электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 519.642

Моделирование течения Тейлора – Куэтта методом вихревых элементов

Макарова М. Е.,*студентка*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Прикладная математика»

Научный руководитель: Марчевский И.К., к.ф.-м.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
bauman@bmstu.ru

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой среды в области G (рис. 1), ограниченной двумя бесконечными цилиндрами (S – сечение области G, проведенное перпендикулярно оси цилиндров и заполненное средой).Цилиндры вращаются вокруг своей оси с угловыми скоростями ω_1 и ω_2; их радиусы r_1 и r_2, причем $r_2 > r_1$.

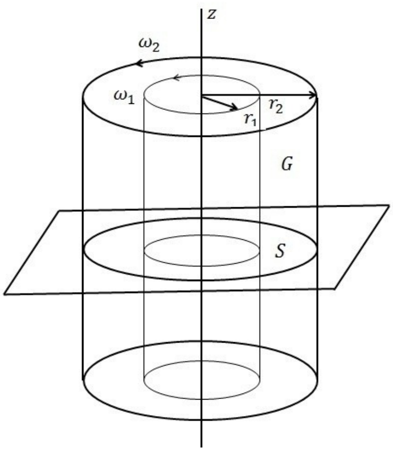


Рис. 1. Вращающиеся цилиндры

Уравнения, описывающие движение среды в области G, – уравнения Навье – Стокса:

$$\begin{cases} \nabla^* \cdot \vec{V}^* = 0, \\ \dfrac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \nabla^*)\vec{V}^* + \dfrac{1}{\rho} \nabla^* \vec{p}^* = \nu \Delta^* \vec{V}^* + f. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь ρ – постоянная плотность, ν – кинематическая вязкость, $\vec{p}^*$ – давление, $\vec{V}^*$ – скорость среды, f – плотность внешних сил на элемент массы (рассматривается случай $f = 0$), ∇^* и Δ^* – операторы дифференцирования в двумерной области в размерных координатах.

Для удобства проведения дальнейших выкладок введем цилиндрические координаты r^*, θ с осью Oz по оси цилиндров, тогда граничные условия прилипания примут вид [1]:

$$\upsilon_z^* = \upsilon_{r^*}^* = 0,\ \ \upsilon_\theta^* = \omega_1 r_1,\ \text{при}\ r^* = r_1,$$

$$\upsilon_z^* = \upsilon_{r^*}^* = 0,\ \ \upsilon_\theta^* = \omega_2 r_2,\ \text{при}\ r^* = r_2,$$

где ω_1, ω_2 – угловые скорости внутреннего и внешнего цилиндров соответственно, $\vec{V}^* = (\upsilon_{r^*}^*, \upsilon_\theta^*, \upsilon_z^*)$.

2. Приведение уравнений к безразмерному виду. Будем считать, что $\omega_1 > 0$, а величина ω_2 – произвольная. Безразмерные переменные выберем следующим образом [2]:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}^*}{d}, \quad \vec{V} = \frac{\vec{V}^*}{\tilde{V}}, \quad t = \frac{t^*}{\tilde{t}}, \quad \vec{p} = \frac{\vec{p}^*}{\tilde{p}};$$

$$d = r_2 - r_1, \quad \tilde{V} = r_1\omega_1, \quad \tilde{t} = \frac{d^2}{\nu}, \quad \tilde{p} = \frac{\rho\nu r_1\omega_1}{d}.$$

Подставим эти переменные в уравнение (1.1), тогда

$$\begin{cases} (\nabla \cdot \vec{V}) \cdot r_1\omega_1 = 0, \\ \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \mathrm{t}} \cdot \dfrac{r_1\omega_1\nu}{d^2} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \cdot \dfrac{(r_1\omega_1)^2}{d} + \dfrac{1}{\rho}\nabla\vec{p} \cdot \dfrac{\rho r_1\omega_1\nu}{d^2} = \nu\Delta\vec{V} \cdot \dfrac{r_1\omega_1\nu}{d^2}. \end{cases}$$

Здесь ∇ и Δ – операторы дифференцирования в безразмерных координатах.

Умножив первое уравнение на $\dfrac{d^2}{r_1\omega_1\nu}$, получим систему, описывающую движение среды в безразмерных переменных, следующего вида:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0, \\ \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{Re}(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} + \nabla\vec{p} = \Delta\vec{V}. \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\mathrm{Re} = \dfrac{r_1\omega_1 d}{\nu}$ – число Рейнольдса (рассчитанное по скорости вращения внутреннего цилиндра).

Граничные условия примут вид:

$$\upsilon_z = \upsilon_r = 0,\ \ \upsilon_\theta = 1,\ \text{при}\ r = \frac{r_1}{d},$$

$$\upsilon_z = \upsilon_r = 0,\ \ \upsilon_\theta = \frac{\omega_2 r_2}{\omega_1 r_1},\ \text{при}\ r = \frac{r_2}{d},$$

где $\vec{V} = (\upsilon_r, \upsilon_\theta, \upsilon_z)$.

Уравнения (2.1) в цилиндрической системе координат (r, θ, z):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\upsilon_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \upsilon_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial \upsilon_r}{\partial t} = \Delta\upsilon_r - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial \upsilon_\theta}{\partial \theta} - \dfrac{\upsilon_r}{r^2} - \dfrac{\partial p}{\partial r} - \mathrm{Re}\left[\upsilon_r \dfrac{\partial \upsilon_r}{\partial r} + \dfrac{\upsilon_\theta}{r}\dfrac{\partial \upsilon_r}{\partial \theta} + \upsilon_z \dfrac{\partial \upsilon_r}{\partial z} - \dfrac{\upsilon_\theta^2}{r}\right], \\ \dfrac{\partial \upsilon_\theta}{\partial t} = \Delta\upsilon_\theta + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial \upsilon_r}{\partial \theta} - \dfrac{\upsilon_\theta}{r^2} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} - \mathrm{Re}\left[\upsilon_r \dfrac{\partial \upsilon_\theta}{\partial r} + \dfrac{\upsilon_\theta}{r}\dfrac{\partial \upsilon_\theta}{\partial \theta} + \upsilon_z \dfrac{\partial \upsilon_\theta}{\partial z} - \dfrac{\upsilon_r \upsilon_\theta}{r}\right], \\ \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial t} = \Delta\upsilon_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} - \mathrm{Re}\left[\upsilon_r \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial r} + \dfrac{\upsilon_\theta}{r}\dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial \theta} + \upsilon_z \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Будем рассматривать стационарную задачу $(\partial V / \partial t = 0)$ и такое движение среды, когда скорость вдоль оси цилиндра равна нулю. Поскольку область G обладает осевой симметрией, то $\vec{V} = (0, \upsilon_\theta(\vec{r}), 0)$ и уравнение неразрывности будет выполняться тождественно, а система (2.2) для описания стационарного течения Тейлора – Куэтта примет вид:

$$\frac{dp}{dr} = \mathrm{Re}\frac{\upsilon_\theta^2}{r},\quad \frac{d^2\upsilon_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\upsilon_\theta}{dr} - \frac{\upsilon_\theta}{r^2} = 0.$$

Последнее уравнение имеет решения вида $\upsilon = C_n r^n$, где $C_n \in R$, $\forall n \in Z$. Подстановка дает $n = \pm 1$, поэтому

$$\upsilon_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r},\quad \omega(r) = \frac{r_1}{d}\cdot\frac{\upsilon_\theta}{r} = \frac{r_1}{d}\cdot\left(Ar + \frac{B}{r}\right),\quad p = \mathrm{Re}\int\frac{\upsilon_\theta^2}{r}dr. \quad (2.3)$$

Постоянные A и B находятся из условий прилипания жидкости к стенкам цилиндров, согласно которым скорость жидкости на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях должна быть равна скорости соответствующего цилиндра. В результате получаем:

$$A = \frac{r_1 - \dfrac{\omega_2 r_2}{\omega_1 r_1} r_2}{r_1^2 - r_2^2},\quad B = \frac{\left(\dfrac{\omega_2 r_2}{\omega_1 r_1} r_1 - r_2\right)}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Искомое распределение скоростей находится после подстановки найденных A и B в формулы (2.3).

3. Численное решение. Метод вихревых элементов. Численное решение задачи осуществляется с помощью метода вихревых элементов (МВЭ). Поскольку рассматривается лишь ламинарное течение, то достаточно решить двумерную задачу моделирования течения среды между двумя окружностями в плоскости, содержащей область S. Найденное распределение скоростей будет одинаковым в любом сечении цилиндров плоскостью, перпендикулярной оси цилиндров.

Скорость среды в МВЭ находится как суперпозиция полей скоростей отдельных вихревых элементов (ВЭ), находящихся в области расчета в данный момент времени и ВЭ, моделирующего влияние вращающейся окружности. Интенсивности ВЭ таковы, что обеспечивается выполнение граничного условия на профиле [3, 4].

В работе моделирование течения среды осуществлялось с помощью программного комплекса POLARA [5]. Определение интенсивности вихревого слоя, моделирующего границу области, проводилось с помощью метода МВЭ с касательными компонентами скорости (далее он будет описан подробно). С описанием других этапов расчета эволюции и движения ВЭ можно ознакомиться в [3, 4, 7, 8].

Вращение внутренней окружности моделировалось с помощью помещения в центр окружностей (то есть на ось цилиндра) вихря с циркуляцией $\vec{\Gamma}$, порождающего такое поле скоростей, что выполняется равенство $\dfrac{\vec{\Gamma}\times\vec{r}_1}{2\pi|\vec{r}_1|^2}=\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1$.

В методах вихревых элементов при решении двумерных задач для простоты выкладок удобно считать течение трехмерным с одинаковыми характеристиками во всех плоскостях $z=const$ (что и наблюдается в рассматриваемой задаче). Тогда скорость в точке $(x;y)$ можно определить по интенсивности вихревого слоя, моделирующего границу окружностей, – $\gamma^{\sigma}(p_0)=\gamma^{\sigma}(x_0;y_0)$ (индекс σ означает, к какой окружности относится рассматриваемый вихревой слой; $\sigma=1$ – внутренняя окружность, $\sigma=2$ – внешняя), и интенсивностям ВЭ, сгенерированных на предыдущих шагах расчета и находящихся в области течения.

Обозначим скорость течения как $\vec{V}=(\upsilon_x,\upsilon_y,\ 0)^T$; интенсивность вихревого слоя, моделирующего влияние точки границы области ∂S с радиус-вектором $\vec{r}_0=(x_0,y_0,\ 0)^T$

равна вектору $\vec{\gamma}^{\sigma}(\vec{r}_0) = \left(0, 0, \gamma^{\sigma}(\vec{r}_0)\right)^T$. Тогда, используя закон Био – Савара, скорость среды в точке с радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, 0)^T$ можно вычислить по формуле [3, 4]

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\vec{\Gamma} \times \vec{r}_1}{2\pi |\vec{r}|^2} + \vec{V}_{\Omega}(\vec{r}) + \sum_{\sigma=1,2} \oint_{\partial S^{\sigma}} \frac{\vec{\gamma}^{\sigma}(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dl_{r_0}, \quad \vec{r} \in \partial S$$

Здесь $\vec{V}_{\Omega}(\vec{r})$ – скорость среды, индуцируемая ненулевой завихренностью $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$, находящейся в течении в текущий момент времени [3, 4]:

$$\vec{V}_{\Omega}(\vec{r}) = \int_S \frac{\Omega(\vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dS_{r_0}, \quad \vec{r} \in \partial S.$$

Предельное значение скорости среды $\vec{V}_-(\vec{r})$ на границе ∂S со стороны области $R^2 \setminus S$, внешней по отношению к течению, равно [3]

$$\vec{V}_-(\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) - \left(\frac{\vec{\gamma}^{\sigma}(\vec{r})}{2} \times \vec{n}(\vec{r}) \right) = \vec{V} - \left(\frac{\gamma^{\sigma}(\vec{r})}{2} \vec{\tau}(\vec{r}) \right), \quad \vec{r} \in \partial S, \tag{3.1}$$

где $\vec{n}(\vec{r})$ – орт внешней нормали к профилю, $\vec{\tau}(\vec{r})$ – орт касательной. При этом орт касательной $\vec{\tau}(\vec{r})$ к профилю выбирают таким образом, что $\vec{n}(\vec{r}) \times \vec{\tau}(\vec{r}) = \vec{k}$ и $|\vec{\tau}(\vec{r})| = 1$, где $\vec{k}$ – орт оси Oz.

Для нахождения неизвестной интенсивности вихревого слоя $\gamma^{\sigma}(\vec{r})$ в МВЭ используется условие равенства нулю вектора скорости $\vec{V}_-(\vec{r})$ на границе области течения, которое обеспечивается равенством нулю либо нормальной («классический» метод) [3, 4], либо касательной компоненты вектора $\vec{V}_-(\vec{r})$ («модифицированный» метод) [3, 6-9]; с математической точки зрения эти подходы эквивалентны.

Таким образом, в «модифицированном» МВЭ интегральное уравнение для $\gamma(\vec{r}_0)$ получается из условия равенства нулю касательной компоненты предельного значения скорости (3.1) на границе области течения:

$$\sum_{\sigma=1,2} \oint_{\partial S^{\sigma}} \frac{\left[\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)\right] \cdot \vec{\tau}^{\sigma}(\vec{r})}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \cdot \gamma^{\sigma}(\vec{r}_0) dl_{r_0} - \frac{\gamma^{\sigma}(\vec{r})}{2} = -\vec{\tau}^{\sigma}(\vec{r}) \cdot \left(\frac{\vec{\Gamma} \times \vec{r}_1}{2\pi |\vec{r}|^2} + \vec{V}_{\Omega}(\vec{r}) \right), \quad \vec{r} \in \partial S \tag{3.2}$$

Поскольку решение интегрального уравнения (3.2) не является единственным, вводят дополнительные условия

$$\oint_{\partial S^{\sigma}} \gamma^{\sigma}(\vec{r}) dl_r = G^{\sigma}, \; \sigma = 1,2, \tag{3.3}$$

определяющие циркуляцию поля скоростей вдоль внешней и внутренней окружностей.

Уравнение (3.2) – интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода [3, 6], его ядро ограничено при $|\vec{r}-\vec{r}_0| \to 0$. В ограниченности ядра интегрального уравнения (3.2) и состоит основное преимущество «модифицированного» подхода над «классическим». В связи с этим при численном решении уравнения (3.2) не накладывается жестких ограничений на вид расчетной схемы, она может быть достаточно произвольной [3, 6-9].

4. Метод вихревых элементов с нулевыми касательными компонентами скорости (КМВЭ). В расчете границу области S разбивают на панели K_i, где $i=\overline{1,N}$, N – общее число панелей. Интенсивность вихревого слоя принимается постоянной на каждой панели и равной среднему значению $\widetilde{\gamma}_i$ плотности интенсивности вихревого слоя на участке границы, соответствующем этой панели. Тогда интегральное уравнение (3.2) может быть приближенно заменено системой из N линейных алгебраических уравнений, переход к которым подробно рассматривается в работах [7, 8]:

$$\sum_{\sigma=1,2}\sum_{j=1}^{N^\sigma}\frac{\widetilde{\gamma}_j^\sigma \vec{\tau}_i^s}{L_i^s}\cdot\int_{K_i^s} dl_{r_0}^{s,i}\int_{K_j^\sigma}\frac{\vec{k}\times(\vec{r}-\vec{r}_0)}{2\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}dl_r^{\sigma,j}-\frac{\widetilde{\gamma}_i^s}{2}+R^s=-\frac{\vec{\tau}_i^s}{L_i^s}\cdot\int_{K_i^s}\left(\frac{\vec{\Gamma}\times\vec{r}_0}{2\pi|\vec{r}_0|^2}+\vec{V}_\Omega(\vec{r}_0)\right)dl_{r_0}^{s,i}, \tag{4.1}$$

$$\vec{r}\in\partial S,\ i=\overline{1,N^s}, s=\overline{1,2},$$

где индекс s имеет такое же значение что и σ; $dl_{r_0}^{s,i}$, $dl_{r_0}^{\sigma,j}$ – дифференциалы длин панелей с номерами i и j соответственно, по которым производится интегрирование; R^s – регуляризирующая переменна, соответствующая s-му профилю [3, 4]; N^1 и N^2 – количество панелей на внутренней и внешней окружностях соответственно.

Система (3.3) заменяется дискретным аналогом:

$$\sum_{j=1}^{N_\sigma}\gamma_j^\sigma l_j^\sigma = G^\sigma,\ \sigma=1,2. \tag{4.2}$$

При численном решении уравнений (4.1) и (4.2) наибольшую трудность представляет определить способ интегрирования следующей величины:

$$V_{i,j}^{\sigma,s}=\int_{K_i^s} dl_{r_0}^{s,i}\int_{K_j^\sigma}\frac{\vec{k}\times(\vec{r}-\vec{r}_0)}{2\pi\cdot|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}dl_r^{\sigma,j},\ \sigma=\overline{1,2},\ s=\overline{1,2}. \tag{4.3}$$

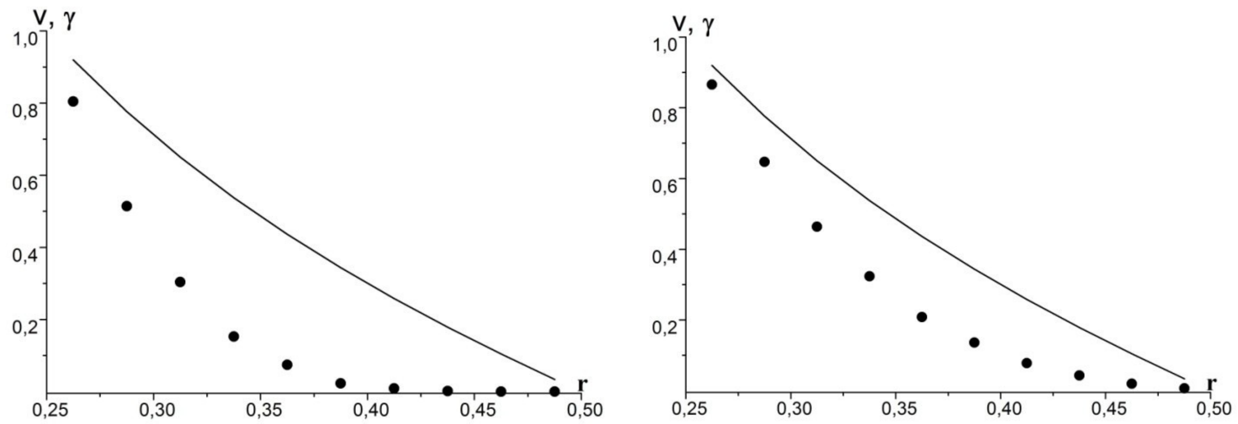
В уравнении (4.3) величина $V_{i,j}^{\sigma,s}$ и все интегралы вычисляются по аналитическим формулам, описанным в работах [7, 8]. Выполнение граничного условия обеспечивается в среднем на каждой панели [6-9].

В связи с указанными особенностями расчетных схем использование «модифицированного» МВЭ представляется перспективным.

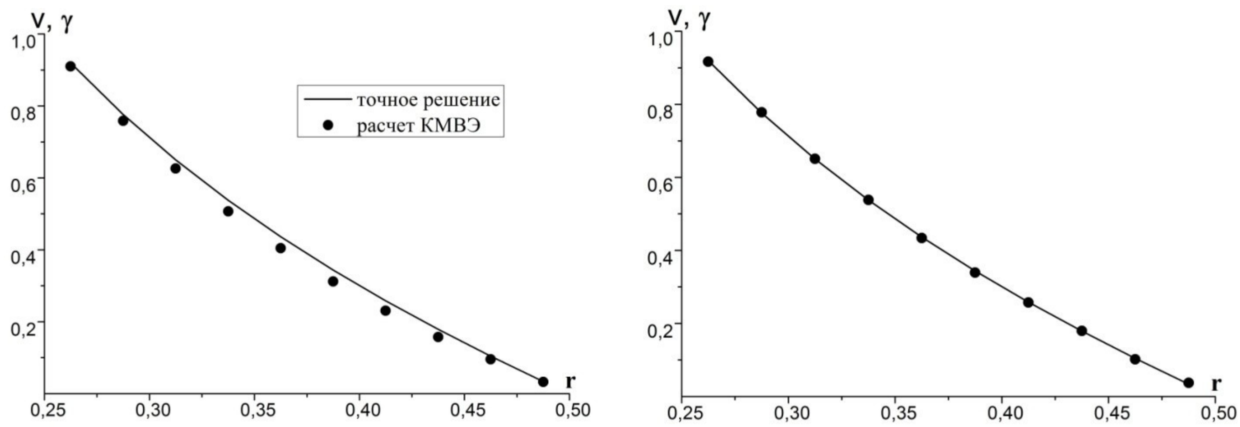
5. Результаты расчета обтекания. В расчетах увеличение циркуляции вихря в центре окружностей производилось постепенно с нулевого значения до величины Γ (то есть угловая скорость вращения внутреннего цилиндра нарастала постепенно). По истечении некоторого времени течение в области устанавливалось и тогда распределение скоростей по радиальной координате, полученное численно (точки, рис. 2 г.)), практически совпадало с точным решением (сплошная линия, рис. 2 г.)). Это свидетельствует о способности схемы МВЭ с касательными компонентами скорости правильно моделировать течение среды в замкнутой области и достаточно точно определять интенсивности ВЭ.

При численном моделировании течения Тейлора – Куэтта для расчета использовались следующие параметры $r_1 = 0{,}25,\ r_1 = 0{,}50,\ \omega_1 = 8/\pi,\ \omega_2 = 0$. Это соответствует значениям $\mathrm{Re} \approx 80$.

Точное решение было найдено и построено с помощью системы вычислений WolframMathematica.



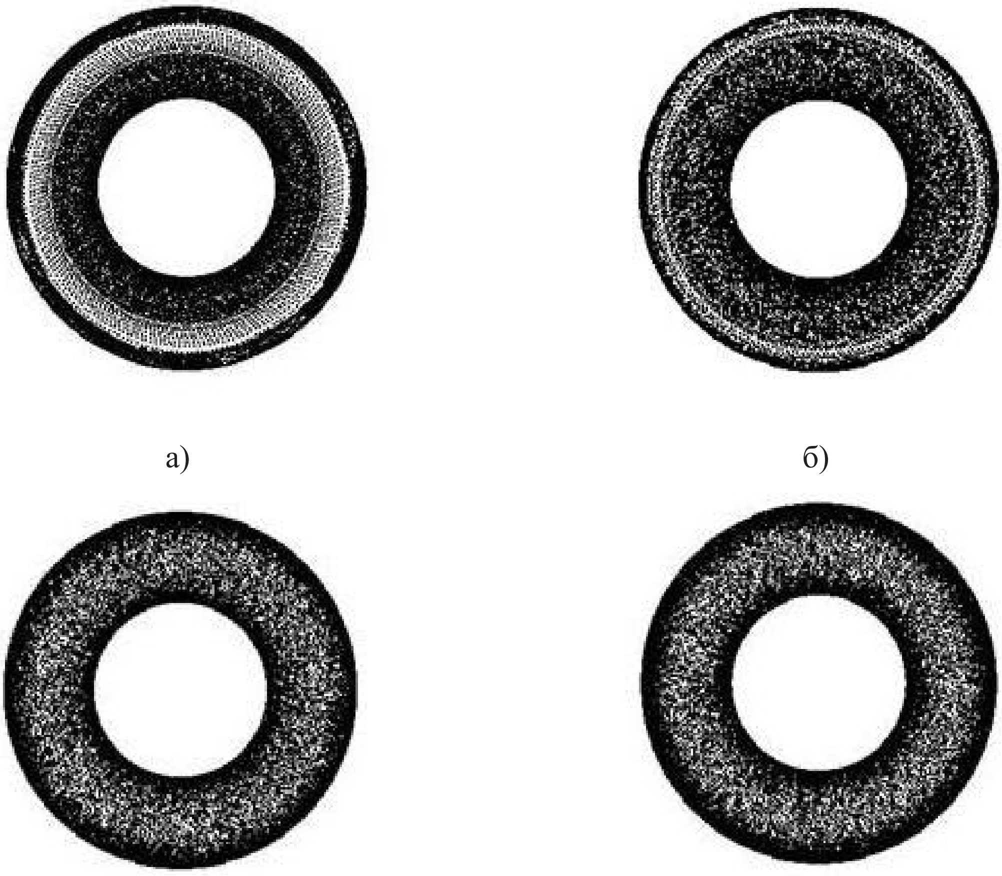
а) б)



в) г)

Рис. 2. Сравнение точного решения с численным. Буквы а), б), в), г) соответствуют 500-му, 1000-му, 3000-му, 5000-му шагу моделирования по времени

Из результатов моделирования видно, что к 5000-му шагу течение устанавливается и результаты численного и точного решения практически совпадают.



а) б)

в) г)

Рис. 3. Результат моделирования течения Тейлора – Куэтта программным комплексом POLARA

6. Выводы. Результаты численного моделирования течения Тейлора – Куэтта хорошо согласуются с точным решением. Это свидетельствуют о перспективности использования метода вихревых элементов с нулевыми касательными компонентами скорости для моделирования течений вязкой несжимаемой среды.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 736 с.
2. Chossat P., Iooss G. The Couette-Taylor Problem. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1994, v.102, 233 p.
3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995. 520 с.
4. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во МГУ, 2006. 184 с.
5. Марчевский И.К., Морева В.С. Численное моделирование в задачах аэрогидродинамики с использованием метода вихревых элементов// CAD/CAM/CAE Observer, 2012. № 2. С. 84-91.
6. Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H. Accuracy Considerations for Implementing Velocity Boundary Conditions in Vorticity Formulations // SANDIAREPORTSAND96-0583 UC-700. March, 1996, 52 p.
7. Морева В.С. Вычисление вихревого влияния в модифицированной схеме метода вихревых элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2012. Спец. вып. № 2 «Математическое моделирование в технике. С. 137-144.
8. Морева В.С. Математическое моделирование обтекания профилей с использованием новых расчетных схем метода вихревых элементов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2013. 130 с.
9. Макарова М.Е. Расчет стационарного безотрывного обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой среды // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2011. Спец. выпуск «Прикладная математика». С. 124-133.