

УДК 534.113

**Колебания упругих призматических стержней под действием
нелинейных сил сухого трения**

Клюквин А.Д., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Газотурбинные и нетрадиционные энергоустановки»*

*Научный руководитель: Пожалостин А.А.,
д. т. н., профессор кафедры «Теоретическая механика»
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
bauman@bmstu.ru*

Известно, что при перемещении упругого тела по шероховатой поверхности возникает два типа движений: движение как твердого целого и нарастающие во времени колебания. Последние обусловлены наличием в характеристике коэффициента трения от скорости относительного движения двух поверхностей «падающего участка».

В настоящей работе показано, что этот эффект может наблюдаться при поперечных колебаниях упругого стержня. Например, при колебаниях шарнирно опертой упругой балки, вращающейся вокруг одного из своих закрепленных концов при непосредственном контакте с плоской шероховатой поверхностью.

Основные допущения, использованные в данной работе, состоя в следующем:

1. Колебания считаются малыми,
2. Материал стержня считается изотропным и однородным
3. Деформация поперечных сечений стержня отсутствует и для него полагается справедливым закон Гука.
4. Рассматриваются тонкие стержни, для которых сила трения не меняет своего направления в течение всего времени движения.

Дифференциальное уравнение для приведенного осциллятора по виду не отличается от уравнения вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы.

Для амплитуды вынужденных колебаний системы при используемом подходе получено приближенное аналитическое выражение.

Колебательная система изображена на рис. 1.

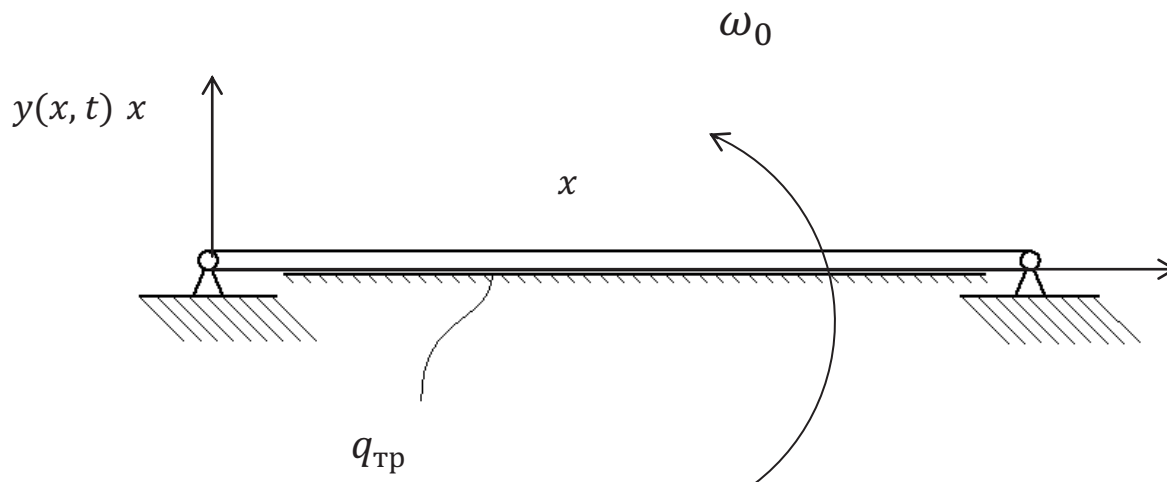


Рис.1. Схема исследуемой системы (система находится в горизонтальной плоскости)

Здесь $y(x, t)$ – перемещение материального сечения стержня, l – его длина, Ox – продольная ось, ω_0 – угловая скорость вращения стержня как твердого целого, μ_0 – погонная масса стержня, EI – жесткость на изгиб.

На стержень действует кулоновская сила сухого трения, интенсивность которой зависит от скорости движения сечения стержня относительно шероховатой поверхности стола и выражается следующей функцией:

$$q_{\text{тр}}(v) = f_0 - \alpha_0 v(x, t) + \beta_0 v^3(x, t) \quad (1)$$

Определим на первом этапе собственные функции этой однородной краевой задачи без трения. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня постоянной жесткости и постоянного поперечного сечения имеет вид:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = -\mu F_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) \quad (2)$$

Граничные условия: $y(0, t) = 0$, $y(l, t) = 0$, $M(0, t) = 0$, $M(l, t) = 0$, где $M(x, t)$ – изгибающий момент в сечении стержня. Так как

$$M(x, t) = EF_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, t)$$

то $\partial^2 y / \partial x^2(0, t) = 0$; $\partial^2 y / \partial x^2(l, t) = 0$.

Решение краевой задачи ищем по методу Фурье в виде:

$$y(x, t) = X(x)S(t), \quad (3)$$

где $X(x)$ – искомая собственная функция – форма собственного колебания, p – собственная частота свободных колебаний, $S(t) = A\cos(pt) + B\sin(pt)$ – временной множитель.

Тогда для функции $X(x)$ имеем уравнение:

$$\frac{d^4}{dx^4} X(x) - \frac{p^2}{a^2} X(x) = 0, \quad (4)$$

где $a^2 = EI/\rho F_0$ – собственное значение краевой задачи.

Введем обозначение $k^4 = p^2/a^2$.

Получим уравнение:

$$\frac{d^4}{dx^4} X(x) - k^4 X(x) = 0 \quad (5)$$

Решение уравнения (5) имеет вид:

$$X(x) = D_1 \sin(kx) + D_2 \cos(kx) + D_3 \operatorname{sh}(kx) + D_4 \operatorname{ch}(kx)$$

или

$$\begin{aligned} X(x) = & C_1(\cos(kx) + \operatorname{ch}(kx)) + C_2(\cos(kx) - \operatorname{ch}(kx)) \\ & + C_3(\sin(kx) + \operatorname{sh}(kx)) + C_4(\sin(kx) - \operatorname{sh}(kx)) \end{aligned}$$

Из граничных условий получаем:

$$\begin{cases} C_1 = C_2 = 0 \\ C_3 = C_4 \end{cases}$$

И имеем частотное уравнение

$$\sin(kx) = 0 \quad (6)$$

Последнее имеет бесконечное множество решений

$$k_i = \frac{i\pi}{l} \quad (7)$$

Итак, собственная форма колебаний $X(x)$ первого тона имеет вид:

$$X(x) = \sin\left[\frac{\pi x}{l}\right] \quad (8)$$

Построим для искомой колебательной системы приведенную (эквивалентную) систему в виде бесконечной системы осцилляторов (рис. 2), в которой в первом приближении учитываем только колебания первого основного тона.

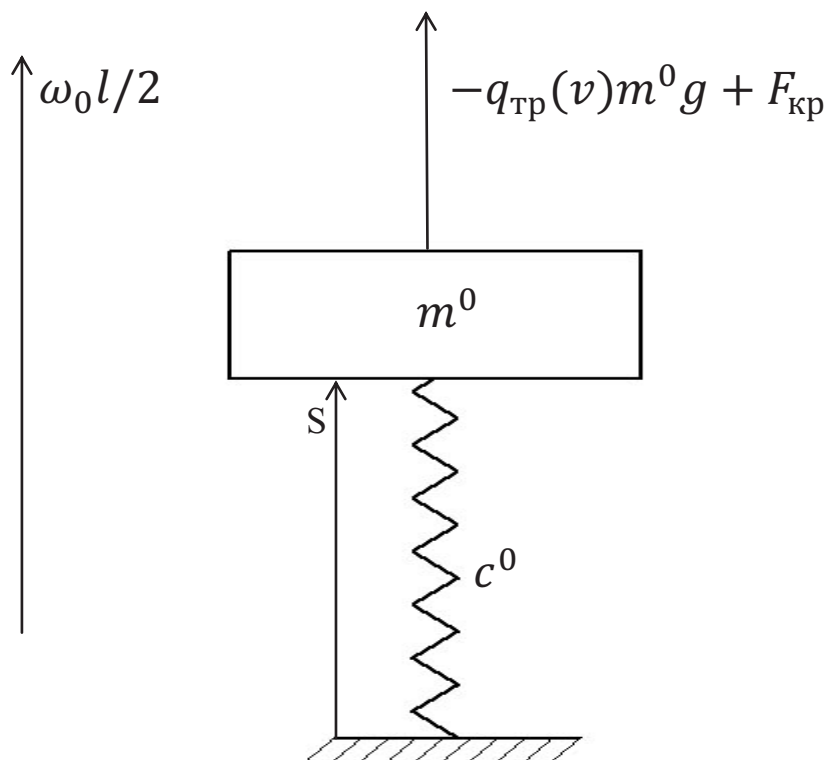


Рис.2. Схема эквивалентной системы.

Сравнивая кинетическую и потенциальную энергии системы, постулируем равенство собственных частот исходной системы и системы осцилляторов. В результате будем иметь:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu_0 \dot{X}^2(x) dx * \dot{S}^2 = \frac{m^0 \dot{S}^2}{2} \quad (9)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI [X''(x)]^2 dx * S^2 = \frac{c^0 S^2}{2} \quad (10)$$

Из данных уравнений получаем приведенные массу и жесткость для осциллятора, эквивалентного срединному участку стержня:

$$m^0 = \frac{\mu_0 l}{2} \quad (11)$$

$$c^0 = \frac{EI \pi^4}{2l^3} \quad (12)$$

Далее определим приведенные коэффициенты трения для эквивалентной системы из условия равенства за период колебания работ линейной и кубической составляющей силы трения.

Сначала вычислим работу линейной части сил трения в исходной (A_l) и приведенной (A'_l) системах.

$$A_l = \alpha_0 \mu_0 g \int_0^{2\pi/p} dt \int_0^l \left(\omega_0 x + Ap \cos(pt + \varphi) \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx \quad (13)$$

$$A'_l = \alpha' \frac{\mu_0 l}{2} g \int_0^{2\pi/p} \left(\frac{\omega l}{2} + Ap \cos(pt + \varphi) \right)^2 dt \quad (14)$$

Опуская вычисления, приравняем полученные величины:

$$A_l = A'_l$$

$$\alpha_0 \mu_0 g \frac{2\pi}{p} \left(\frac{\omega^2 l^3}{3} + \frac{A^2 p^2 l}{2} \right) = \alpha' \frac{\mu_0 l}{2} g \frac{2\pi}{p} \left(\frac{\omega^2 l^2}{4} + \frac{A^2 p^2}{2} \right)$$

$$\alpha' = \frac{4}{3} \alpha_0 \left(2 - \frac{1}{2 + \left(\frac{\omega l}{Ap} \right)^2} \right)$$

При рассмотрении параметров, характерных для тонких металлических стержней, мы получаем, что $\left(\frac{\omega l}{Ap} \right)^2 \gg 1$. Следовательно, мы можем получить соотношение между исходным и приведенным коэффициентами линейной составляющей силы трения.

$$\alpha' = \frac{8}{3} \alpha_0 \quad (15)$$

Аналогичным образом получаем соотношение между исходным и приведенным коэффициентами кубической составляющей силы трения.

$$\beta' = \frac{32}{5} \beta_0 \quad (16)$$

Переносное вращательное движение балки полагается равномерным. Поэтому считаем, что исходная система находится в состоянии относительного равновесия. Составляя дифференциальное уравнение движения механического аналога для координаты S (координата, соответствующая перемещению сечения стержня из недеформированного состояния), добавим силу $F_{kp} = \mu_0 l g f_0 / 2$, компенсирующую постоянную составляющую силы трения скольжения.

Получим дифференциальное уравнение движения системы:

$$m^0 \frac{d^2 S}{dt^2} + c^0 S = \frac{\mu_0 l g}{2} \left(\alpha' \left(\frac{dS}{dt} + \omega_0 \frac{l}{2} \right) - \beta' \left(\frac{dS}{dt} + \omega_0 \frac{l}{2} \right)^3 \right) \quad (17)$$

После упрощения уравнение (13) примет вид:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \omega^2 S = \left(\alpha - \beta \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \right) \frac{dS}{dt} - \gamma \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 - \delta \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{4\alpha' - 3\beta'\omega_0^2 l^2}{2m^0} \mu_0 l g \\ \beta = \frac{\beta' \mu_0 l g}{2m^0} \\ \gamma = \frac{3}{4} \frac{\beta' \omega_0 \mu_0 l^2 g}{m^0} \\ \delta = \frac{\beta' \omega_0 \mu_0 l^2 g}{4m^0} - \frac{\beta' \omega_0^3 \mu_0 l^4 g}{16m^0} \\ \omega = \sqrt{\frac{c^0}{m^0}} \end{array} \right.$$

В уравнении (14) отбросим также свободный член δ , так как он влияет лишь на смещение положения относительного равновесия и, следовательно, для изучения характера колебаний значения не имеет. Получим уравнение

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \omega^2 S = \left(\alpha - \beta \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \right) \frac{dS}{dt} - \gamma \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \quad (19)$$

Введем замену

$$\mu \varphi \left(\frac{dS}{dt} \right) = \left(\alpha - \beta \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 \right) \frac{dS}{dt} - \gamma \left(\frac{dS}{dt} \right)^2,$$

где μ – малый параметр.

В итоге получим уравнение колебаний с малым параметром

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \omega^2 S = \mu \varphi \left(\frac{dS}{dt} \right) \quad (20)$$

Используя метод Ван дер Поля [5], будем искать решение данного уравнения в виде

$$S = A(\mu t) \cos(\psi); \psi = \omega t + \vartheta(\mu)$$

Для гармонического процесса формула для скорости так же характерна, как и формула для отклонения. Поэтому естественно потребовать, чтобы и скорость выглядела так же, как и в линейной системе

$$\frac{dS}{dt} = -\omega A \sin \psi + \left[\frac{dA}{dt} \cos \psi - A \frac{d\vartheta}{dt} \sin \psi \right] = -\omega A \sin \psi$$

Для выполнения этого требования выражение в квадратных скобках должно обратиться в нуль

$$\frac{dA}{dt} \cos \psi - A \frac{d\vartheta}{dt} \sin \psi = 0 \quad (21)$$

Если с учетом этого условия вычислим $\frac{d^2 S}{dt^2}$ и подставим найденные выражения

$S, \frac{dS}{dt}, \frac{d^2 S}{dt^2}$ в уравнение (16), то получим второе уравнение для производных $\frac{dA}{dt}$ и

$\frac{d\vartheta}{dt}$

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \omega^2 S = -\omega \frac{dA}{dt} \sin \psi - \omega A \frac{d\vartheta}{dt} \cos \psi = \mu \varphi(-\omega A \sin \psi) \quad (22)$$

Из уравнений (17) и (18) получаем

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\mu}{\omega} \varphi(-\omega A \sin \psi) \sin \psi \quad (23)$$

Правая часть выписанной формулы содержит гармоники фазового угла и с этой точки зрения противоречит предположению о медленном изменении амплитуды и частоты. Выход из этого противоречия состоит в том, чтобы заменить осциллирующие функции их средними значениями за период. Применяя такую процедуру усреднения, получим дифференциальное уравнение для нахождения функции $A(t)$

$$2 \frac{dA}{dt} - \alpha A + \frac{3}{4} \beta \omega^2 A^3 = 0 \quad (24)$$

Решая уравнение (19), получим функцию

$$A = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4} \beta \omega^2 - \left(\frac{3}{4} \beta \omega^2 - \frac{\alpha}{a^2} \right) e^{-at}}}, \quad (25)$$

где a – начальная «амплитуда». При $t \rightarrow \infty$ $A(t)$ стремится к пределу

$$A = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}} \quad (26)$$

После подстановки начальных данных имеем окончательную функцию амплитуды установившихся автоколебаний приведенной системы стержня:

$$A = \frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{5}{12} \frac{\mu_0}{EI} \left(\frac{4\alpha_0}{3\beta_0} - \omega_0^2 l^2 \right)} \quad (27)$$

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле, ГИФМЛ, Москва, 1959 г. – С. 439.
2. Шиманский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций, Судпромиз, Ленинград, 1963 г. – 253 с.
3. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний, издательство «Наука», Москва, 1964г. – С. 194.
4. Пожалостин А.А., Кулешов Б.Г., Паншина А.В. Колебания упругих одномерных систем с трением// Инженерный журнал: наука и инновация, 2013, вып. 12, URL : <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1136.Html> (дата обращения: 15.01.2014г.)
5. Лампер Р.Е. Введение в теорию нелинейных колебаний авиа-конструкций. Изд. Машиностроение, Москва, 1985г., С. 88.