электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 532.529

О моделировании обтекания подвижных профилей методом вихревых элементов

***Кузьмина К.С.**, студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
кафедра «Прикладная математика»

Научный руководитель: Марчевский И.К., к.ф.-м. н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
iliamarchevsky@bmstu.ru

1. Введение. Математическое моделирование течений жидкостей и газов, даже в упрощенной двумерной постановке, несмотря на более чем столетнюю историю исследований в этом направлении, остается актуальной задачей. Она возникает во многих инженерных приложениях, когда требуется исследовать поведение конструкций, подверженных действию набегающего потока, либо рассчитать нагрузки, действующие на подвижные элементы конструкций, находящиеся в жидкости (влиянием газа, в частности, воздуха, при сравнительно небольшой относительной скорости в большинстве случаев можно пренебречь в силу его малой плотности).

Хорошо развитые сеточные методы вычислительной аэрогидродинамики позволяют решать подобные задачи, однако их вычислительная сложность является достаточно высокой, особенно при решении сопряженных задач аэрогидроупругости, когда помещенное в жидкость или газ тело может перемещаться или деформироваться по заданному закону или под действием аэрогидродинамических сил.

При решении таких задач, если сжимаемостью среды можно пренебречь (т.е. при сравнительно малых дозвуковых скоростях), могут оказаться чрезвычайно эффективными бессеточные лагранжевы методы.

Методы вихревых элементов [1-4] – это класс бессеточных лагранжевых методов численного моделирования течений несжимаемой среды, основанных на моделировании эволюции завихренности. Распределение завихренности моделируется набором вихревых элементов (ВЭ), для каждого из которых задается положение в пространстве и циркуляция. В ряде случаев пространственную задачу обтекания тела можно заменить плоской задачей обтекания профиля. Методы вихревых элементов первоначально были разработаны для моделирования двумерных (плоских) течений идеальной среды, более поздние модификации позволили решать задачи для профилей, обтекаемых вязкой средой. Существует несколько подходов к учету влияния вязкости, в данной работе был использован метод вязких вихревых доменов, разработанный Г.Я. Дынниковой [4], поскольку его вычислительная эффективность подтверждена многими исследованиями.

В случае неподвижного и недеформируемого профиля обтекаемая поверхность заменяется тонким вихревым слоем, а если профиль является движущимся или деформируемым, то на его поверхности кроме вихревого слоя в общем случае требуется разместить слой источников. Если закон движения профиля известен, интенсивности слоя источников и так называемого присоединенного вихревого слоя могут быть найдены как нормальная и касательная составляющие скорости точек профиля соответственно [4, 5], а интенсивность свободного вихревого слоя, обеспечивающего выполнение граничного условия прилипания, остается заранее неизвестной.

Точность вычисления интенсивности свободного вихревого слоя определяет точность выполнения граничных условий на поверхности профиля и, следовательно, точность моделирования вихревого следа. При этом численные схемы, которые часто используются в методах вихревых элементов, иногда могут приводить к значительным погрешностям.

Целью данной работы является разработка численной схемы метода вихревых элементов для решения задачи о моделировании обтекания движущегося и (или) деформируемого профиля потоком вязкой несжимаемой жидкости, основанной на отличном от классического подходе к выполнению граничных условий, и оценка ее точности на примере решения одной модельной задачи.

2. Постановка задачи. Движение вязкой несжимаемой среды [6] описывается уравнением неразрывности

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

и уравнением Навье – Стокса

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{t}} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V} = \nu \Delta \vec{V} - \frac{\nabla p}{\rho},$$

где $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$ – скорость среды в точке $\vec{r}$ в момент времени t; $p = p(\vec{r}, t)$ – давление; $\rho = \mathrm{const}$ – плотность среды; ν – коэффициент кинематической вязкости; ∇ – оператор Гамильтона, Δ – оператор Лапласа.

Граничные условия на бесконечности имеют вид

$$\vec{V}(\vec{r},t) \to \vec{V}_\infty, \quad p(\vec{r},t) \to p_\infty, \quad \text{при} \quad |\vec{r}| \to \infty,$$

где $\vec{V}_\infty$ и p_∞ – постоянные скорость и давление в набегающем потоке; на профиле K выполняется условие прилипания

$$\vec{V}(\vec{r},t) = \vec{V}_K(\vec{r},t), \qquad \vec{r} \in K.$$

Используя вектор завихренности $\vec{\Omega}(\vec{r},t) = \nabla \times \vec{V}(\vec{r},t)$, уравнение Навье – Стокса можно записать в форме Гельмгольца [4–6]:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{U}\right) = 0, \tag{1}$$

где $\vec{U}(\vec{r},t) = \vec{V}(\vec{r},t) + \vec{W}(\vec{r},t)$, $\vec{W}(\vec{r},t)$ – диффузионная скорость, вызванная влиянием вязкости:

$$\vec{W}(\vec{r},t) = \nu \frac{\left(\nabla \times \vec{\Omega}\right) \times \vec{\Omega}}{\left|\vec{\Omega}\right|^2}.$$

Уравнение (1) означает, что генерации новой завихренности в области течения S не происходит, а осуществляется только движение существующей завихренности вдоль векторных линий поля $\vec{U}$; в то время как новая завихренность генерируется только на границе области течения – на профиле K.

Влияние профиля заменяется суперпозицией влияний присоединенных (связанных с профилем) вихревого слоя $\gamma_{att}(\vec{r},t)$ и слоя источников $q_{att}(\vec{r},t)$ и свободного вихревого слоя $\gamma(\vec{r},t)$. Все эти слои расположены на профиле, при этом, как было отмечено выше,

$$\gamma_{att}(\vec{r},t) = \vec{V}_K(\vec{r},t) \cdot \vec{\tau}(\vec{r},t), \qquad q_{att}(\vec{r},t) = \vec{V}_K(\vec{r},t) \cdot \vec{n}(\vec{r},t), \qquad \vec{r} \in K,$$

где $\vec{\tau}(\vec{r},t)$ и $\vec{n}(\vec{r},t)$ – орты касательной и внешней нормали к профилю в соответствующей точке, причем направление касательной выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие $\vec{n}(\vec{r},t) \times \vec{\tau}(\vec{r},t) = \vec{k}$, где $\vec{k}$ – орт нормали к плоскости течения.

Скорость течения может быть вычислена по обобщенному закону Био – Савара [7]:

$$\vec{V}(\vec{r},t) = \vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S(t)} \frac{\vec{\Omega}\left(\vec{\xi},t\right) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^2} dS + \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{K(t)} \frac{\vec{\gamma}\left(\vec{\xi},t\right) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^2} dl_K +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{K(t)} \frac{\vec{\gamma}_{att}\left(\vec{\xi},t\right) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^2} dl_K + \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{K(t)} \frac{q_{att}\left(\vec{\xi},t\right)(\vec{r} - \vec{\xi})}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^2} dl_K. \tag{2}$$

Здесь $S(t)$ и $K(t)$ – область течения и контур профиля в момент времени t; $\vec{\gamma}_{\mathrm{att}} = \gamma_{\mathrm{att}}\vec{k}$ и $\vec{\gamma} = \gamma\vec{k}$ – векторы интенсивностей присоединенного и свободного вихревых слоев на профиле соответственно.

Если рассматривать поле скоростей $\vec{V}(\vec{r},t)$, определенное по формуле (2), не только в области течения, а на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, то на поверхности тела будет иметь место разрыв. Можно показать [8], что предельное значение вектора скорости среды со стороны профиля на его границе

$$\vec{V}_{-}(\vec{r},t) = \vec{V}(\vec{r},t) - \frac{\gamma(\vec{r},t) - \gamma_{att}(\vec{r},t)}{2}\vec{\tau}(\vec{r},t) + \frac{q_{att}(\vec{r},t)}{2}\vec{n}(\vec{r},t) =$$
$$= \vec{V}(\vec{r},t) - \frac{\vec{\gamma}(\vec{r},t) - \vec{\gamma}_{att}(\vec{r},t)}{2} \times \vec{n}(\vec{r},t) + \frac{q_{att}(\vec{r},t)}{2}\vec{n}(\vec{r},t).$$

Интенсивность свободного вихревого слоя $\gamma\big(\vec{\xi},t\big)$ может быть найдена из условия прилипания на поверхности тела, которое с учетом представления (2) имеет вид

$$\vec{V}_{-}(\vec{r},t) = \vec{V}_K(\vec{r},t), \qquad \vec{r} \in K. \tag{3}$$

3. Численная схема для вычисления интенсивности вихревого слоя.

Опуская для краткости записей зависимости всех величин от времени, которое входит как параметр, окончательно получим

$$\vec{V}_{-}(\vec{r}) = \vec{V}_{\infty} + \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\vec{\Omega}\big(\vec{\xi}\big) \times \big(\vec{r} - \vec{\xi}\big)}{\big|\vec{r} - \vec{\xi}\big|^2} dS + \frac{1}{2\pi}\oint_K \frac{\vec{\gamma}\big(\vec{\xi}\big) \times \big(\vec{r} - \vec{\xi}\big)}{\big|\vec{r} - \vec{\xi}\big|^2} dl_K +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\oint_K \frac{\vec{\gamma}_{\mathrm{att}}\big(\vec{\xi}\big) \times \big(\vec{r} - \vec{\xi}\big)}{\big|\vec{r} - \vec{\xi}\big|^2} dl_K + \frac{1}{2\pi}\oint_K \frac{q_{att}\big(\vec{\xi}\big)\big(\vec{r} - \vec{\xi}\big)}{\big|\vec{r} - \vec{\xi}\big|^2} dl_K -$$
$$- \frac{\vec{\gamma}(\vec{r}) - \vec{\gamma}_{att}(\vec{r})}{2} \times \vec{n}(\vec{r}) + \frac{q_{att}(\vec{r})}{2}\vec{n}(\vec{r}), \qquad \vec{r} \in K. \tag{4}$$

Традиционные подходы к обеспечению выполнения граничного условия, которые обычно используются в расчетных схемах метода вихревых элементов, основаны на том, что неизвестная функция $\gamma(\vec{r})$ находится из условия равенства нормальных составляющих предельного значения скорости среды $\vec{V}_{-}(\vec{r})$ и скорости обтекаемого профиля $\vec{V}_K(\vec{r})$:

$$\vec{V}_{-}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) = \vec{V}_K(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}), \qquad \vec{r} \in K. \tag{5}$$

Это равенство приводит к сингулярному интегральному уравнению первого рода, и соответствующий интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши [8]. Такой подход иногда приводит к значительным погрешностям, а при достаточно грубой аппроксимации профиля может повлечь за собой получение качественно неправильного решения. Отметим, что равенство (5) фактически выражает собой условие непротекания, однако можно показать, что оно равносильно граничному условию прилипания (3), поскольку вихревой слой с искомой интенсивностью $\gamma(\vec{r})$ является свободным.

Известен также альтернативный подход к обеспечению выполнения граничных условий: можно показать [7], что граничное условие (5) с математической точки зрения эквивалентно следующему условию равенства касательных компонент предельного значения скорости среды $\vec{V}_{-}(\vec{r})$ и скорости профиля $\vec{V}_K(\vec{r})$:

$$\vec{V}_{-}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}(\vec{r}) = \vec{V}_K(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}(\vec{r}), \qquad \vec{r} \in K. \qquad (6)$$

Данное равенство приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с ограниченным ядром относительно функции $\gamma(\vec{\xi})$ при условии гладкости профиля. Уравнение (6), как и уравнение (5) имеет неединственное решение, для выделения единственного решения используется следующее условие [8]:

$$\oint\limits_K \gamma(\vec{\xi}) dl_K = \Gamma. \qquad (7)$$

Величина Γ суммарной циркуляции свободного вихревого слоя может быть найдена по известной из постановки задачи циркуляции поля скоростей вдоль контура, охватывающего профиль, распределения $\Omega(\vec{r})$ завихренности в области течения и суммарной циркуляции присоединенного вихревого слоя $\gamma_{att}(\vec{r})$, определяемой скоростью профиля $\vec{V}_K(\vec{r})$.

При решении системы уравнений (5), (7) традиционно используется так называемая квадратурная формула типа дискретных вихрей [8], позволяющая выделить главное значение сингулярного интеграла в смысле Коши. При этом соседние отрезки (панели) ломаной, аппроксимирующей профиль, должны быть примерно одинакового размера, а квадратурная формула, которая используется для вычисления интеграла, имеет невысокую точность из-за того, что присутствует особенность в интегральном ядре. Граничное условие выполняется только в контрольных точках $\vec{k}_i$, расположенных в серединах панелей. Вся завихренность из вихревого слоя стягивается в вихревые элементы с циркуляциями Γ_j, расположенные в точках $\vec{c}_j$ – на концах панелей. Существуют и иные схемы расположения контрольных точек и точек рождения вихрей [8], однако они имеют схожие ограничения. Таким образом, для решения уравнения (5) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{\vec{k} \times (\vec{k}_i - \vec{c}_j)}{|\vec{k}_i - \vec{c}_j|^2} \right) \cdot \vec{n}_i = V_{norm,i}, \qquad i = 1, \dots, N. \qquad (8)$$

Здесь N – количество панелей, $\vec{n}_i$ – единичный вектор нормали в i-й контрольной точке,

$$V_{norm,i} = -\vec{n}_i \cdot \left(\vec{V}_\infty - \vec{V}_K(\vec{k}_i) + \sum_{w=1}^{N_V} \frac{\Gamma_w}{2\pi} \frac{\vec{k} \times (\vec{k}_i - \vec{r}_w)}{\left|\vec{k}_i - \vec{r}_w\right|^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_{att,j}}{2\pi} \frac{\vec{k} \times (\vec{k}_i - \vec{c}_j)}{\left|\vec{k}_i - \vec{c}_j\right|^2} + \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{att,j}}{2\pi} \frac{(\vec{k}_i - \vec{c}_j)}{\left|\vec{k}_i - \vec{c}_j\right|^2} \right) - \frac{q_{att,i}}{2},$$

где завихренность Ω в области течения заменена N_V вихревыми элементами с интенсивностями Γ_w, расположенных в точках $\vec{r}_w$, $w = \overline{1, N_V}$, $\Gamma_{att,j}$ – интенсивность вихревого элемента в точке $\vec{c}_j$, в который «стянута» завихренность присоединенного вихревого слоя с примыкающих к точке $\vec{c}_j$ участков соседних панелей, $Q_{att,j}$ – суммарная интенсивность слоя источников с тех же участков панелей, которая помещается в источник в точке $\vec{c}_j$. Величина $q_{att,i}$ – средняя интенсивность слоя источников на i-й панели, вычисляемая, например, как скалярное произведение скорости контура в контрольной точке $\vec{k}_i$ на нормаль в этой точке. Такой подход будем сокращенно называть N-схемой.

Альтернативный подход основан на решении системы уравнений (6), (7). Для ее решения будем так же разбивать контур на панели, однако расчетная схема может быть достаточно произвольной: в силу ограниченности ядра (для гладких профилей) нет жесткого требования к расположению расчетных и контрольных точек. Будем полагать интенсивность вихревого слоя постоянной на каждой панели, обозначим ее γ_i для i-й панели, аналогично для присоединенных слоев вихрей и источников – $\gamma_{att,i}$ и $q_{att,i}$ соответственно. Равенство касательных компонент скоростей будем обеспечивать не в отдельных контрольных точках, а в среднем на каждой панели [7, 9]. Таким образом, для решения уравнения (6) получаем следующую СЛАУ:

$$\frac{1}{L_i}\left(\int_{K_i} \sum_{j=1}^{N} \frac{\gamma_j}{2\pi} \left(\int_{K_j} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^2} dl_\xi \right) dl_r \right) \cdot \vec{\tau}_i - \frac{\gamma_i}{2} =$$

$$= -\frac{1}{L_i}\left(\int_{K_i} \sum_{w=1}^{N_V} \frac{\Gamma_w}{2\pi} \left(\frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{r}_w)}{|\vec{r} - \vec{r}_w|^2} \right) dl_r + \int_{K_i} \sum_{j=1}^{N} \frac{\gamma_{att,j}}{2\pi} \left(\int_{K_j} \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^2} dl_\xi \right) dl_r + \right.$$

$$\left. + \int_{K_i} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_{att,j}}{2\pi} \left(\int_{K_j} \frac{\vec{r} - \vec{\xi}}{\left|\vec{r} - \vec{\xi}\right|^2} dl_\xi \right) dl_r \right) \cdot \vec{\tau}_i + (\vec{V}_{K,i} - \vec{V}_\infty) \cdot \vec{\tau}_i - \frac{\gamma_{att,i}}{2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (9)$$

где L_i – длина i-й панели, обозначенной как K_i; Γ_w и $\vec{r}_w$ – циркуляции и положения N_V вихревых элементов, которые моделируют вихревой след, $w = \overline{1, N_V}$; $\gamma_{att,j}$ и $q_{att,j}$ – средние значения интенсивности присоединенных слоев вихрей и источников на i-й панели соответственно; $\vec{V}_{K,i}$ – средняя скорость профиля на i-й панели.

Разработанный подход к вычислению интенсивности вихревого слоя будем называть T-схемой. Аналитические формулы для всех входящих в уравнение (9) интегралов приведены в [9].

Уравнение (7), позволяющее выделить единственное решение, в случае N-схемы заменяется уравнением

$$\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i = \Gamma, \tag{10}$$

а в случае T-схемы – уравнением

$$\sum_{i=1}^{N} \gamma_i L_i = \Gamma. \tag{11}$$

Для численного решения уравнений (8), (10) в случае использования N-схемы или уравнений (9), (11) при использовании T-схемы применяется метод введения регуляризирующей переменной [8].

4. Аналитическое решение модельной задачи. Для того, чтобы оценить точность разработанного подхода к вычислению интенсивности вихревого слоя, рассмотрим модельную задачу о безвихревом обтекании неподвижного кругового профиля C единичного радиуса потоком идеальной несжимаемой жидкости. В этом случае комплексный потенциал течения в области $\mathbb{R}^2 \backslash C$ имеет вид [10]

$$F(\xi) = V_\infty^* \xi + \frac{V_\infty}{\xi} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \mathrm{Ln}(\xi),$$

где ξ – точка на комплексной плоскости, V_∞ – в данном случае означает комплексную скорость потока на бесконечности, звездочка означает комплексное сопряжение, Γ – циркуляция поля скоростей $\vec{V}$ по любому замкнутому контуру, охватывающему круг C.

Через комплексный потенциал течения определяется комплексная скорость потока $V(\xi) = (F')^*(\xi)$ в любой точке течения, в том числе и на границе профиля. Найдем производную комплексного потенциала

$$F'(\xi) = V_\infty^* - \frac{V_\infty}{\xi^2} - \frac{\Gamma i}{2\pi \xi},$$

и запишем выражение для комплексной скорости потока

$$V(\xi) = V_\infty - \left(\frac{V_\infty}{\xi^2}\right)^* + \frac{\Gamma i}{2\pi\xi}.$$

Интенсивность вихревого слоя равна касательной компоненте скорости на поверхности профиля. Если скорость потока направлена по оси Ox, то для интенсивности вихревого слоя можно записать

$$\gamma(\alpha) = -2V_\infty \sin\alpha + \frac{\Gamma}{2\pi}\cos 2\alpha,$$

где α – угловой параметр на окружности.

5. Вычислительный эксперимент. Сравним численные решения, которые могут быть получены с использованием N-схемы и T-схемы. Рассмотрим тестовую задачу, для которой выше было записано точное решение. Будем считать, что круговой профиль единичного радиуса движется с постоянной скоростью $V = 1$ в отрицательном направлении оси Ox. Также рассмотрим обращенное движение: когда профиль покоится, а среда движется с той же скоростью, направленной вдоль оси Ox. Согласно принципу обращенного движения, в этих случаях свободный вихревой слой на профиле будет иметь одинаковую интенсивность. Обтекание круга будем считать бесциркуляционным ($\Gamma = 0$).

Для того, чтобы сравнить точность классической и модифицированной схем, будем определять погрешности вычисленных значений циркуляций вихрей соответственно по формулам

$$\|\Delta\Gamma\|_N = \frac{1}{2}\max_i \left[\left(\left|\gamma_i^0 - \gamma_i\right|\right)(L_{i-1} + L_i)\right], \qquad L_0 \equiv L_n,$$
$$\|\Delta\Gamma\|_T = \max_i \left[\left(\left|\gamma_i^0 - \gamma_i\right|\right)L_i\right],$$

где γ_i^0 – точное решение (средняя интенсивность вихревого слоя на i-й панели), γ_i – вычисленное значение интенсивности вихревого слоя. Величина погрешности показывает максимальную ошибку в определении циркуляции вихревого элемента, который генерируется на данном шаге расчета и затем сходит в поток, становясь частью вихревого следа. Проведем ряд вычислений для различного числа панелей на профиле (см. таблицу).

N	N-схема		T-схема
	Покоящийся профиль	Движущийся профиль	Движущийся/покоящийся профиль
25	0.00094735	0.02074547	0.00152350
50	0.00014114	0.00568986	0.00017904
100	0.00001916	0.00148802	0.00002154
200	0.00000249	0.00037981	0.00000264
400	0.00000032	0.00009592	0.00000033

Видно, что оба подхода: N-схема (в случае движения профиля в покоящейся среде) и T-схема позволяют получать результаты с погрешностью порядка $O(h^3)$, где h – длина панелей. Интересно отметить, что в случае, когда тело покоится в движущейся среде, используя N-схему, не удается получить такой же порядок точности, в этом случае погрешность вычислений будет порядка $O(h^2)$. В то же время T-схема является «симметричной», и результаты для прямого и обращенного движения являются одинаковыми. Это является существенным преимуществом при использовании данного подхода, поскольку в случае деформируемого профиля не всегда удается обратить движение.

6. Заключение. Рассмотрена задача о численном моделировании течения вокруг движущихся и деформируемых профилей. Для этого могут использоваться две схемы: классическая N-схема и построенная T-схема. Показано, что вторая схема позволяет получать решение с погрешностью порядка $O(h^3)$ в случае прямого и обращенного движения, первая же схема такой возможности не дает.

Список литературы

1. Belotserkovskii S.M., Lifanov I.K. Methods of Discrete Vortices. Boca Raton: CRC Press, 1994. 454 p.
2. Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge University Press, 2008. 328 p.
3. Lewis R.I. Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems. Cambridge University Press, 2005. 588 p.
4. Дынникова Г.Я. Вихревые методы исследования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости: дис. … д-ра физ.-мат. наук. М., 2011. 269 с.
5. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во МГУ, 2006. 184 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
7. Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H. Accuracy Considerations for Implementing Velocity Boundary Conditions in Vorticity Formulations // SANDIA REPORT. SAND96-0583, UC-700, 1996. 52 p.

8. Лифанов И.К. Метод сингулярных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дефракции волн). М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
9. Морева В.С. Математическое моделирование обтекания профилей с использованием новых расчетных схем метода вихревых элементов: дис. … канд-та физ.-мат. наук. М., 2013. 130 с.
10. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: ГИФМЛ, 1963. 584 с.