

УДК 004.352.242

## Восстановление смазанных изображений путем решения интегрального уравнения типа свертки

*Иванникова И.А., студент  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Системы автоматизированного проектирования»*

*Научный руководитель: Волосатова Т.М., к. т. н., доцент  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана  
[bauman@bmstu.ru](mailto:bauman@bmstu.ru)*

### 1. Постановка задачи. Интегральное уравнение смаза

В практике цифровой обработки изображений часто встречается проблема восстановления некачественного смазанного изображения. Такое изображение может быть получено при фотосъемке движущегося объекта, либо при движении самого фотоаппарата относительно объекта съемки.

Интегральное уравнение смаза может быть получено, если математически описать задачу смазывания изображения. Пусть регистрируемый объект и регистратор расположены параллельно апертуре объектива по разные стороны от объектива на расстояниях соответственно  $f_1$  и  $f_2$  (смотри рисунок 1).

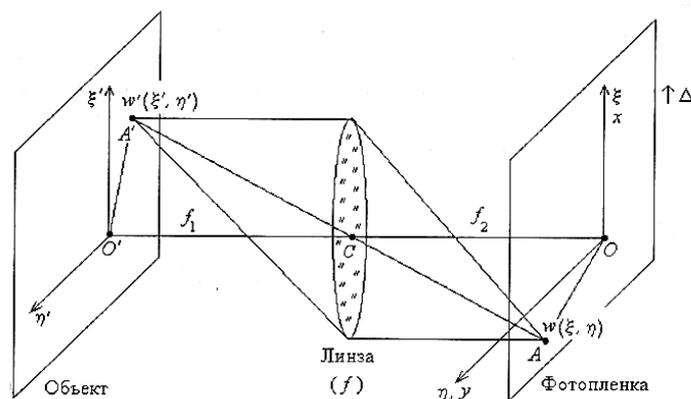


Рис. 1. Эквивалентная схема получения смазанного изображения

Введем в плоскости объекта прямоугольную систему координат  $\xi'O'\eta'$ , а в плоскости регистрации -  $\xi O\eta$ . Возьмем на объекте некоторую точку  $A'(\xi', \eta')$  с интенсивностью излучения  $w'(\xi', \eta')$ . Каждой точке  $A'$  на объекте будет соответствовать точка  $A$  на плоскости регистрации с той же интенсивностью  $w(\xi, \eta) = w'(\xi', \eta')$ , но с уменьшенным в  $q = f_1/f_2$  раз (и перевернутыми) координатами.

Далее полагаем, что за время экспозиции  $\tau$  фоторегистратор совершил прямолинейный и равномерный сдвиг со скоростью  $v = \text{const}$  вдоль оси  $\xi$ , т.е. на величину  $\Delta = v\tau$ . Введем, наряду с неподвижной системой координат  $\xi O\eta$ , систему координат  $xOy$ , связанную с регистратором в виде движущейся фотопленки и совпадающую с  $\xi O\eta$  лишь в начальный момент ( $\tau = 0$ ) процесса смазывания. На некоторую точку  $(x, y)$  плоскости регистрации изображения за время  $\tau$  проецируется непрерывный набор точек  $A$  с абсциссами от  $\xi = x$  до  $\xi = x + \Delta$  и с различными интенсивностями  $w(\xi, \eta)$ , т.е. результирующая интенсивность (обозначим ее через  $g$ ) в некоторой точке  $(x, y)$  будет равна сумме (точнее, интегралу) интенсивностей  $w(\xi, \eta)$ ,  $\xi \in [x, x + \Delta]$ :

$$g(x, y) = \frac{1}{\Delta} \int_x^{x+\Delta} w(\xi, y) d\xi \quad (1)$$

Запишем выражение (1) иначе:

$$\frac{1}{\Delta} \int_x^{x+\Delta} w(\xi, y) d\xi = g(x, y).$$

Это уравнение можно записать в виде интегрального уравнения Фредгольма I рода типа свертки:

$$\int_a^b k(x - s_x; y - s_y) g(s_x; s_y) ds_x ds_y = f(x; y), \quad (2)$$

где  $(x; y)$  – прямоугольные координаты,  $(s_x; s_y)$  – пространственные координаты,  $f(x; y)$  – функция, описывающая восстановленное изображение,  $g(s_x; s_y)$  – функция, описывающая смазанное изображение,  $k$  – ядро интегрального уравнения (импульсный отклик системы), причем

$$k = \begin{cases} 1/\Delta & \text{при } x \in [-\Delta, 0], \\ 0 & \text{при } x \notin [-\Delta, 0]. \end{cases}$$

Итак, уравнение (2) является интегральным уравнением типа свертки для реконструкции смазанного изображения.

## 2. Решение интегрального уравнения смаза

Основываясь на свойствах свертки, уравнение (2) в частотной области можно записать как

$$K(u, v)G(u, v) = F(u, v),$$

где  $(u, v)$  – координаты в частотной области,  $K, G, F$  – Фурье-образы соответствующих функций.  $K(u, v)$  также называют оптической передаточной функцией. Рассмотрим несколько методов нахождения  $K(u, v)$ .

### 2.1. Винеровская фильтрация

С помощью Винеровского фильтра ищется приближение исходного изображения, которое минимизирует среднеквадратичное отклонение. Решение этой задачи в частотной области выражается формулой:

$$F(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \times \frac{|H(u, v)|^2}{H(u, v)|H(u, v)|^2 + \frac{S_\eta(u, v)}{S_f(u, v)}} \right] G(u, v),$$

где  $H(u, v)$  – искажающая функция;  $|H(u, v)|^2 = H^*(u, v)H(u, v)$ ;  $H^*(u, v)$  – комплексно-сопряженная функция  $H(u, v)$ ;  $S_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2$  – энергетический спектр шума;  $S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$  – спектр неискаженного изображения; частное  $\frac{S_\eta(u, v)}{S_f(u, v)}$  – энергетическое соотношение сигнал/шум.

### 2.2. Фильтрация по Тихонову (или сглаживающая фильтрация)

Данный метод линейного восстановления заключается в фильтрации по методу наименьших квадратов с ограничениями. Его идея заключается в формулировке задачи в матричном виде с дальнейшим решением соответствующей задачи оптимизации. Это решение записывается в виде:

$$F(u, v) = \left[ \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma|P(u, v)|^2} \right] G(u, v),$$

где  $\gamma$  – параметр регуляризации, а  $P(u, v)$  – результат Фурье-преобразования.

### 2.3. Слепая деконволюция

Методы восстановления, в которых не используется информация, характеризующая искажающую функцию, называются алгоритмами слепой деконволюции.

Метод слепой деконволюции основан на приближении по максимуму правдоподобия – стратегии оптимизации при построении приближений величин, искаженных случайным шумом. Вкратце можно сказать, что изображение считается случайно выбранным с некоторой определенной вероятностью из семейства других возможных случайных величин. Функция правдоподобия выражается через функции  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  и  $h(u, v)$ , и задача заключается в нахождении максимума функции правдоподобия. При слепой деконволюции задача оптимизации решается итеративно при выполнении соответствующих ограничений и при условии сходимости всей процедуры. Максимизирующая пара функций  $f(x, y)$ ,  $h(u, v)$  считается восстановленным изображением и соответствующей искажающей функцией.

### 3. Анализ параметров смаза

Определение параметров смаза основано на спектральном методе. Для искаженного изображения строится спектр Фурье, и на его основе находятся длина и угол смаза.

Рекомендовано использовать смазанные изображения в форматах bmp и png. Так как в этих форматах не осуществляется процесс сжатия изображения, что нельзя сказать о формате jpg. Это играет важную роль в получении и анализе спектра Фурье изображений, так как сжатие вызывает искажение спектра.

В каждой точке полуокружности, заданной диапазоном углов от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , на некотором расстоянии  $R$  от центра спектра выполняется процесс суммирования небольшой части пикселей (квадрата  $3 \times 3$ ). Угол, для которого значение суммы пикселей равно 0 (таким образом, находится попадание в черную полосу), определяет направление ряби спектра. Следовательно, направление перпендикулярное этому соответствует углу смаза.

Только после нахождения угла осуществляем процесс поиска длины смаза. На небольшом расстоянии  $RR$  от центра спектра по направлению угла смаза задается точка.

Далее по перпендикулярному смазу направлению от данной точки до расстояния  $R1$  выполняется процесс суммирования небольшой части пикселей (квадрата  $3 \times 3$ ). Диапазон значений  $R1$ , в которых значение суммы пикселей равно 0, определяет ширину ряби. Существует определенное соответствие между шириной ряби и длиной смаза. Установив эту взаимосвязь, определяется длина смаза.

Таким образом, значение длины смаза напрямую зависит от угла.

#### 4. Описание программной реализации

Разработанное программное обеспечение реализовано в среде MatLab. После запуска приложения появится окно главного меню (смотри рисунок 2), где пользователь должен сделать выбор в пользу одной из предложенных опций.

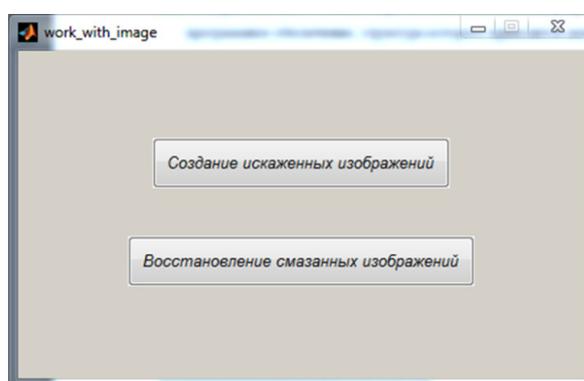


Рис. 2. Окно главного меню приложения

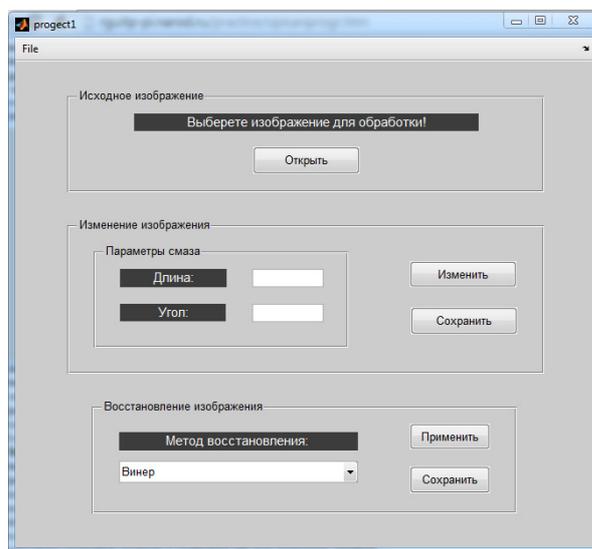


Рис. 3. Окно «Создание искаженных изображений»

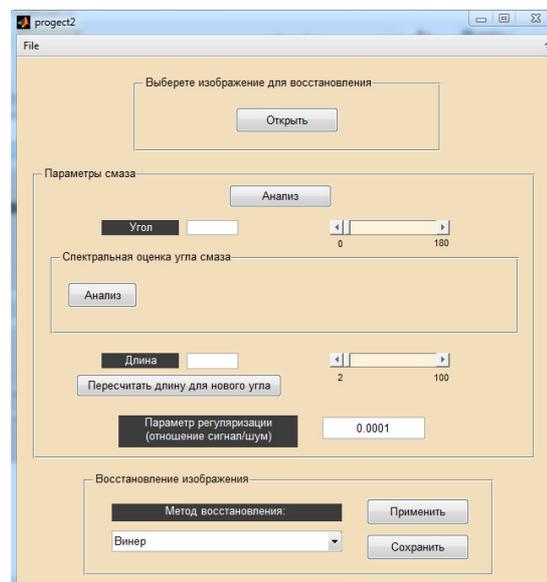


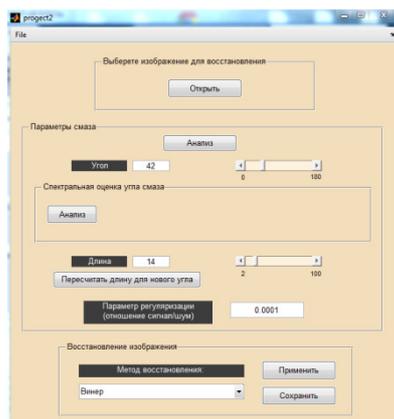
Рис. 4. Окно «Восстановление смазанных изображений»

Опция «Создание искаженных изображений» обеспечивает возможность моделирования смазанного изображения с последующим его восстановлением (по известным параметрам). На рисунке 3 предоставлен графический интерфейс системы, реализующий данную опцию. Опция «Восстановление смазанных изображений» обеспечивает возможность восстановления смазанных изображений с заранее неизвестными параметрами смаза. На рисунке 4 приведен графический интерфейс программы, реализующий данную опцию.

На рисунке 5 представлен результат работы программы.



Исходное изоб.



Параметры



Восстановленное изоб.

Рис. 5. Результат работы программы

## 5. Экспериментальные исследования

В созданном приложении осуществляется процесс нахождения параметров смаза, но описанный выше алгоритм анализа параметров смаза направлен на получение грубой оценки, что вполне достаточно для определения приближенных значений угла и длины смаза. Необходимо определить для каких значений созданный алгоритм работает более устойчиво, а для каких менее.

### 5.1. Исследование определения угла смаза

Для экспериментального исследования было выбрано изображение размером  $320 \times 480$  пикселей. Из исходного изображения были созданы искаженные с одинаковой длиной смаза (15 пикселей) и различными углами смаза:  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $130^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $160^\circ$ ,  $170^\circ$ ,  $180^\circ$ . Полученные изображения были сохранены в двух форматах jpg и png. С помощью созданного приложения проводился поиск углов смаза искаженных изображений.

Оценка результатов приведена на графике 1. По оси X отложен угол смаза, а по оси Y относительная погрешность вычислений.



График 1. Определение угла смаза

Из графика 1 видно, что созданный алгоритм работает вполне приемлемо для изображений формата png на всем диапазоне углов. В то время как для изображений формата jpg наблюдается неустойчивая работа при углах от 50° до 85°.

## 5.2. Исследование определения длины смаза

Для экспериментального исследования было выбрано изображение размером 320×480 пикселей. Из исходного изображения были созданы искаженные с одинаковым углом смаза (45°) и различной длиной смаза: 2, 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 90, 100 пикселей. Полученные изображения были сохранены в двух форматах jpg и png. С помощью созданного приложения проводился поиск длины смаза искаженных изображений. Оценка результатов приведена на графике 2. По оси X отложена длина смаза, а по оси Y относительная погрешность вычислений.

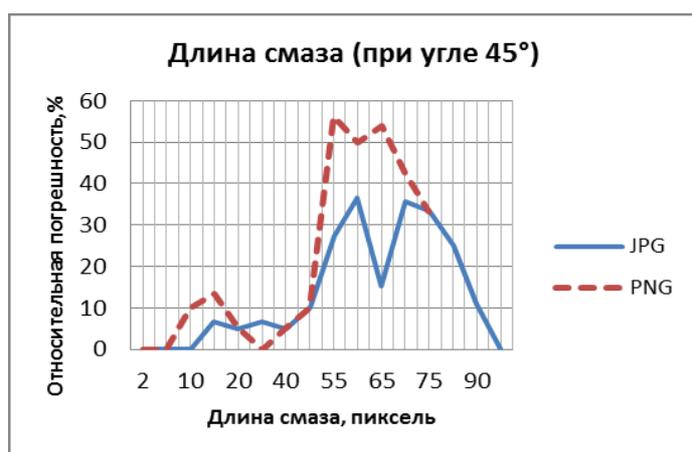


График 2. Определение длины смаза

Из графика 2 видно, что созданный алгоритм работает вполне приемлемо при длине смаза от 2 до 50 пикселей и от 80 до 100 пикселей для изображений обоих форматов (png, jpg). А при длине смаза от 50 до 80 пикселей наблюдаются сильные искажения, что особенно ярко выражено для изображений формата png.

## **Заключение**

В результате проведения данной работы была разработана программа для восстановления смазанных изображений на основе решения интегрального уравнения типа свертки. Достоинством данного приложения является автоматизация процесса нахождения первичного приближения вектора смаза с возможностью дальнейшей его ручной корректировки. Недостатком является то, что методы восстановления, применяемые в созданном приложении, крайне чувствительны к любым ошибкам в определении параметров смаза. В рамках данного проекта поставленные задачи были выполнены.

## **Список литературы**

1. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MatLab. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2006. 616 с.
2. Половко А.М., Бутусов П.Н. MatLab для студентов. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 320 с.
3. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. Разработка графического пользовательского интерфейса в среде MatLab. Казань: Казанский государственный университет имени В.И. Ульянова-Ленина, 2010. 113 с.
4. Волосатова Т.М., Денисов А.В., Чичварин Н.В. Комбинированные методы защиты данных в САПР // Информационные технологии. 2012. № 5. Приложение. С. 1-32.