электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 539.3

Исследование движения механической системы с односторонними связями компьютерным способом

***Антонов А.В.**, студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Робототехнические системы»

***Подгуйко Н.А.**, студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Плазменные энергетические установки»

Научный руководитель: Г.И. Дубровина, к.ф.-м.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
bauman@bmstu.ru

Постановка задачи

Тонкий однородный стержень массой m = 5.0 кг, длиной AD = 2l (l = 1.0 м), в точке A опирается на гладкую вертикальную стену, в точке B на гладкий выступ. Расстояние между стержнем и выступом h = 1.0 м. Стержень приходит в движение, в начальный момент времени занимая положение, соответствующее $\varphi(0) = 0.3$ рад, и имея угловую скорость $\omega(0) = 0.1$ рад/с.

Определить:

1) Угол α наклона стержня к горизонту, при котором не будет происходить отрыв стержня от вертикальной стенки в начальный момент времени $t = 0$.

2) При φ_0, удовлетворяющему условию безотрывного в точке A начала движения, найти момент времени t_1, в который произойдет отрыв стержня от вертикальной стенки.

3) Найти момент времени t_2, в который произойдет отрыв стержня от второй опоры в точке B.

4) Найти момент времени t_3, в который конец стержня D ударится о вертикальную стену.

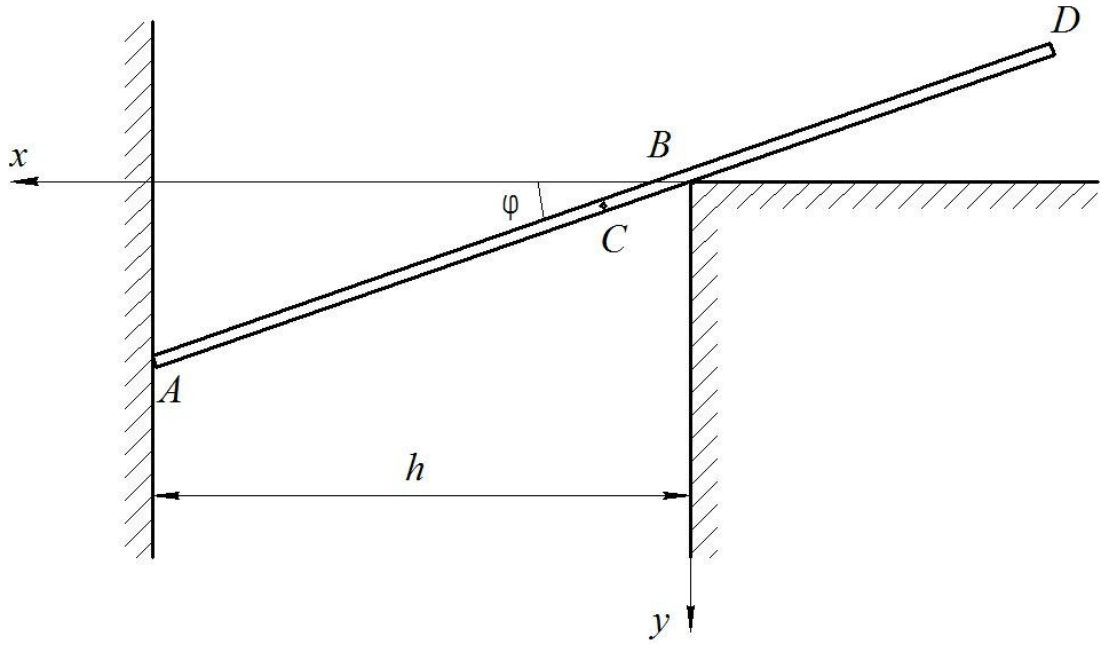


Рис. 1. Условие задачи

Решение

1. Определение угла, при котором происходит отрыв в начальный момент времени.

Уравнения плоского движения стержня

$$m\ddot{x}_C = N_B \sin\varphi - N_A, \tag{1}$$

$$m\ddot{y}_C = mg - N_B \cos\varphi, \tag{2}$$

$$J_C\ddot{\varphi} = N_A l \sin\varphi + N_B\left(\frac{h}{\cos\varphi} - l\right). \tag{3}$$

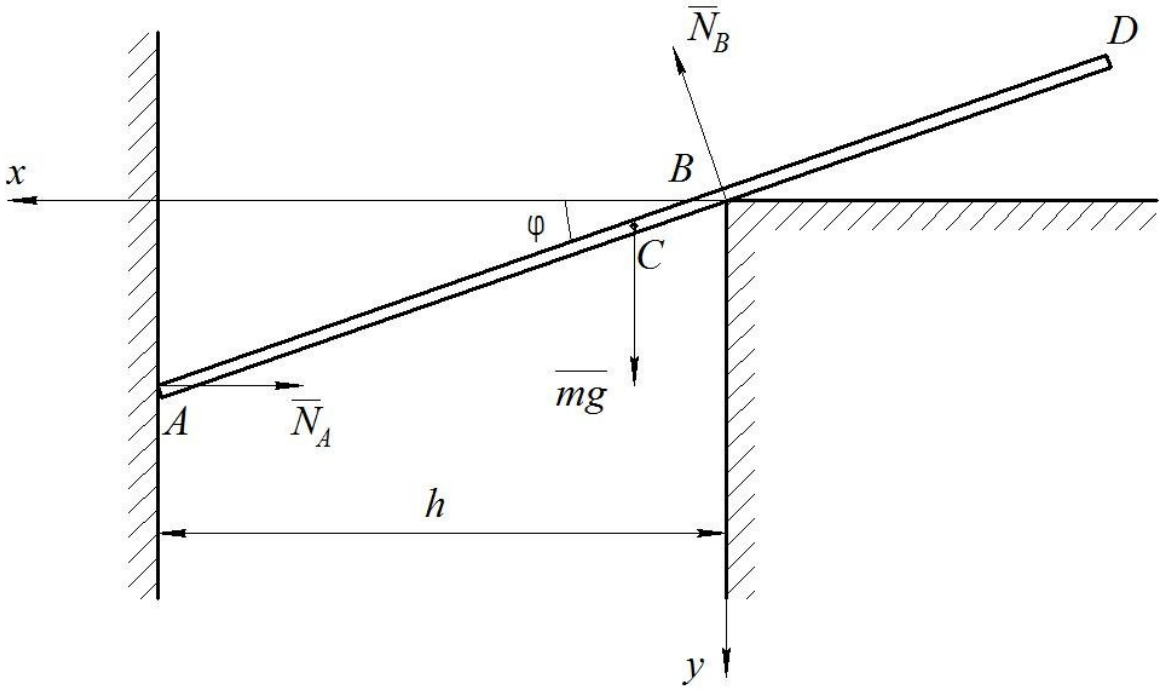


Рис. 2. Расчетная схема к вопросу 1

Уравнения геометрических связей для центра масс стержня

$$x_C = h - l\cos\varphi, \tag{4}$$

$$y_C = (AB - l)\sin\varphi = \left(\frac{h}{\cos\varphi} - l\right)\sin\varphi = h\,\mathrm{tg}\,\varphi - l\sin\varphi. \tag{5}$$

Дифференцируем (4) и (5) дважды

$$\dot{x}_C = l\dot{\varphi}\ \ \sin\varphi, \tag{6}$$

$$\ddot{x}_C = l(\ddot{\varphi}\ \ \sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi), \tag{7}$$

$$\dot{y}_C = h\frac{\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi} - l\dot{\varphi}\ \ \cos\varphi, \tag{8}$$

$$\ddot{y}_C = h\left(\frac{\ddot{\varphi}}{\cos^2\varphi} + \frac{2\dot{\varphi}^2\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\right) - l(\ddot{\varphi}\ \ \cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi). \tag{9}$$

Для определения углового ускорения стержня применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в форме мощности

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^{N} W_k^{(e,i)}. \tag{10}$$

Кинетическая энергия стержня

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C\dot{\varphi}^2}{2}, \tag{11}$$

Скорость центра масс стержня с учетом (6) и (8)

$$V_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{h^2\dot{\varphi}^2}{\cos^4\varphi} - \frac{2hl\dot{\varphi}^2}{\cos\varphi}. \tag{12}$$

Момент инерции стержня относительно центра масс

$$J_C = \frac{1}{12}m(2l)^2 = \frac{1}{3}ml^2. \tag{13}$$

Тогда, согласно (11), кинетическая энергия стержня

$$T = \frac{m\dot{\varphi}^2}{2}\left(\frac{4l^2}{3} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{2hl}{\cos\varphi}\right), \tag{14}$$

$$\frac{dT}{dt} = m\dot{\varphi}\ \ddot{\varphi}\left(\frac{4l^2}{3} + \frac{h^2}{\cos^4\varphi} - \frac{2hl}{\cos\varphi}\right) + \frac{m\dot{\varphi}^3}{2}\left(\frac{4h^2\sin\varphi}{\cos^5\varphi} - \frac{4hl\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right), \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{N} W_k^{(e,i)} = W(\overline{mg}) = mg * \dot{y}_C = mg\dot{\varphi}\left(\frac{h}{\cos^2\varphi} - l\cos\varphi\right). \tag{16}$$

Подставляя (15) и (16) в (10), находим угловое ускорение стержня

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2(3hl\cos^2\varphi - 6h^2)\sin\varphi + (3gh - 3gl\cos^3\varphi)\cos^3\varphi}{(4l^2\cos^4\varphi + 3h^2 - 6hl\cos^3\varphi)\cos\varphi}. \tag{17}$$

Из уравнений (1) и (2) с учетом (7), (9) и (17) определяем реакции связей

$$N_A = \frac{ml\dot{\varphi}^2(6h^2 - 8hl\cos\varphi - 9h^2\cos^2\varphi + 14hl\cos^3\varphi - 4l^2\cos^4\varphi)}{(4l^2\cos^4\varphi + 3h^2 - 6hl\cos^3\varphi)\cos\varphi} + \frac{mg(4l^2\cos\varphi - 3hl)\sin\varphi\cos^2\varphi}{4l^2\cos^4\varphi + 3h^2 - 6hl\cos^3\varphi}, \tag{18}$$

$$N_B = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2(9h\cos^2\varphi - 4l\cos^3\varphi - 8h)\sin\varphi}{(4l^2\cos^4\varphi + 3h^2 - 6hl\cos^3\varphi)\cos\varphi} + \frac{mg(4 - 3\cos^2\varphi)l^2\cos^2\varphi}{4l^2\cos^4\varphi + 3h^2 - 6hl\cos^3\varphi}. \quad (19)$$

Отвечая на первый вопрос задачи, зададим φ(0) = α, φ̇(0) = 0. Получаем для реакции в точке A

$$N_A(0) = \frac{mg(4l^2\cos\alpha - 3hl)\sin\alpha\cos^2\alpha}{4l^2\cos^4\alpha + 3h^2 - 6hl\cos^3\alpha}. \quad (20)$$

Отрыв в начальный момент времени невозможен, если $N_A(0) \geq 0$

$$\frac{mg(4l^2\cos\alpha - 3hl)\sin\alpha\cos^2\alpha}{4l^2\cos^4\alpha + 3h^2 - 6hl\cos^3\alpha} \geq 0. \quad (21)$$

Решая данное неравенство методом интервалов, находим

$$0 \leq \alpha \leq arccos\frac{3h}{4l}. \quad (22)$$

2. Определение момента времени отрыва стержня от стены в точке A.

Представим уравнение (17) в нормальной форме Коши

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad (23)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega^2(3hl\cos^2\varphi - 6h^2)\sin\varphi + (3gh - 3gl\cos^3\varphi)\cos^3\varphi}{(4l^2\cos^4\varphi + 3h^2 - 6hl\cos^3\varphi)\cos\varphi}. \quad (24)$$

Эту систему нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка решаем численно. Начальные условия

$$\varphi(0) = 0.3 \text{ рад}, \qquad \omega(0) = 0.1 \text{ рад/с}.$$

На каждом временном шаге анализируем значение реакции в опоре А

$$N_A(\varphi,\omega)=\frac{ml\omega^2(6h^2-8hl\cos\varphi-9h^2\cos^2\varphi+14hl\cos^3\varphi-4l^2\cos^4\varphi)}{(4l^2\cos^4\varphi+3h^2-6hl\cos^3\varphi)\cos\varphi}$$
$$+\frac{mg(4l^2\cos\varphi-3hl)\sin\varphi\cos^2\varphi}{4l^2\cos^4\varphi+3h^2-6hl\cos^3\varphi}. \quad (25)$$

В момент отрыва стержня от опоры А

$$N_A=0.$$

Определяем время в этот момент, а также значения угла поворота стержня и его угловой скорости

t_1 = 0.35108 с, $\varphi_1=\varphi(t_1)$ = 0.54258 рад, $\omega_1=\omega(t_1)$ = 1.29202 рад/с.

3. Определение момента времени отрыва стержня от опоры в точке В.

После исчезновения связи в точке А число степеней свободы стержня увеличивается до двух. Составим уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{s}}\right)-\frac{\partial T}{\partial s}=Q_s, \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi. \quad (27)$$

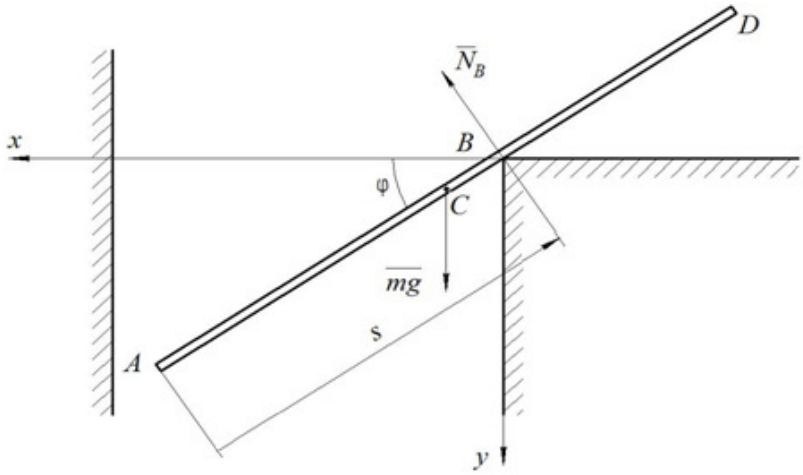


Рис. 3. Расчетная схема к вопросу 3

Кинетическая энергия стержня

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C\dot{\varphi}^2}{2}, \tag{28}$$

Уравнения геометрических связей для центра масс стержня

$$x_C = (s - l)\cos\varphi, \tag{29}$$

$$y_C = (s - l)\sin\varphi. \tag{30}$$

Дифференцируем (29) и (30)

$$\dot{x}_C = \dot{s}\ \cos\varphi - (s - l)\dot{\varphi}\ \sin\varphi, \tag{31}$$

$$\dot{y}_C = \dot{s}\ \sin\varphi + (s - l)\dot{\varphi}\ \cos\varphi\,. \tag{32}$$

Скорость центра масс стержня с учетом (31) и (33)

$$V_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = \dot{s}^2 + (s - l)^2\dot{\varphi}^2. \tag{33}$$

Тогда, согласно (28), кинетическая энергия стержня

$$T = \frac{m}{2}[\dot{s}^2 + (s - l)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}l^2\dot{\varphi}^2]. \tag{34}$$

Обобщенные силы

$$Q_s = \frac{1}{\delta s}\left(\sum \delta A_s\right) = \frac{mg\delta s \sin\varphi}{\delta s} = mg\sin\varphi, \quad (35)$$

$$Q_\varphi = \frac{1}{\delta\varphi}\left(\sum \delta A_\varphi\right) = \frac{mg(s-l)\cos\varphi\,\delta\varphi}{\delta\varphi} = mg(s-l)\cos\varphi. \quad (36)$$

Из уравнений (26), (27) с учетом (34) – (36) находим

$$\ddot{\varphi} = \frac{3(l-s)(2\dot{s}\dot{\varphi} - g\cos\varphi)}{4l^2 + 3s(s-2l)}, \quad (37)$$

$$\ddot{s} = g\sin\varphi + (s-l)\dot{\varphi}^2. \quad (38)$$

Реакцию в опоре B находим по теореме об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс

$$N_B = \frac{J_C\ddot{\varphi}}{s-l} = \frac{ml^2(g\cos\varphi - 2\dot{s}\dot{\varphi}}{4l^2 + 3s(s-2l)}. \quad (39)$$

Представим систему уравнений (37) и (38) в нормальной форме Коши

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad (40)$$

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad (41)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3(l-s)(2v\omega - g\cos\varphi)}{4l^2 + 3s(s-2l)}, \quad (42)$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\varphi + (s-l)\omega^2. \quad (43)$$

Эту систему нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка решаем численно. Принимаем начальные условия $\varphi(t_1) = \varphi_1$ и $\omega(t_1) = \omega_1$, полученные в п.2. Найдем начальные условия для *s* и *v*. При $t < t_1$

$$s = AB = \frac{h}{\cos\varphi},$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{\varphi}\frac{h\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

В момент времени $t = t_1$ получим

$$s(t_1) = 1.16771 \text{ м}, \qquad v(t_1) = 0.90966 \text{ м/с}.$$

На каждом временном шаге анализируем значение реакции в опоре B

$$N_B(\varphi, \omega, s, v) = \frac{ml^2(g\cos\varphi - 2v\omega)}{4l^2 + 3s(s-2l)}. \tag{44}$$

В момент отрыва стержня от опоры B

$$N_B = 0.$$

Определяем время в этот момент, а также значения фазовых координат

$t_2 = 0.52598$ с, $\varphi_2 = \varphi(t_2) = 0.80529$ рад, $\omega_2 = \omega(t_2) = 1.62975$ рад/с,

$s_2 = s(t_2) = 1.42208$ м, $v_2 = v(t_2) = 2.08327$ м/с.

4. Определение момента удара конца D стержня о вертикальную стенку.

После отрыва стержня от опоры B его движение перестает ограничиваться связями. Уравнения плоского движения стержня принимают вид

$$\ddot{x}_C = 0, \tag{45}$$

$$\ddot{y}_C = g, \tag{46}$$

$$\ddot{\varphi} = 0. \tag{47}$$

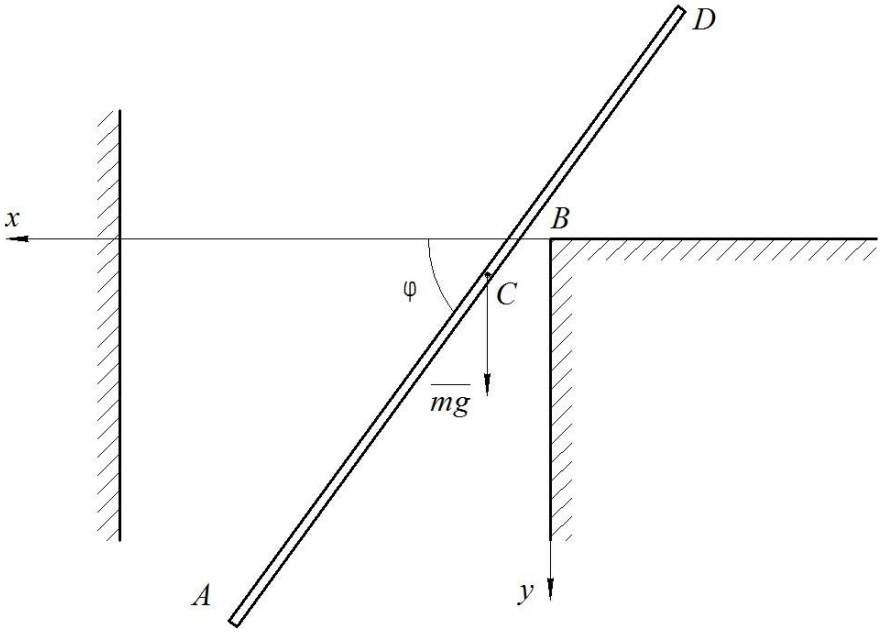


Рис. 4. Расчетная схема к вопросу 4

Эти уравнения интегрируем аналитически и получаем

$$x_C = C_1 t + C_2, \tag{48}$$

$$y_C = \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4, \tag{49}$$

$$\varphi = C_5 t + C_6. \tag{50}$$

Начальные условия для определения констант $C_1 \ldots C_6$ принимаем в момент времени t_2. По формулам (29) – (31), (33) определяем начальные условия для движения центра масс стержня

$x_{C2} = x_C(t_2) = 0.29246$ м, $v_{Cx2} = v_{Cx}(t_2) = 0.94751$ м/с,

$y_{C2} = y_C(t_2) = 0.30433$ м, $v_{Cy2} = v_{Cy}(t_2) = 1.97874$ м/с.

Для момента времени $t > t_2$ уравнения (48) – (50) принимают вид

$$x_C = v_{Cx2}(t - t_2) + x_{C2}, \tag{51}$$

$$y_C = \frac{g(t - t_2)^2}{2} + v_{Cy2}(t - t_2) + y_{C2}, \tag{52}$$

$$\varphi = \omega_2(t - t_2) + \varphi_2. \tag{53}$$

Горизонтальная координата конца D стержня

$$x_D = x_C - l\cos\varphi. \tag{54}$$

С учетом (49) и (51)

$$x_D = v_{Cx2}(t - t_2) + x_{C2} - l\cos[\omega_2(t - t_2) + \varphi_2]. \tag{55}$$

В момент времени $t = t_3$, при котором конец D стержня ударяется о вертикальную стенку,

$$x_D = h, \tag{56}$$

$$v_{Cx2}(t_3 - t_2) + x_{C2} - l\cos[\omega_2(t_3 - t_2) + \varphi_2] = h. \tag{57}$$

Решая последнее уравнение численно, находим

$$t_3 = 1.09784 \text{ с}.$$

Код программы (Delphi)

```
program Project1;

uses

  SysUtils,Math;

type

  Tmas_r=array of real;

  Tmatr_r=array of Tmas_r;



var z,z1:integer;

    m,g,l,h,fi,s03,v03,t1,vcx,vcy,xc,yc,t3,a0,w0:real;

    t:Tmas_r;

    d,Diff,Diff2:Tmatr_r;



procedure EnterMatr(var k:Tmatr_r);
```

```
  var i,j,n,q,p:integer;
  begin
    p:=0;
    n:=3;
    q:=20;
    setlength(k,n,q);
    for i:=0 to n-1 do
      begin
        for j:=0 to q-1 do
          begin
            k[i,j]:=p;
            p:=p+2
          end;
        p:=0;
      end;
  end;


procedure PrintMatr(var k:Tmatr_r);
  var i,j,n,q:integer;
  begin
    n:=length(k);
    q:=length(k[0]);
    for i:=0 to n-1 do
```

```
    begin
      for j:=0 to q-1 do
        write(k[i,j]:1:2,' ');
      writeln;
    end;
  end;

procedure EnterMas(var g:Tmas_r;a,b:real);
  var i,n:integer;
    t,dt:real;
  begin
   t:=0;
   n:=50000;
   dt:=(abs(a-b)/n);
   setlength(g,n);
   for i:=0 to n-1 do
    begin
    g[i]:=t;
    t:=t+dt;
    end;
  end;

procedure PrintMas(var g:Tmas_r);
```

```
  var i,n:integer;
  begin
    n:=length(g);
    for i:=0 to n-1 do
      write(g[i]:1:1,' ');
  end;

function Na(m,l,h,fi:real):real;
  begin
    Na:=( m*g*(4*l/h*cos(fi)-3)*sin(fi)*power(cos(fi),2) ) / ( 4*l/h*power(cos(fi),4)+3*h/l-
6*power(cos(fi),3) );
  end;

function Otr(a,b:real):real;
  var c,u:real;

  begin

    c:=(b+a)/2;
    u:=(b-a);

    while u>0.00001 do
      begin
```

```
      if Na(m,l,h,c)*Na(m,l,h,a)>0 then
        a:=c
      else
        b:=c;
      c:=(b+a)/2;
      u:=abs(b-a);
    end;
  Otr:=c;
end;

function Na2(m,l,h,fi,w:real):real;
 begin
   Na2:=( m*l*sqr(w)*(6*h/l-8*cos(fi)-9*h/l*sqr(cos(fi))+14*power(cos(fi),3)-
4*l/h*power(cos(fi),4))+m*g*(4*l/h*cos(fi)-3)*sin(fi)*power(cos(fi),3) ) / (
(4*l/h*power(cos(fi),4)+3*h/l-6*power(cos(fi),3))*cos(fi) );
 end;

function dwdfi(l,h,fi,w:real):real;
 begin
   dwdfi:=( sqr(w)*(3*power(cos(fi),3)-6*h/l)*sin(fi)+(3*g/l-
3*g/h*power(cos(fi),3))*power(cos(fi),3) ) / ( (4*l/h*power(cos(fi),4)+3*h/l-
6*power(cos(fi),3))*cos(fi) );
 end;
```

```
procedure Dif(var Diff:Tmatr_r; var t:Tmas_r; w0,fi0:real; var flag:integer);
 var j,n,q:integer;
     dt:real;
 begin
   q:=length(t);
   n:=3;
   setlength(Diff,n,q);
   dt:=t[1]-t[0];

   Diff[0,0]:=t[0];
   Diff[1,0]:=fi0;
   Diff[2,0]:=w0;

   for j:=1 to q-1 do
      begin
        Diff[0,j]:=t[j];
        Diff[1,j]:=Diff[1,j-1]+dt*Diff[2,j-1];
        Diff[2,j]:=Diff[2,j-1]+dt*dwdfi(l,h,Diff[1,j-1],Diff[2,j-1]);
        if Na2(m,l,h,Diff[1,j],Diff[2,j])*Na2(m,l,h,Diff[1,j-1],Diff[2,j-1])<0 then
          flag:=j;
      end;
 end;
```

```
function dvdt2(l,s,fi,w:real):real;
 begin
   dvdt2:=g*sin(fi)+(s-l)*sqr(w);
 end;

function dwdt2(l,s,v,fi,w:real):real;
 begin
   dwdt2:=( 3*(l-s)*(2*v*w-g*cos(fi)) ) / ( 4*sqr(l)+3*s*(s-2*l) );
 end;

function Nb2(m,l,s,v,fi,w:real):real;
 begin
   Nb2:=( m*sqr(l)*(g*cos(fi)-2*v*w) ) / (4*sqr(l)+3*s*(s-2*l));
 end;

procedure Dif2(var Diff2:Tmatr_r; var t:Tmas_r; w0,fi0,s0,v0:real; var flag:integer);
 var j,n,q:integer;
     dt:real;
     k1,k2,k3,k4,m1,m2,m3,m4:real;
     l1,l2,l3,l4,f1,f2,f3,f4:real;
 begin
   q:=length(t);
```

```
  n:=5;
  setlength(Diff2,n,q);
  dt:=t[1]-t[0];

  Diff2[0,0]:=t[0];
  Diff2[1,0]:=fi0;
  Diff2[2,0]:=w0;
  Diff2[3,0]:=s0;
  Diff2[4,0]:=v0;

  for j:=1 to q-1 do
    begin
      Diff2[0,j]:=t[j];
      Diff2[1,j]:=Diff2[1,j-1]+dt*Diff2[2,j-1];
      Diff2[3,j]:=Diff2[3,j-1]+dt*Diff2[4,j-1];
      Diff2[2,j]:=Diff2[2,j-1]+dt*dwdt2(l,Diff2[3,j-1],Diff2[4,j-1],Diff2[1,j-1],Diff2[2,j-1]);
      Diff2[4,j]:=Diff2[4,j-1]+dt*dvdt2(l,Diff2[3,j-1],Diff2[1,j-1],Diff2[2,j-1]);
      if Nb2(m,l,Diff2[3,j],Diff2[4,j],Diff2[1,j],Diff2[2,j])*Nb2(m,l,Diff2[3,j-1],Diff2[4,j-
1],Diff2[1,j-1],Diff2[2,j-1])<0 then
        flag:=j;
    end;
end;
```

```
Function Last(l,h,xc,vcx,t3,t2,w2,fi2:real):real;
 begin
 Last:=xc+vcx*(t3-t2)-l*cos(w2*(t3-t2)+fi2)-h;
 end;

function OtrLast(a,b,l,h,xc,vcx,t2,w2,fi2:real):real;
 var c,u:real;

 begin

  c:=(b+a)/2;
  u:=(b-a);

  while u>0.00001 do
   begin
    if Last(l,h,xc,vcx,c,t2,w2,fi2)*Last(l,h,xc,vcx,a,t2,w2,fi2)>0 then
     a:=c
    else
     b:=c;
    c:=(b+a)/2;
    u:=abs(b-a);
   end;
  OtrLast:=c;
```

```
end;


begin
g:=9.8;
writeln('Pleas, enter the parametrs');
write('m=');
read(m);
write('l=');
read(l);
write('h=');
read(h);
write('a0=');
read(a0);
write('w0=');
read(w0);
readln;
writeln;
writeln('a=',Otr(0.1,pi/2):1:5);
EnterMas(t,0,0.5);
Dif(Diff,t,w0,a0,z);
writeln;
writeln('t1=',Diff[0,z]:1:5);
writeln('fi1=',Diff[1,z]:1:5);
```

```
writeln('w1=',Diff[2,z]:1:5);

t1:=Diff[0,z];

writeln;


{3 ýòàï}

s03:=h/cos(Diff[1,z]);

v03:=Diff[2,z]*h*sin(Diff[1,z])/sqr(cos(Diff[1,z]));

Dif2(Diff2,t,Diff[2,z],Diff[1,z],s03,v03,z1);

writeln('s03=',s03:1:5);

writeln('v03=',v03:1:5);

writeln;

writeln('t2=',Diff2[0,z1]+t1:1:5);

writeln('fi2=',Diff2[1,z1]:1:5);

writeln('w2=',Diff2[2,z1]:1:5);

writeln('s2=',Diff2[3,z1]:1:5);

writeln('v2=',Diff2[4,z1]:1:5);

writeln;


{ýòàï 4}

vcx:=Diff2[4,z1]*cos(Diff2[1,z1])-(Diff2[3,z1]-l)*Diff2[2,z1]*sin(Diff2[1,z1]);

vcy:=Diff2[4,z1]*sin(Diff2[1,z1])+(Diff2[3,z1]-l)*Diff2[2,z1]*cos(Diff2[1,z1]);

xc:=(Diff2[3,z1]-l)*cos(Diff2[1,z1]);

yc:=(Diff2[3,z1]-l)*sin(Diff2[1,z1]);
```

```
  t3:=OtrLast(Diff2[0,z1]+0.01,2,l,h,xc,vcx,Diff2[0,z1]+t1,Diff2[2,z1],Diff2[1,z1]);

  writeln('vcx=',vcx:1:5);

  writeln('vcy=',vcy:1:5);

  writeln('xc=',xc:1:5);

  writeln('yc=',yc:1:5);

  writeln('t3=',t3:1:5);


  readln;

  readln;


end.
```

Список литературы

1. Кондратенко А.И., Притыкин Д.Е. Задача компьютерного конкурса // Всерос. олимпиада по теоретической механике: рукопись. Новочеркасск, 2013. 1 с.
2. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М., Колесников К.С., Космодемьянский В.А., Назаренко Б.П., Панкратов А.А., Русанов П.Г., Саратов Ю.С., Степанчук Ю.М., Тушева Г.М., Шкапов П.М. Курс теоретической механики / под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011. 760 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином, 2001. 375 с.