

УДК 531.552

Методики нахождения коэффициента лобового сопротивления при проведении экспериментальных исследований на баллистической трассе

Илюхин С.Н., аспирант

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
кафедра «Динамика и управление полётом ракет и космических аппаратов»*

kafsm3@sm.bmstu.ru

На любое тело в процессе его движения воздействует множество факторов. По степени этого воздействия можно выделить несколько основополагающих сил и моментов, вносящих наибольший вклад в формирование траектории. Для тел, находящихся в состоянии пассивного неуправляемого полёта в плотных слоях атмосферы такими воздействиями являются массовые силы (гравитация) и аэродинамическое взаимодействие с внешней средой. Одной из первостепенных аэродинамических характеристик летательного аппарата (ЛА) является коэффициент лобового сопротивления.

Для получения представления об аэродинамических силах рассмотрим воздействие набегающего потока на произвольное пространственное тело [1]. Проекцию элементарной силы на продольную ось x ЛА можно определить следующим образом:

$$dX = [(p - p_{\infty}) \cdot \cos(\widehat{nx}) + \tau \cdot \cos(\widehat{tx})] \cdot dS_i.$$

Здесь: $(p - p_{\infty})$ - элементарное избыточное давление,

τ - элементарное вязкое трение,

dS_i - элементарная площадка поверхности ЛА,

n и t – соответственно нормаль и касательная к элементарной площадке.

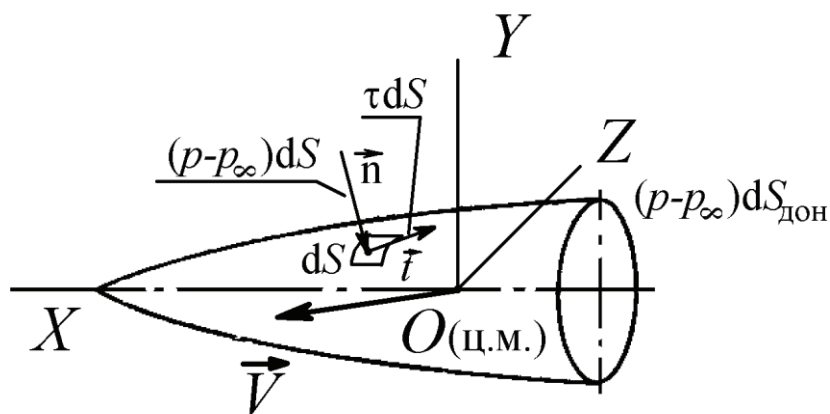


Рис.1. Элементарные силы аэродинамического воздействия на пространственное тело

После интегрирования и нормирования получим выражение для продольной силы:

$$X = q \cdot s \cdot \iint_S [\bar{p} \cdot \cos(\widehat{nx}) + c_{fx} \cdot \cos(\widehat{tx})] \cdot dS_i,$$

где $q = \frac{\rho \cdot V^2}{2}$ - скоростной напор,

ρ - плотность среды,

s - характерная площадь ЛА,

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{q},$$

$$c_{fx} = \frac{\tau}{q}.$$

Если представить силу лобового сопротивления в следующем виде:

$$X_a = C_{xa}(M) \cdot q \cdot s,$$

то при нулевом угле атаки вытекает определение коэффициента лобового сопротивления:

$$C_{xa}(M) = C_x = \iint_S [\bar{p} \cdot \cos(\widehat{nx}) + c_{fx} \cdot \cos(\widehat{tx})] \cdot dS_i,$$

где $M = \frac{V}{a}$ - число Маха,

a - скорость звука в среде.

Коэффициент лобового сопротивления может быть рассчитан теоретически путём определения отдельных составляющих избыточного давления или вязкого трения с широким использованием эмпирических зависимостей. Однако основными методами его определения являются экспериментальные способы, основанные на получении суммарных характеристик при продувках моделей ЛА в аэродинамических трубах и при опытных стрельбах, проводимых на баллистических трассах.



Рис. 2. Баллистическая трасса кафедры СМЗ МГТУ им. Н.Э. Баумана

Баллистическая трасса – это специально оборудованная стрелковая трасса, позволяющая в полигонных или лабораторных условиях производить стрельбу специальными моделями ЛА или реальными боеприпасами с измерением (наряду с прочими параметрами) скорости их движения в ряде точек траектории. По измеренным значениям скорости движения тела на одной траектории рассчитывается значение коэффициента лобового сопротивления. При его определении стрельбой не вносятся искажений в характер движения тела на траектории, то есть тех факторов, которые трудно промоделировать при испытаниях в аэродинамических трубах или средствами математического расчёта.

Определить коэффициент лобового сопротивления по итогам измерений также можно различными способами: аналитическими методами, эмпирическими зависимостями или цифровым моделированием. Очевидно, что при данных расчётах, помимо данных измерений скорости, необходимо иметь информацию о параметрах среды (атмосферы), в которой проводится стрельба.

В качестве аналитического метода можно представить алгоритм, основанный на оценке изменения кинетической энергии. Данный метод широко известен и подробно описан [2]. Расчётная зависимость, используемая при обработке экспериментальных данных, получается на основании закона изменения «живых» сил.

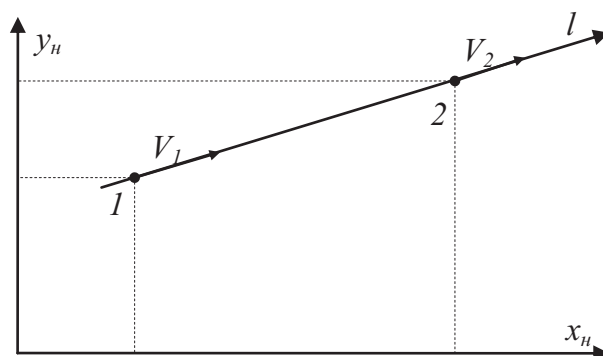


Рис. 3. Схематизация участка траектории для определения C_{xa} аналитическим методом

Если известен вектор состояния $[x_n \ y_n \ l \ V]$ в двух различных точках 1 и 2 (Рис. 3), то на основании указанного закона можно записать:

$$\frac{m \cdot V_2^2}{2} - \frac{m \cdot V_1^2}{2} = \int_{l_1}^{l_2} -X \cdot dl + \int_{y_{n1}}^{y_{n2}} -m \cdot g \cdot dy_n,$$

где m – масса тела,

g – ускорение свободного падения,

$X = C_{xa}(M) \cdot q \cdot S$ – сила лобового сопротивления:

Силу лобового сопротивления вынесем из под знака интеграла её средним значением:

$$X_{\text{ср}} = \frac{m}{2} \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2 - 2 \cdot g \cdot (y_{n2} - y_{n1})}{l_2 - l_1}.$$

Как правило, стрельба для определения коэффициента лобового сопротивления на баллистической трассе организовывается так, чтобы измеряемый участок траектории оказался горизонтальным для исключения влияния силы тяжести. В этом случае:

$$y_{n2} = y_{n1}, \ l_1 = x_{n1}, \ l_2 = x_{n2}.$$

Введём обозначение для расстояния между датчиками скорости:

$$L = x_{n2} - x_{n1}.$$

В таком случае получаем:

$$X_{\text{ср}} = \frac{m}{2} \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{L}.$$

Полученное по данным эксперимента среднее значение силы лобового сопротивления должно быть отнесено к определённому значению скорости изделия, за которую примем среднюю скорость на длине измерения:

$$V_{\text{ср}} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Число Маха тогда вычисляется следующим образом:

$$M_{\text{ср}} = \frac{V_{\text{ср}}}{a},$$

где a - скорость звука в данной среде.

При сопоставлении выражений для средней силы лобового сопротивления получаем:

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{L} = C_{xa}(M_{\text{ср}}) \cdot \frac{\rho \cdot V_{\text{ср}}^2}{2} \cdot S.$$

Отсюда и выражаем коэффициент лобового сопротивления:

$$C_{xa}(M_{\text{ср}}) = \frac{4 \cdot m}{s \cdot L \cdot \rho} \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}.$$

Данная аналитическая зависимость выводится из предположения, что участок траектории, на котором проводятся измерения, является прямолинейным. Однако, применяя средства цифрового моделирования, представляется возможным определить коэффициент лобового сопротивления, рассмотрев траекторию полёта тела целиком. При такой постановке задачи можно предложить весьма тривиальный, с теоретической точки зрения, метод.

Общеизвестно, что траектория неуправляемого пассивного полёта статически устойчивого тела представляет собой участок параболы. Очевидно, что для однозначного определения параметров номинальной траектории достаточно знать характеристики ЛА и его вектор состояния в начальный момент времени. Это представляет собой простейшую задачу о теле, брошенном под углом к горизонту. Соответственно, если известен начальный угол бросания θ_0 , то возможно провести цифровое моделирование проведённой экспериментальной стрельбы (Рис. 4).

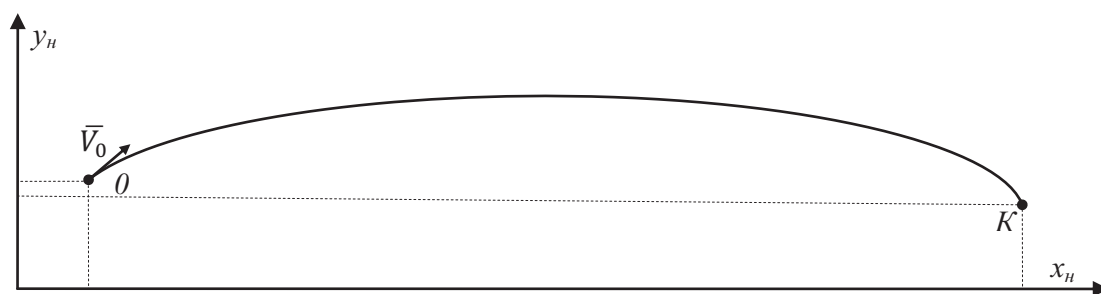


Рис. 4. Настильная траектория полёта неуправляемого ЛА

Наилучшим образом подходит для этой задачи упрощённая математическая модель движения в вертикальной плоскости [3]:

$$\begin{cases} \frac{dx_H}{dt} = V \cdot \cos \theta \\ \frac{dy_H}{dt} = V \cdot \sin \theta \\ m \cdot \frac{dV}{dt} = -C_{xa}(M) \cdot q \cdot s - m \cdot g \cdot \sin \theta \\ m \cdot V \cdot \frac{d\theta}{dt} = -m \cdot g \cdot \cos \theta \end{cases}$$

где θ - угол наклона вектора скорости к горизонту.

Нетрудно отметить, что единственным неучтённым фактором остаётся именно коэффициент лобового сопротивления. Если к такой постановке задачи добавить известные краевые условия, в частности координаты конечной точки траектории K , то появляется возможность однозначно определить величину C_{xa} . Необходимые расчёты достаточно просто реализовать многоитерационными алгоритмами баллистического проектирования [4].

Полученный метод условно можно назвать «апостериорным», поскольку он предполагает моделирование траектории и определение её параметров по результатам завершённого эксперимента, то есть проведение апостериорной оценки.

Для того чтобы повысить эффективность использования предложенного метода следует проанализировать условия эксперимента и применяемую математическую модель. Проведение опытных стрельб на баллистической трассе определяет настильный характер траектории движения ЛА. В соответствии с этим угол наклона траектории на всём протяжении полёта будет величиной малого порядка. Коэффициент лобового сопротивления напрямую влияет на изменение величины скорости ЛА. Из того условия, что $|\theta| \ll \frac{\pi}{4}$ вытекает следующее неравенство частных производных:

$$\frac{\partial x_H}{\partial V} \gg \frac{\partial y_H}{\partial V}.$$

Отсюда вытекает обоснование выбора алгоритма итерационного подбора C_{xa} при фиксированном значении y_K из условия получения необходимого x_K . Это связано с тем, что любые траектории, полученные в ходе эксперимента будут отличны от номинальной, которую можно смоделировать используя цифровую вычислительную технику. Происходит это в силу неучтённых возмущений. В результате, при проведении стрельб с аналогичными начальными условиями, будет получена некоторая выборка одной координаты на плоскости, параллельной соответствующей оси и проходящей через точку K . Поскольку объектом исследования является коэффициент лобового сопротивления, то эффективнее исследовать ту выборку, на которую имеют наибольшее влияние его вариации. Таким образом, исследования полученной *дальности* позволяют определить C_{xa} с большей точностью. При этом следует отметить тот факт, что точность определения коэффициента лобового сопротивления чрезвычайно зависит от точности задания вектора

$\bar{V}_0$, как величины, так и направления.

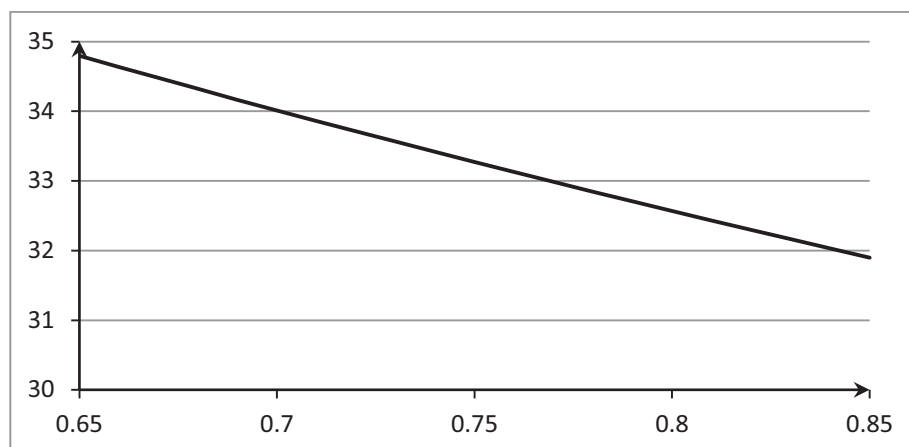


Рис. 5. Расчетная зависимость координаты $x_{нк}$ от величины коэффициента $C_{ха}$

Проведём дальнейшее сравнение описанной ранее аналитической методики и предложенного алгоритма. Исходной информацией в обоих случаях служат данные измерений, формирующих два граничных вектора состояния:

$$[x_{н1} \quad y_{н1} \quad l_1 \quad V_1] \text{ и } [x_{н2} \quad y_{н2} \quad l_2 \quad V_2] \text{ для метода «живых» сил и}$$

$$[x_{н0} \quad y_{н0} \quad \theta_0 \quad V_0] \text{ и } [x_{нк} \quad y_{нк} \quad \theta_k \quad V_k] \text{ для «апостериорного» метода.}$$

После проведения всех упрощений, предусмотренных в методах, необходимой информацией для определения $C_{ха}$ остаётся:

$$[x_{н1} \quad V_1] \text{ и } [x_{н2} \quad V_2] \text{ для метода «живых» сил и}$$

$$[x_{н0} \quad \theta_0 \quad V_0] \text{ и } [x_{нк}] \text{ для «апостериорного» метода.}$$

При проведении сравнительного анализа можно отметить, что отличия методов заключаются в том, что «апостериорный» метод использует более подробную информацию о начальных условиях, в то время как метод «живых» сил опирается на равносильные выборки граничных условий. На практике измерения начального угла наклона траектории представляет собой элементарную задачу, поскольку он будет совпадать с углом наклона продольной оси пусковой установки (ствола). При этом предложенный метод не требует второго измерения скорости, значительно упрощая и удешевляя проведение эксперимента. Следует отметить, что метод «живых» сил сводится к расчёту по одной формуле, практически не используя вычислительных мощностей, тогда как «апостериорный» метод базируется на много итерационном численном интегрировании уравнений движения. Всё же представляется, что при современном уровне развития цифровых электронных вычислительных машин и при простоте применяемой математической модели это не является весомым недостатком.

Более серьёзным допущением является инвариантность коэффициента лобового

сопротивления на всём протяжении полёта, что характерно и для метода «живых» сил. Однако это пренебрежение зависимостью от числа Маха является вполне допустимым при плавном характере зависимости $C_{xa}(M)$ при $M < 1$.

В процессе определения коэффициента лобового сопротивления предложенным методом интересным побочным продуктом является вся совокупность параметров невозмущенной траектории исследуемого ЛА. В случае использования второго датчика скорости, для проведения аналогии со стандартными методиками, введение дополнительной информации о скорости на траектории может вызвать некоторое рассогласование полученных результатов. Рассмотрение данной задачи позволит оценить степень возмущённости реальной траектории, полученной в эксперименте. Это можно назвать ещё одним достоинством «апостериорного» метода, который, тем не менее, ещё требует апробации.

Список литературы

1. Аэродинамика. Учебное пособие. Под ред. В.Т. Калугина М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 687с., ил.
2. Кольцов Ю.Ф.. Определение коэффициента лобового сопротивления $C_x(M)$ стрельбой на баллистической трассе. Методические указания. М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1964. 28с., ил.
3. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н.. Внешняя баллистика. Учебник для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 2005. 608 с., ил.
4. Илюхин С.Н. Метод импульса силы для оценки энергетики управления полётом// Молодёжный научно-технический вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 8.Режим доступа: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/606165.html> (дата обращения 09.03.2014).