 30 с. В результате численного решения задачи найдено минимальное время маневра $t_{\min} = 26,17 \text{ с}$. На рис. 6 приведены графики переменных состояния в зависимости от времени, на рис. 7 — графики управлений в зависимости от времени. На рисунках также приведены синим цветом графики, соответствующие начальному допустимому времени полета.

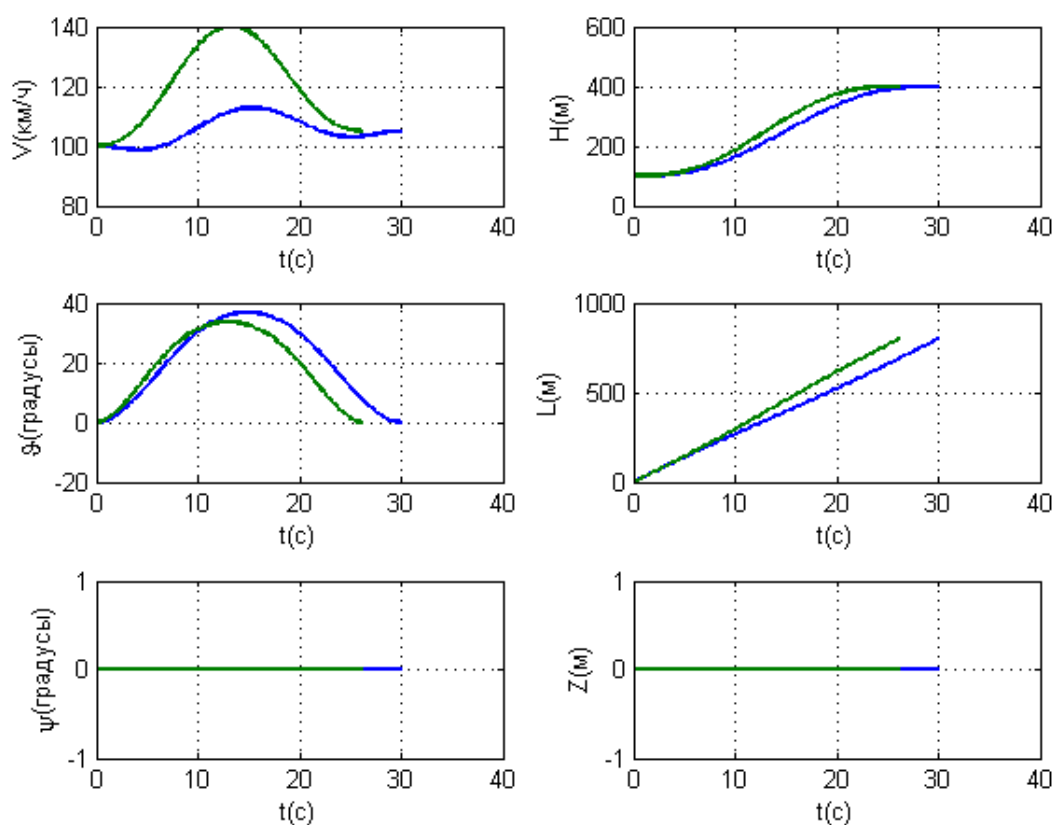


Рис. 6

3. Заключение

В работе рассмотрена задача минимизации времени выполнения маневра БПЛА при наличии ограничений на переменные состояния и управления. Решение задачи проводилось методами численного моделирования. Созданная по предложенному в работе алгоритму программа позволяет находить оценку времени переориентации $t_{\min}$ при указанных

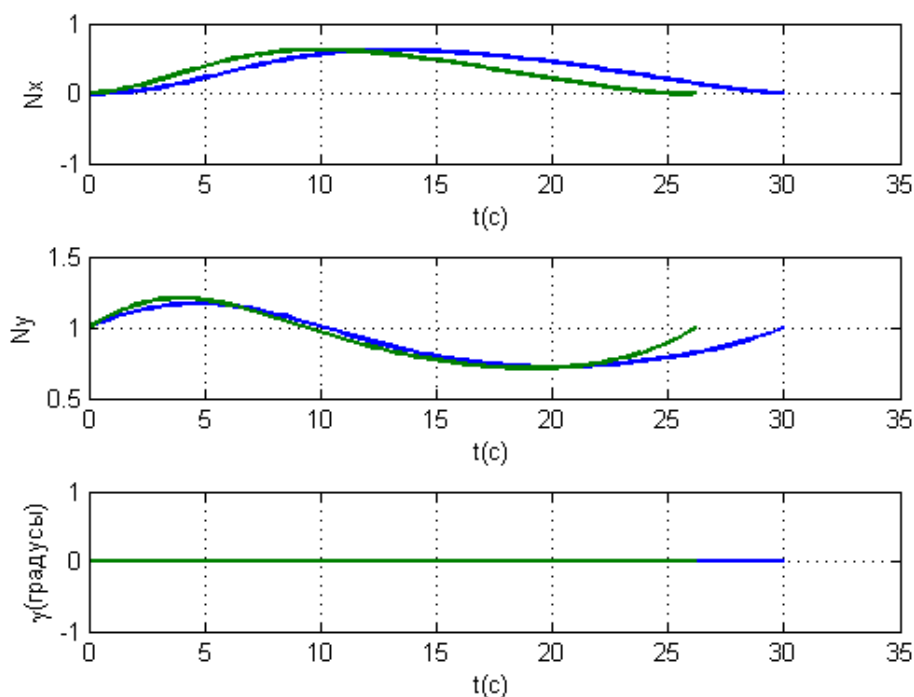


Рис. 7

ограничениях на переменные состояния и управления, а также строить соответствующую программную траекторию и реализующее ее программное управление.

Результаты численного моделирования показали, что полученные оценки минимального времени выполнения маневра $t_{\min}$ достаточно хорошо согласуются с эвристическими оценками времени маневра, приведенными в [1]. Применение предложенного алгоритма позволяет уменьшить время перелета на 5–10 %. Для усиления предложенного алгоритма предполагается в дальнейшем использовать подход, который заключается в добавлении к исходным полиномам (9) функций специального вида, не влияющих на выполнение граничных условий [5, 6]. Это позволяет расширить класс функций, с использованием которых ищется программная траектория, что, в свою очередь, позволяет выбором данных функций влиять на минимально допустимое время выполнения маневра. Этот подход также позволяет рассмотреть поставленную задачу при других критериях оптимизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 12-07-329 и 13-07-00743) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-3659.2012.1).

Список литературы

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Допустимые пространственные траектории беспилотного летательного аппарата в вертикальной плоскости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. №3. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/367724.html> (дата обращения: 04.03.2013).

2. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Планирование пространственного разворота беспилотного летательного аппарата // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2011. Спец. вып. «Энергетическое и транспортное машиностроение». С. 151–163.
3. Жевнин А.А., Крищенко А.П., Глушко Ю.В. Управляемость и наблюдаемость нелинейных систем и синтез терминального управления // Докл. АН СССР, 1982. Т. 266, № 4. С. 807–811.
4. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 328 с.
5. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Квазиоптимальная переориентация космического аппарата // Механика твердого тела. 2002. Вып. 32. С. 144–153.
6. Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 5. С. 156–163.
7. Forsythe G.E., Malcolm M.A., and Moler C.B. Computer Methods for Mathematical Computations. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1976.

**Synthesis of quasi-optimal trajectory
of an unmanned aerial vehicle**

12, December 2013

DOI: 10.7463/1213.0646471

Velishchanskiy M. A.

Bauman Moscow State Technical University
105005, Moscow, Russian Federation
mathmod@bmstu.ru

A problem of constructing spatial trajectories for unmanned aerial vehicles (UAV) and synthesis of program controls were considered. A nonlinear mathematical model of UAV movement as a material point along the trajectory was described. A kinematic trajectory is based on the time-dependent polynomials. Program control implementing this trajectory is based on the concept of inverse dynamic problems. The purpose of this paper is to determine the minimal time of UAV maneuver such that the constructed kinematic trajectory and control would satisfy the limits on the state variables and control. Numerical optimization methods were used to solve this problem. Results of numerical simulation were also presented.

References

1. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Dopustimye prostranstvennyye traektorii bespilotnogo letatel'nogo apparata v vertikal'noy ploskosti [Admissible spatial trajectories of the unmanned aerial vehicle in the vertical plane]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 3. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/367724.html>, accessed 04.11.2013.
2. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Planirovanie prostranstvennogo razvorota bespilotnogo letatel'nogo apparata [Planning of three-dimensional turn of unmanned flying vehicle]. *Vestnik MGTU im. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Mechanical Engineering], 2011, spec. is. "Energeticheskoe i transportnoe mashinostroenie" [Energy and transport engineering], pp. 151–163.
3. Zhevnin A.A., Krishchenko A.P., Glushko Yu.V. Upravlyaemost' i nablyudaemost' nelineynykh sistem i sintez terminal'nogo upravleniya [Controllability and observability of nonlinear systems and synthesis of terminal control]. *Doklady AN SSSR*, 1982, vol. 266, no. 4, pp. 807–811.

4. Krut'ko P.D. *Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem: nelineynye modeli* [Inverse problems of control system dynamics]. Moscow, Nauka, 1988. 328 p.
5. Velishchanskiy M.A., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Kvazioptimal'naya pereorientatsiya kosmicheskogo apparata [Quasi-optimal reorientation of spacecraft]. *Mekhanika tverdogo tela* [Rigid Body Mechanics], 2002, no. 32, pp. 144–153.
6. Velishchanskiy M.A., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Sintez algoritmov pereorientatsii kosmicheskogo apparata na osnove kontseptsii obratnoy zadachi dinamiki [Synthesis of spacecraft reorientation algorithms using the concept of the inverse dynamic problem]. *Izvestiya RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2003, no. 5, pp. 156–163. (English translation: *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 5, pp. 811–818.).
7. Forsythe G.E., Malcolm M.A., and Moler C.B. *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1976.