

Метод гармонической линеаризации в задаче идентификации нелинейных динамических систем

04, апрель 2014

DOI: 10.7463/0414.0704613

Павлов Ю. Н., Недашковский В. М., Тихомирова Е. А., Шавырин И. Б.

УДК 01.04.01

Россия, МГТУ им. Баумана

pavlov@bmstu.ruvmniu3@bmstu.ruelizarti@bmstu.rushavirin@bmstu.ru**Введение**

Динамические системы (в основном это различного вида силовые приводы) приобретают в процессе изготовления нежелательные дефекты, которые существенно влияют на качество и точность работы объекта в целом. Наличие в кинематической схеме существенных нелинейностей типа зон нечувствительности, люфтов, сухого трения существенно ухудшают ситуацию и являются причиной появления в системе автоколебаний, что, в конечном счете, приводит к ухудшению точности и быстродействия работы объекта управления. Динамика подобных систем описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Проблема решения нелинейных дифференциальных уравнений при заданных коэффициентах и виде присутствующей нелинейности в настоящее время успешно решается с применением различного рода линеаризации [1-3]. Были также разработаны различные методы решения обратной задачи, т.е. определения коэффициентов нелинейных дифференциальных уравнений с использованием экспериментальных данных [4]. В данной статье предложен метод решения обратной задачи - по результатам экспериментальных данных, полученных путем подачи на систему тестовых сигналов, определяются коэффициенты дифференциального уравнения и параметры нелинейного звена.

1. Постановка задачи

Предполагается, что с реальной динамической системы, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, путем подачи на вход гармонических сигналов получены амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики (эксперимен-

тальные данные). Необходимо создать алгоритм и программу обработки экспериментальных данных с целью определения коэффициентов дифференциального уравнения и путём статистического моделирования оценить величину погрешностей определения коэффициентов и параметров нелинейности.

2. Методика решения задачи

Предлагаемая методика решения задачи состоит из следующих этапов:

- 1) Выбор вида существенной нелинейности и определение коэффициента гармонической линеаризации.
- 2) Математическое моделирование процесса получения псевдоэкспериментальных данных.
- 3) Создание алгоритма, проведение вычислительного эксперимента, статистическая оценка ошибок определения коэффициентов передаточной функции динамической системы и параметров нелинейного звена.

В статье рассматривается система, описываемая дифференциальным уравнением второго порядка с нелинейным звеном типа «сухое трение». При подаче на вход системы синусоидального сигнала $q \sin \omega_i$ в системе установятся незатухающие колебания с амплитудой A_i и частотой ω_i , что и позволяет для решения поставленной задачи применить метод гармонической линеаризации.

Дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее вынужденное движение динамической системы с нелинейным звеном типа «сухое трение», имеет вид

$$e_2 \ddot{x}(t) + F \operatorname{sign} \dot{x}(t) + e_0 x(t) = q \sin \omega t \quad (1)$$

График нелинейности типа «сухое трение» приведен на рис. 1

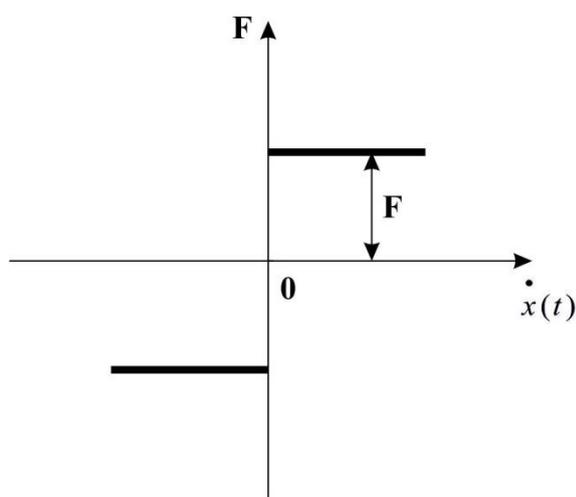


Рис.1 График нелинейности типа «сухое трение»

Неизвестные коэффициенты e_0 , e_2 , F дифференциального уравнения (1) должны быть определены в результате решения задачи идентификации.

В статье предложен алгоритм получения оценок неизвестных коэффициентов e_0, e_2, F дифференциального уравнения (1) по полученному экспериментальному графику.

В описываемом алгоритме определения неизвестных коэффициентов e_0, e_2, F предлагается воспользоваться методом гармонической линеаризации и нелинейность типа "сухое трение" аппроксимировать вязким трением с соответствующим коэффициентом гармонической линеаризации [5].

Вынужденное движение с использованием метода гармонической линеаризации описывается уравнением

$$e_2 \ddot{x}(t) + e_1(\omega) \dot{x}(t) + e_0 x(t) = q \sin \alpha t, \quad (2)$$

где коэффициент гармонической линеаризации [5]

$$e_1(\omega) = \frac{4F}{\pi A(\omega) \omega}, \quad (3)$$

$A(\omega)$ - амплитуда синусоидальной составляющей выхода $x(t)$, имеющей частоту ω .

Введем обозначение

$$c = \frac{4F}{\pi}.$$

Тогда

$$e_1(\omega) = \frac{c}{A(\omega) \omega}. \quad (4)$$

Из уравнения (2) следует, что при использовании метода гармонической линеаризации частотная передаточная функция динамической системы второго порядка с сухим трением имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{1}{e_0 + e_1(\omega)j\omega + e_2(j\omega)^2}.$$

Частотную передаточную функцию $W(j\omega)$ можно также записать в виде [6]

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (5)$$

Здесь $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ - вещественная и мнимая части частотной передаточной функции соответственно, которые задаются соотношениями

$$P(\omega) = \frac{e_0 - e_2 \omega^2}{(e_0 - e_2 \omega^2)^2 + \frac{c^2}{A^2(\omega)}}, \quad (6)$$

$$Q(\omega) = - \frac{\frac{c}{A(\omega)}}{(e_0 - e_2 \omega^2)^2 + \frac{c^2}{A^2(\omega)}}. \quad (7)$$

Тогда квадрат значения амплитудно-частотной характеристики динамического звена для частоты ω можно определить по формуле

$$A^2(\omega) = P^2(\omega) + Q^2(\omega), \quad (8)$$

или с учетом (6) и (7)

$$A^2(\omega) = \frac{1}{(e_0 - e_2\omega^2)^2 + \frac{c^2}{A^2(\omega)}}.$$

Разрешив это уравнение относительно $A(\omega)$, получим

$$A^2(\omega) = \frac{1 - c^2}{(e_0 - e_2\omega^2)^2}, \quad (9)$$

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{1 - c^2}}{|e_0 - e_2\omega^2|}. \quad (10)$$

Видим, что амплитуда вынужденных колебаний имеет действительное значение лишь при условии $1 - c^2 > 0$.

Пример амплитудно-частотной характеристики системы приведен на рис.2

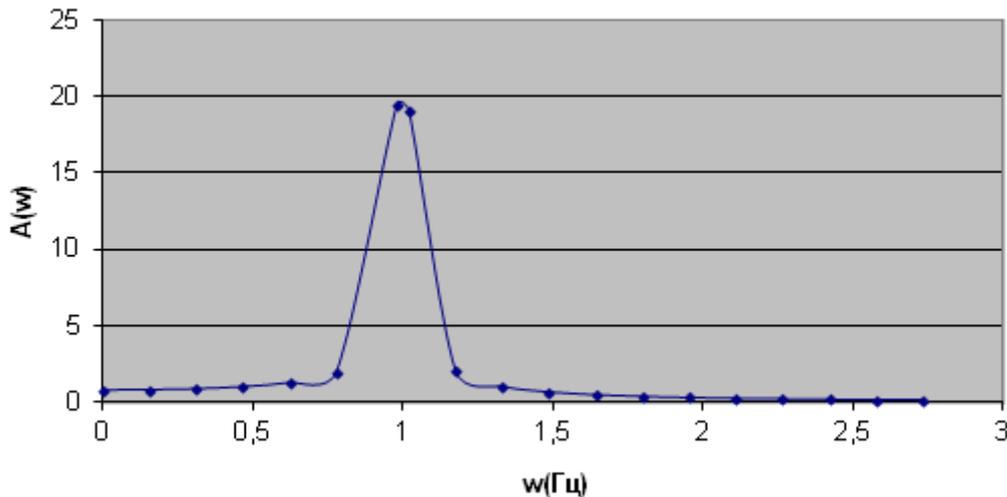


Рис. 2. Пример амплитудно-частотной характеристики нелинейной динамической системы второго порядка с сухим трением

Обратим внимание, что при $e_0 - e_2\omega^2 = 0$ или при $\omega = \omega_r = \sqrt{\frac{e_0}{e_2}}$ значение $A(\omega) = \infty$,

т.е. амплитудно-частотная характеристика системы второго порядка, несмотря на наличие трения на резонансной частоте имеет разрыв.

Соотношения (9) и (10) позволяют переписать выражения (6) и (7) в виде

$$P(\omega) = \frac{1 - c^2}{e_0 - e_2\omega^2}, \quad (11)$$

$$Q(\omega) = -\frac{c\sqrt{1 - c^2}}{|e_0 - e_2\omega^2|}.$$

С учетом (11) найдем выражение для значений $\varphi(\omega)$ фазо-частотной характеристики системы [6]:

$$\operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}, \text{ если } e_0 - e_2\omega^2 > 0, \quad (12)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}, \text{ если } e_0 - e_2\omega^2 < 0.$$

С учетом (12) отсюда имеем

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\right) + k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ если } e_0 - e_2\omega^2 > 0, \quad (13)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\right) + k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ если } e_0 - e_2\omega^2 < 0.$$

Если учесть, что при $e_0 - e_2\omega^2 > 0$ $P(\omega) > 0$, $Q(\omega) < 0$, а при $e_0 - e_2\omega^2 < 0$ $P(\omega) < 0$, $Q(\omega) < 0$, то соотношения (13) можно переписать в виде

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\right), \text{ если } e_0 - e_2\omega^2 > 0, \quad (14)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\right) - \pi, \text{ если } e_0 - e_2\omega^2 < 0.$$

Пример фазо-частотной характеристики системы с учетом (14) приведен на рис.3

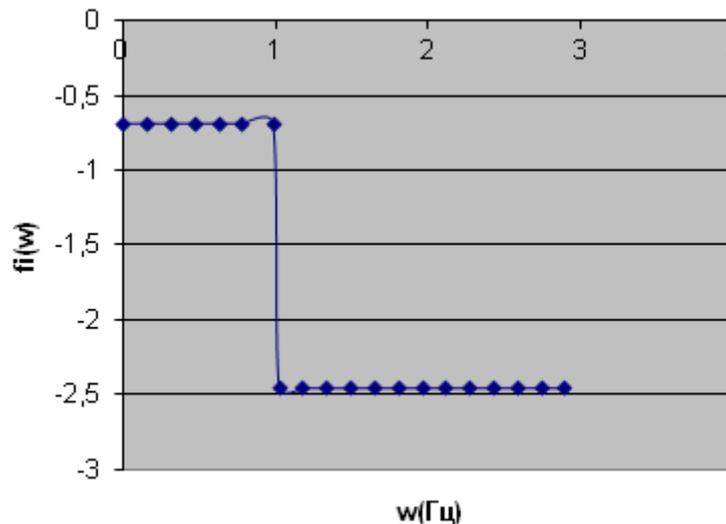


Рис. 3. Пример фазо-частотной характеристики нелинейной динамической системы второго порядка с сухим трением

Из рис. 3 видно, что фазо-частотная характеристика имеет постоянное значение, определяемое величиной сухого трения и изменяет его скачком на резонансной частоте

$$\omega_r = \sqrt{\frac{e_0}{e_2}}.$$

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ может быть изображена на комплексной плоскости в виде годографа [6].

Пример годографа системы приведен на рис.4

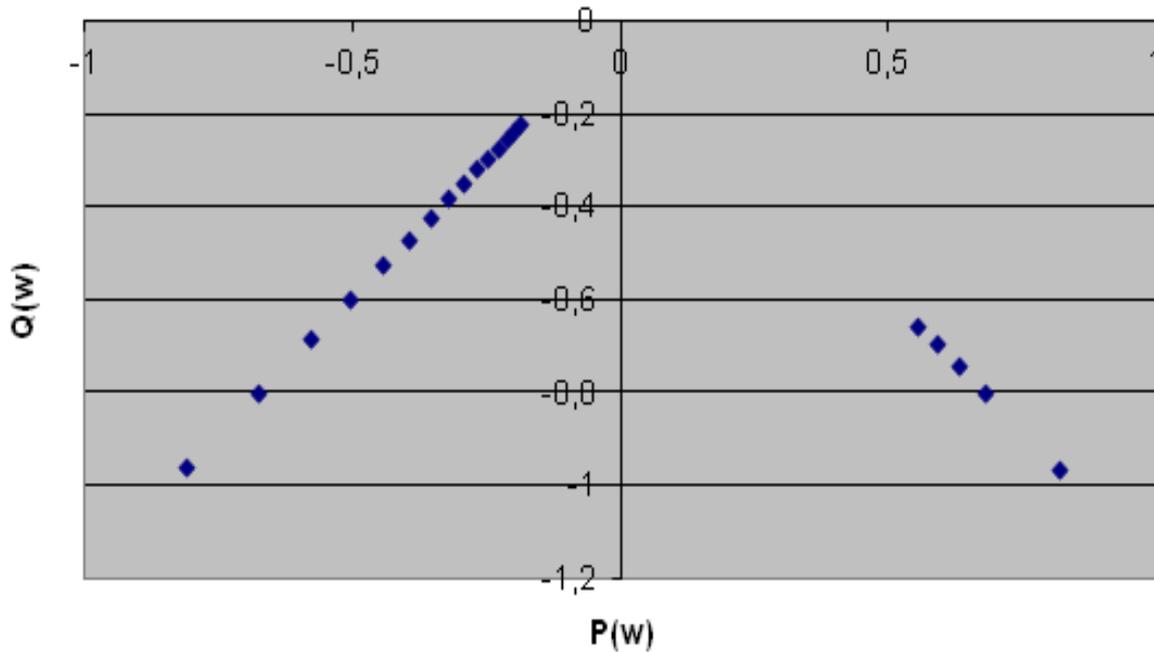


Рис. 4. Пример годографа нелинейной системы второго порядка с сухим трением

Видим, что годографом в этом случае являются две прямые линии: одна линия, выходящая из точки, определяемой амплитудой вынужденных колебаний при $\omega=0$ и уходящая в бесконечность, другая линия, возвращающаяся из бесконечности в ноль. Угол наклона этих прямых определяется величиной сухого трения.

3. Математическое моделирование с целью получения псевдоэкспериментальных данных.

При получении частотных характеристик реальных систем в эксперименты вмешиваются помехи, в результате которых точки годографа смещаются случайным образом. Введем обозначения для определенных с погрешностями вещественных и мнимых значений отсчетов полученных с учетом соотношений (11) для значений псевдоэкспериментального годографа $W_s(j\omega)$ динамической системы для n_{exp} значений частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_{exp}}$:

$$P_1 = P(\omega_1), \dots, P_{n_{exp}} = P(\omega_{n_{exp}}), Q_1 = Q(\omega_1), \dots, Q_{n_{exp}} = Q(\omega_{n_{exp}}). \quad (15)$$

На рис. 5 показан пример искаженного псевдоэкспериментального годографа нелинейного звена второго порядка с сухим трением относительно годографа, приведенного на рис. 4 при наличии случайных погрешностей в псевдоэкспериментальных данных для $n_{exp}=10$.

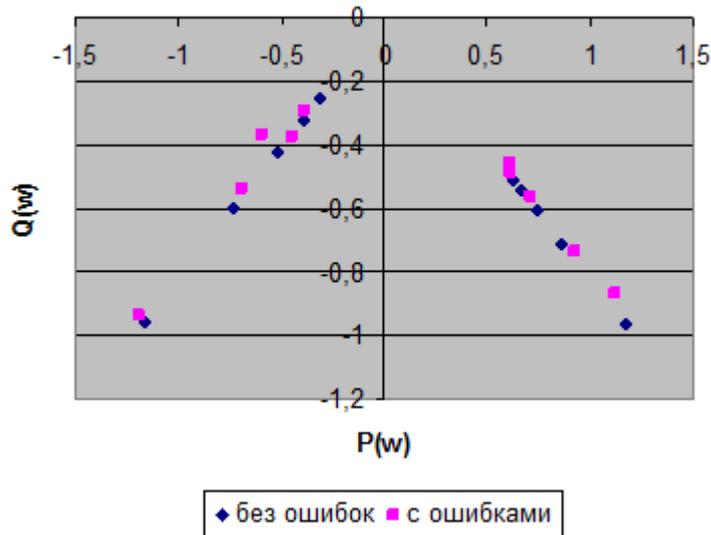


Рис. 5. Пример искаженного годографа нелинейной системы второго порядка с сухим трением при наличии случайных погрешностей в псевдоэкспериментальных данных

Решение задачи идентификации для нелинейной системы второго порядка с сухим трением будем искать в классе годографов, задаваемых моделью

$$W_M(j\omega) = \frac{1}{a_0 + a_1(\omega)j\omega + a_2(j\omega)^2} \quad (16)$$

Здесь с учетом (3) и (4)

$$a_1(\omega) = \frac{4G}{\pi A(\omega)\omega}$$

Тогда

$$W_M(j\omega) = \frac{1}{a_0 + j\frac{4G}{\pi A(\omega)} + a_2(j\omega)^2} \quad (17)$$

или

$$W_M(j\omega) = \frac{\alpha + j\beta}{\gamma + j\delta}, \quad (18)$$

$$\text{где } \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = a_0 - a_2\omega^2, \delta = \frac{4G}{\pi A(\omega)}. \quad (19)$$

Отклонение ΔW_i i -ого отсчета $W_M(j\omega_i)$ годографа модели на частоте ω_i от i отсчета $W_s(j\omega_i)$ экспериментального годографа идентифицируемой системы равна

$$\Delta W_i = W_s(j\omega_i) - W_M(j\omega_i).$$

С учетом (5) и (18) можно записать в виде

$$\Delta W_i = P_i + jQ_i - \frac{\alpha_i + j\beta_i}{\gamma_i + j\delta_i}, \quad (20)$$

где параметры $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ соответствуют частоте ω_i .

Необходимо ввести приемлемый критерий, характеризующий близость двух годографов на всей совокупности экспериментальных точек, и минимизировать его по пара-

метрам модели системы a_0, a_2, G . В качестве критерия (меры) близости можно было бы выбрать сумму квадратов модулей расхождений ΔW_i :

$$I = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} |\Delta W_i|^2 \quad (21)$$

Минимизация меры I приводит к нелинейной системе уравнений для определения коэффициентов a_0, a_2, G модели. В работах [7, 8], применен способ, которым мы воспользуемся, и который состоит в следующем. Соотношение (20) умножим на отличный от нуля комплексный множитель $(\gamma_i + j\delta_i)$:

$$\Delta H_i = \Delta W_i(\gamma_i + j\delta_i). \quad (22)$$

Тогда с учетом (20) и (22) для ΔH_i и для $|\Delta H_i|^2$ получим

$$\begin{aligned} \Delta H_i &= P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i + j(P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i), \\ |\Delta H_i|^2 &= (P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i)^2 + (P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i)^2. \end{aligned} \quad (23)$$

В качестве меры близости годографов вместо меры I (21) примем меру J , равную сумме квадратов модулей $|\Delta H_i|^2$ (23):

$$J = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} |\Delta H_i|^2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} [(P_i\gamma_i - Q_i\delta_i - \alpha_i)^2 + (P_i\delta_i + Q_i\gamma_i - \beta_i)^2]. \quad (24)$$

Мера близости J экспериментально полученного годографа системы и годографа модели системы на всей совокупности экспериментальных точек задается формулой (24), которая после некоторого преобразования принимает вид

$$J = \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} [(P_i^2 + Q_i^2)\gamma_i^2 + (P_i^2 + Q_i^2)\delta_i^2 - 2P_i\gamma_i\alpha_i + 2Q_i\delta_i\alpha_i - 2P_i\delta_i\beta_i - 2Q_i\gamma_i\beta_i + \alpha_i^2 + \beta_i^2]. \quad (25)$$

Мера J (25) является функцией параметров a_0, a_2, G частотной передаточной функции модели (16) или (17). Для минимизации меры J приравняем нулю частные производные от J по этим параметрам:

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial G} = 0. \quad (26)$$

Для рассматриваемой нелинейной системы второго порядка система уравнений (26) с учетом (19) принимает вид

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) - a_2 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)\omega_i^2 &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)\omega_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2)\omega_i^4 &= \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} P_i\omega_i^2, \\ G \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} (P_i^2 + Q_i^2) \frac{1}{A^2(\omega_i)} &= -\frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} Q_i \frac{1}{A(\omega_i)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Первые два уравнения системы уравнений (27) приведем к матричному виду

$$\Psi \bar{a} = \bar{u}, \quad (28)$$

где

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{11} = \sum_{i=1}^{n \text{ exp}} (P_i^2 + Q_i^2), \quad \Psi_{12} = -\sum_{i=1}^{n \text{ exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2,$$

$$\Psi_{21} = \sum_{i=1}^{n \text{ exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^2, \quad \Psi_{22} = -\sum_{i=1}^{n \text{ exp}} (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^4, \quad (29)$$

$$u_1 = \sum_{i=1}^{n \text{ exp}} P_i, \quad u_2 = \sum_{i=1}^{n \text{ exp}} P_i \omega_i^2.$$

Решая матричное уравнение (28), получим

$$a_0 = \frac{\Psi_{22} u_1 - \Psi_{12} u_2}{\Psi_{11} \Psi_{22} - \Psi_{12} \Psi_{21}}, \quad a_2 = \frac{\Psi_{11} u_2 - \Psi_{21} u_1}{\Psi_{11} \Psi_{22} - \Psi_{12} \Psi_{21}}. \quad (30)$$

С учетом выражения (8) третье уравнение системы уравнений (27) принимает вид

$$G = -\frac{\pi}{4n \text{ exp}} \sum_{i=1}^{n \text{ exp}} \frac{Q_i}{\sqrt{P_i^2 + Q_i^2}}. \quad (31)$$

Покажем, что если отсчеты годографа P_i и Q_i не содержат ошибок измерения, т.е. с учетом (11) и (15)

$$P_i = \frac{1 - c^2}{e_0 - e_2 \omega_i^2}, \quad (32)$$

$$Q_i = -\frac{c \sqrt{1 - c^2}}{|e_0 - e_2 \omega_i^2|},$$

то значения параметров a_0 , a_2 , G , вычисленные по соотношениям (30) и (31) совпадают с параметрами e_1 , e_2 , F дифференциального уравнения (1), описывающего вынужденное движение нелинейного динамической системы второго порядка с сухим трением.

Действительно, подставив в соотношения (30) соответствующие значения из (29) и (32), получим

$$\Psi_{22} u_1 - \Psi_{12} u_2 = e_0 (1 - c^2)^2 \sum_{i=1}^{n \text{ exp}} \sum_{j=1}^{n \text{ exp}} \frac{\omega_j^2 (\omega_i^2 - \omega_j^2)}{(e_0 - e_2 \omega_i^2)^2 (e_0 - e_2 \omega_j^2)^2},$$

$$\Psi_{11} u_2 - \Psi_{21} u_1 = e_2 (1 - c^2)^2 \sum_{i=1}^{n \text{ exp}} \sum_{j=1}^{n \text{ exp}} \frac{\omega_j^2 (\omega_i^2 - \omega_j^2)}{(e_0 - e_2 \omega_i^2)^2 (e_0 - e_2 \omega_j^2)^2},$$

$$\Psi_{11} \Psi_{22} - \Psi_{12} \Psi_{21} = (1 - c^2)^2 \sum_{i=1}^{n \text{ exp}} \sum_{j=1}^{n \text{ exp}} \frac{\omega_j^2 (\omega_i^2 - \omega_j^2)}{(e_0 - e_2 \omega_i^2)^2 (e_0 - e_2 \omega_j^2)^2},$$

$$a_0 = \frac{\Psi_{22} u_1 - \Psi_{12} u_2}{\Psi_{11} \Psi_{22} - \Psi_{12} \Psi_{21}} = e_0,$$

$$a_2 = \frac{\Psi_{11} u_2 - \Psi_{21} u_1}{\Psi_{11} \Psi_{22} - \Psi_{12} \Psi_{21}} = e_2.$$

С учетом (32) соотношение (31) приводится к виду

$$G = -\frac{\pi}{4n_{\text{exp}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{exp}}} \frac{Q_i}{\sqrt{P_i^2 + Q_i^2}} = -\frac{\pi}{4n_{\text{exp}}} \left(-\frac{4F}{\pi} n_{\text{exp}}\right) = F.$$

Были проведены иллюстративные вычислительные эксперименты по оценке погрешности, с которой предложенный алгоритм определяет значения параметров частотной передаточной функции нелинейной системы второго порядка с сухим трением. В экспериментах заданы конкретные значения параметров $e_0 = 1$, $e_2 = 1$, $F = 0,5$.

Погрешности измерения значений P_i, Q_i моделировались с помощью генератора случайных чисел с равномерным законом плотности распределения вероятностей в различных диапазонах $[-0,01, 0,01]$, $[-0,05, 0,05]$, $[-0,1, 0,1]$. Количество отсчетов в годографе системы (т.е. количество экспериментов) $n_{\text{exp}} = 10, 20, 40, 80$. Для каждого конкретного количества экспериментов n_{exp} проводилось n_{seriy} серий этих экспериментов $n_{\text{seriy}} = 25, 50, 100, 200$. Диапазон частот $[0, 2\omega_r, \omega_r = 2\text{Гц}]$, $[0, 3\omega_r, \omega_r = 3\text{Гц}]$. В сериях экспериментов вычислялись погрешности $erre_0 = e_0 - a_0$, $erre_2 = e_2 - a_2$, $errF = F - G$ определения параметров e_1, e_2, F и среднеквадратические отклонения sko для случайных величин $erre_0, erre_2, errF$, а также строились гистограммы для этих величин.

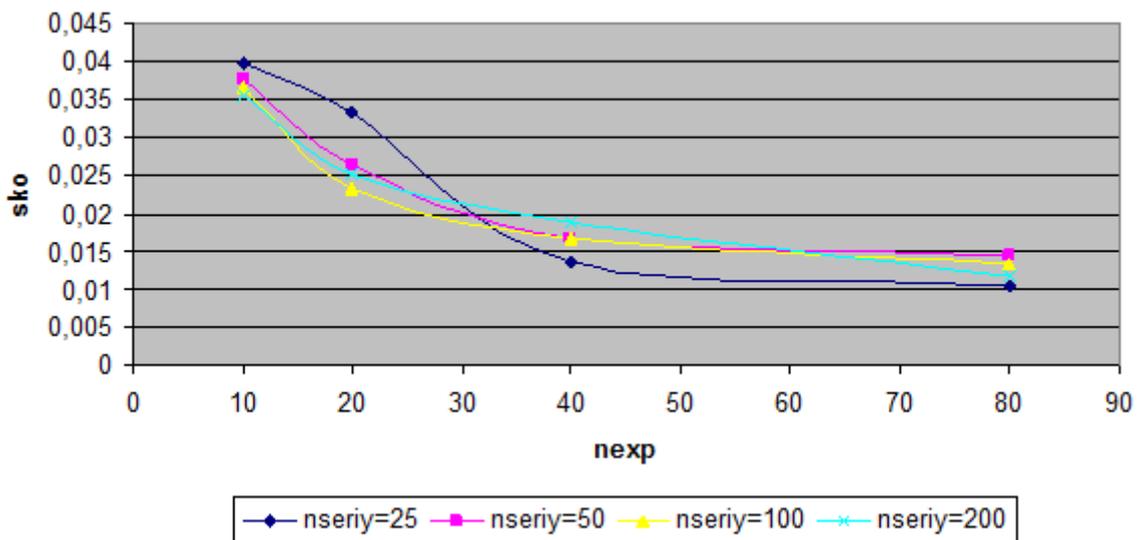


Рис. 6. Зависимость среднеквадратического отклонения sko погрешности $erre_0$ определения коэффициента e_0 от количества отсчетов n_{exp} годографа системы при погрешности измерений в диапазоне $[-0,10, 0,10]$ и числе серий $n_{\text{seriy}} = 25, 50, 100, 200$

Из рис. 6 видно, что в рассматриваемом случае можно ограничиться количеством отсчетов годографа от 20 до 40.

На рис. 7 в качестве примера показана гистограмма погрешности $erre_0$ определения коэффициента e_0 .

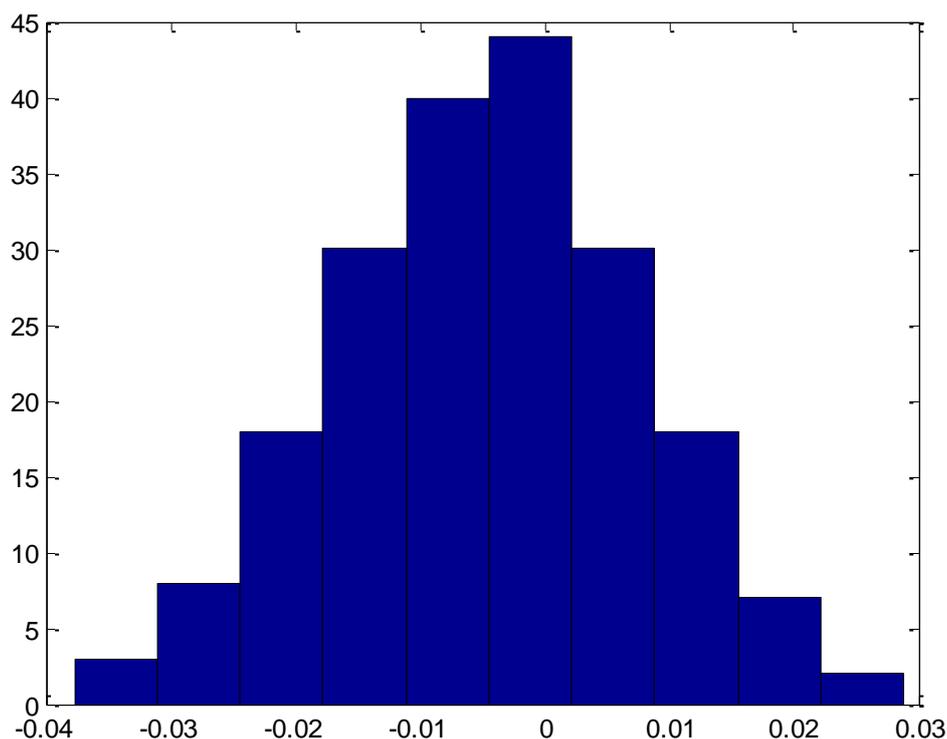


Рис. 7. Гистограмма погрешности $erre_0$ определения коэффициента e_0 ($nexp=20$, диапазон погрешности измерений $[-0,05, 0,05]$, количество серий $nseriy=200$, среднеквадратическое отклонение $sko=0,0121$)

Вычислительный эксперимент показал, что ошибки имеют нормальный закон распределения и среднеквадратическое отклонение равно $sko=0,0121$. Это значит, что 68% ошибок находятся в диапазоне $\pm sko = 0,0121$, а 99% ошибок находятся в диапазоне $\pm 3sko = \pm 0,0363$. Таким образом, погрешность определения значения коэффициента $e_0 = 1$ в иллюстративном вычислительном эксперименте не превышает диапазона погрешности измерений отсчетов годографа $[-0,05, 0,05]$.

Аналогичные результаты были получены для погрешностей определения коэффициентов e_2 и F . Например, для погрешности $erre_2$ определения коэффициента e_2 ($nexp=20$, погрешность измерений в диапазоне $[-0,05, 0,05]$, количество серий $nseriy=100$), среднеквадратическое отклонение $sko=0,0117$. Для погрешности $errF$ определения коэффициента F и ($nexp=20$, погрешность измерений в диапазоне $[-0,05, 0,05]$, количество серий $nseriy=100$), среднеквадратическое отклонение $sko=0,0137$.

На рис. 8 приведены три годографа: годограф системы, когда погрешность измерения отсчетов годографа равна нулю, годограф системы, когда погрешность измерения отсчетов годографа не равна нулю, годограф найденной модели системы

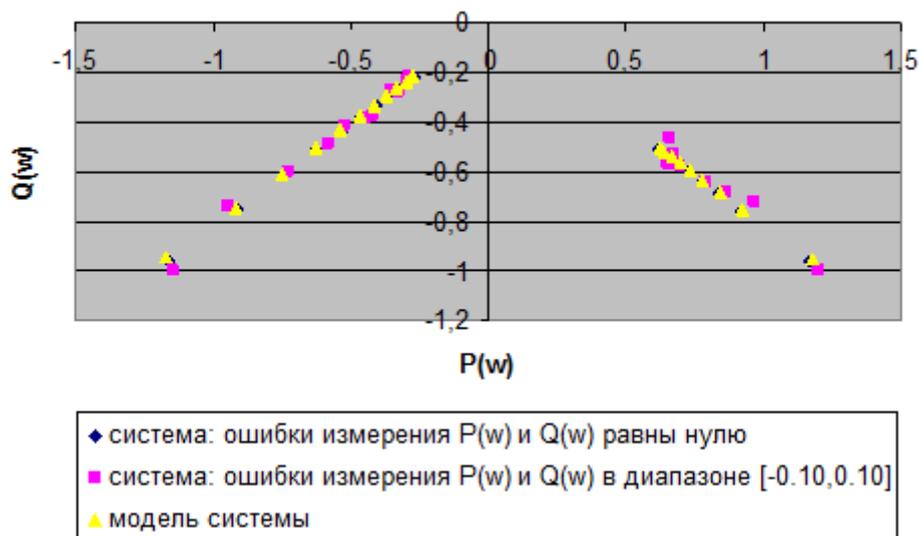


Рис. 8. Годограф системы при нулевой ошибке измерения отсчетов, годограф системы при ненулевых ошибках измерения отсчетов в диапазоне $[-0.10, 0.10]$; годограф найденной модели системы (количество экспериментов $n_{exp}=20$)

Выводы

В данной статье предложен алгоритм идентификации нелинейной динамической системы по экспериментально полученным отсчетам частотного годографа системы. В качестве меры близости годографов системы и модели системы выбрана сумма квадратов модулей модификации отклонений отсчетов годографа модели системы от соответствующих экспериментально полученных отсчетов системы.

В иллюстративном вычислительном эксперименте показано, что для нелинейной системы второго порядка с сухим трением можно ограничиться количеством отсчетов годографа от 20 до 40.

Иллюстративный вычислительный эксперимент показал, что при использовании предложенного алгоритма идентификации нелинейной динамической системы по частотному годографу погрешность определения значений коэффициентов частотной передаточной функции системы второго порядка с сухим трением сравнима с диапазоном погрешности измерений экспериментальных отсчетов годографа этой системы.

Список литературы

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле: пер. с англ. М.: Наука, 1967. 444 с. [Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering. 3rd ed. D. Van Nostrand Company, Inc. Toronto New York London, 1955. 468 p.].
3. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. М.: МГУ, 1984. 111 с.
4. Дейч А.И. Методы идентификации динамических объектов. М.: Энергия, 1979. 240 с.

5. Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М.: ГИФМЛ, 1960. 790 с.
6. Основы автоматического управления / под ред. В.С. Пугачева. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968. 680 с.
7. Боевкин В.И., Павлов Ю.Н. Регрессионный анализ в прикладной задаче идентификации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. (Труды МГТУ им. Н. Э. Баумана; № 546).
8. Боевкин В.И., Недашковский В.М., Павлов Ю.Н. Идентификация линейных динамических звеньев по частотному годографу // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013 . № 9. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/618917.html> (дата обращения 01.03.2014). DOI: [10.7463/0913.0618917](https://doi.org/10.7463/0913.0618917)

Harmonic linearization method in the identification of nonlinear dynamical systems

04, April 2014

DOI: 10.7463/0414.0704613

Y.N. Pavlov, V.M. Nedashkovskii, E.A.Tihomirova, I. B. Shavirin

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

pavlov@bmstu.ruvmniu3@bmstu.ruelizarti@bmstu.rushavirin@bmstu.ru

The subject of this work is a problem of identification of nonlinear dynamic systems based on the experimental data obtained by applying the test signals to the system.

The goal is to examine the opportunity for using the obtained experimental samples of the hodograph to define the parameters of this system by the specific example of a second-order dynamical system with a type of nonlinearity "dry friction".

It was suggested to use the harmonic linearization method and to approximate the nonlinearity of "dry friction" by linear friction with the corresponding harmonic linearization coefficient.

It was assumed that the frequency transfer function of the identified system is well-known value.

It was assumed also that there are disturbances while obtaining frequency characteristics of the real-world system. As a result of that, the points of experimentally obtained hodograph move randomly.

Searching for the solution of the identification problem is accomplished in the hodograph class, specified by the system model, which has the form of the frequency transfer function the same as the form of the frequency transfer function of the system identified.

Searching for the unknown coefficients of the frequency transfer function model of the system was carried out by minimizing the previously described and published by one of the authors proximity criterion (measure) of experimentally obtained system hodograph and the hodograph of system model for all the experimental points.

The problem solution to identify the nonlinear dynamic system identification in frequency hodograph was reduced to solving an equations system, linear relative to the unknown parameters of the frequency transfer function of the system model.

For the second-order dynamical system with nonlinearity of the type "dry friction" the simulation software was developed to provide the pseudo experimental data containing random accuracy of and determine the parameters of the system.

A computational experiment of accuracy evaluation was made with which the proposed algorithm determines the values of the system parameters.

The illustrative numerical simulation has demonstrated that the accuracy of determining the values of **the coefficients transfer function** is comparable with the range of measurement accuracy of experimental samples of this system hodograph.

Иллюстративный вычислительный эксперимент показал, что погрешность определения значений **параметров системы** сравнима с диапазоном погрешности измерений экспериментальных отсчетов годографа этой системы.

This method of the identification of nonlinear dynamic systems is not mentioned in the well-known publications.

The method of identification of nonlinear dynamical systems, which is described in the article, can be used to determine the parameters of various kinds of actuators.

Using the method of harmonic linearization and identification of dynamical systems hodographs is promising for solving the problem of identification of nonlinear systems with different types of nonlinearities.

Publications with keywords: [identification](#), [harmonic linearization](#), [nonlinear dynamical system](#), [dry friction](#), [frequency locus](#)

Publications with words: [identification](#), [harmonic linearization](#), [nonlinear dynamical system](#), [dry friction](#), [frequency locus](#)

References

1. Polyanin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2005. 256 p. (in Russian).
2. Timoshenko S. *Vibration Problems in Engineering*. 3rd ed. D. Van Nostrand Company, Inc. Toronto New York London, 1955. 468 p. (Russ. ed.: Timoshenko S.P. *Kolebaniya v inzhenernom dele*. Moscow, Nauka, 1967. 444 p.).
3. Glasko V.B. *Obratnye zadachi matematicheskoy fiziki* [Inverse problems of mathematical physics]. Moscow, MGU Publ., 1984. 111 p. (in Russian).
4. Deych A.I. *Metody identifikatsii dinamicheskikh ob"ektov* [Methods of identification of dynamic objects]. Moscow, Energiya, 1979. 240 p. (in Russian).
5. Popov E.P., Pal'tov I.P. *Priblizhennyye metody issledovaniya nelineynykh avtomaticheskikh system* [Approximate methods of study of nonlinear automatic systems]. Moscow, GIFML Publ., 1960. 790 p. (in Russian).

6. Pugachev V.S., ed. *Osnovy avtomaticheskogo upravleniya* [Basics of automatic control]. Moscow, Nauka, 1968. 680 p. (in Russian).
7. Boevkin V.I., Pavlov Yu.N. *Regressionnyy analiz v prikladnoy zadache identifikatsii* [Regression analysis in applied problem of identification]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1990. (*Trudy MGTU im. N. E. Baumana* [Proceedings of the Bauman MSTU]; no. 546). (in Russian).
8. Boevkin V.I., Nedashkovskiy V.M., Pavlov Yu.N. [Identification of linear dynamic elements using a frequency locus]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana - Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, no. 9. DOI: [10.7463/0913.0618917](https://doi.org/10.7463/0913.0618917) (in Russian).