электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 533.9

Выражение термодинамических функций плазмы на основе модели Томаса-Ферми с квантовыми и обменными поправками

Шумаев В. В., *аспирант*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Теплофизика»

Научные руководители: Рыжков С.В., к.т.н, доцент
Кузенов В.В., к.т.н, доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
ryzhkov@power.bmstu.ru

Ведение

Для расчета магнитной гидродинамики плазмы требуется знать её термодинамические и транспортные свойства. Для их определения используется приближенный метод, который основывается на обобщении (на случай не нулевой температуры [1] и внешнего магнитного поля [2, 3]) статистического метода Томаса–Ферми. Данный метод отличается простотой (например, по сравнению с методом Хартри–Фока–Слэтера [4]), при этом он обеспечивает приемлемую для практики точность, особенно при учете квантовых, обменных и осцилляционных поправок [4].

Отметим, что под транспортными свойствами плазмы, прежде всего, мы подразумеваем коэффициенты теплопроводности и электропроводности.

Термодинамические свойства плазмы описываются термическими и калорическими уравнениями состояния: $P = P(T, \rho)$, $E = E(T, \rho)$, $S = S(T, \rho)$, где P – давление плазмы, E, S – ее внутренняя энергия и энтропия, приходящиеся на единицу массы.

В настоящее время для целей определения теплофизических свойств веществ разработаны различные программные комплексы и базы данных: ASTEROID (IPMech RAS), SESAME (Los Alamos, Livermore, Sandia), ТЕФИС (ИММ РАН) [5], ИВТАНТЕРМО (ОИВТ РАН), код TERMOS (ИПМ им. М. В. Келдыша) и комплексы программ «ТУР» (РФЯЦ — ВНИИ ТФ) [6] и EIP EOS (ФТИ им. А.Ф.Иоффе) [7]. Во многих этих базах данных используется в качестве теоретической модели модель ТФ (модель Томаса–Ферми) с учетом квантовых и обменных поправок. Однако авторам не удалось найти достаточное количество данных среди материалов этих баз, находящихся в общем

доступе. К тому же только в программном комплексе EIP EOS модель ТФ обобщена на случай воздействия на вещество внешнего магнитного поля.

Модель Томаса–Ферми: физическая постановка

Одной из причин выбора квантово-статистической модели (модели Томаса–Ферми) в качестве рабочей является то, что в рассматриваемом диапазоне плотностей и температур возможно возникновение вырожденного состояния электронного газа. Такое явление наблюдается в том случае, если температура электронного газа становится меньше температуры вырождения T_0. Эта температура определяется по полному числу n электронов в 1 см^3:

$$T_0 = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m_e k} n^{\frac{2}{3}} = 4{,}35 \cdot 10^{-11} \cdot n^{\frac{2}{3}}, \text{К}.$$

Например, если веществом плазмы является золото, находящееся при плотности порядка плотности твердого тела, температура вырождения попадает в рассматриваемый нами диапазон ($n \approx 10^{23}$ см$^{-3}$, $T_0 \approx 10^5$ К). Также следует отметить, что при плотностях порядка плотности твердого тела и температурах в десятки и сотни тысяч градусов энергия кулоновского взаимодействия заряженных частиц сравнима с их кинетической энергией и электронно-ионный газ является неидеальным [1].

В физической модели вещества, являющейся основой модели Томаса–Ферми [1] принимается, что отсутствует различие между «свободными» и «связанными» электронами, вещество считается состоящим не из ионов и электронов, а из ядер и электронов. Энергия взаимодействия частиц, составляющих вещество, определяется электронами. Термодинамические свойства термоядерной плазмы рассчитываются на основе модели локального термодинамического равновесия (ЛТР). Для систем большого числа невзаимодействующих между собой ядер считается выполненной статистика Больцмана.

При этом вклад ядер (для высоких температур) в давление P_a и удельную тепловую энергию E_a соответствует обычному одноатомному идеальному газу:

$$P_a = n_a kT, \; E_a = \frac{3}{2}\frac{n_a}{\rho} kT,$$

где n_a – число ядер в 1 см^3, k – постоянная Больцмана, T – температура, ρ – плотность вещества.

Вычисление электронных частей энергии и давления основывается на модели ЛТР, в соответствии с которой вещество разбивается на систему атомных ячеек, каждая из которых содержит Z электронов и ядро с зарядом Ze (e – заряд электрона). Для простоты форма атомной ячейки принимается сферической. Её объем равен среднему объему в веществе, приходящемуся на одно ядро: $V = 1/n_a$. Радиус ячейки находится с помощью формулы:

$$r_0 = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{4\pi n_a}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Электроны в атомной ячейке рассматриваются, как газ, находящийся в достаточно медленно меняющемся по радиусу самосогласованном электростатическом поле $V(r)$, обусловленном зарядом ядра и самих электронов. Тем самым учитывается возможный эффект неидеальности электронного газа. К этому электронному газу применяется статистика Ферми–Дирака.

В модели Томаса–Ферми считается, что между атомными ячейками, из которых состоит описываемое вещество, не действуют силы сцепления. Т.е. в модели Томаса–Ферми атомные ячейки оказывают друг на друга положительное давление, равное давлению только электронного газа, т.е. модель описывает только силы отталкивания и «тепловое» давление. Поэтому данная модель дает разумные результаты либо при больших плотностях, для сильно сжатого твердого тела, когда силы отталкивания резко преобладают над силами притяжения атомов, либо при высоких температурах, когда силами сцепления можно пренебречь. Энергии «ионизации», «возбуждения» и «теплового движения» электронов автоматически входят в полную электронную энергию атомной ячейки. Для того, чтобы выделить из нее «тепловую» часть энергии, из полной энергии следует исключить энергию ячейки того же самого объема, но соответствующую нулю температуры. То же относится и к давлению.

Модель Томаса–Ферми: математическая постановка

Далее на основе физической постановки приводится математическая формулировка задачи расчёта термодинамических свойств термоядерной плазмы.

Электронная плотность при $T > 0$ определяется с помощью “непрерывного” варианта статистики Ферми-Дирака [1]:

$$n = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\frac{-\mu+E}{kT}}+1}, \tag{1}$$

где p – импульс электрона; h – постоянная Планка; μ – химический потенциал; $E = p^2/2m_e - eV(r)$ – максимальная кинетическая энергия электрона на данном расстоянии r от ядра; m_e – масса электрона.

В модели Томаса-Ферми принимается, что электростатический потенциал $V(r)$ удовлетворяет сферически-симметричному уравнению Пуассона:

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[rV(r)] = 4\pi n(r),$$

После подстановки выражения (1) в уравнение Пуассона и несложных преобразований данное уравнение принимает следующий вид [4]:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rV) = \frac{2}{\pi}(2\theta)^{\frac{3}{2}} I_{1/2}\left(\frac{V(r)+\mu}{\theta}\right) \ (0 < r < r_0), \tag{2}$$

где $\theta = k{\cdot}T$; Все величины приведены в атомной системе единиц ($e = 1$, $m = 1$, $\hbar = 1$). Температура – в кэВ.

Здесь $I_{1/2}(x) = \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{1+\exp(y-x)}$ – функция Ферми–Дирака, где $y = p^2/\theta$.

Уравнение Пуассона (2) при поиске однозначного решения дополняется соответствующими граничными условиями.

В центре атомной ячейки (при $r \to 0$), электрическое поле переходит в кулоновское поле ядра, по этой причине здесь используется асимптотический вариант краевого условия:

$$V(r) = \frac{Z}{r} \text{ при } r \to 0. \tag{3}$$

Поскольку ячейка электронейтральна, на границе ее поле равно нулю (вне ячейки потенциал постоянен):

$$\frac{dV}{dr} = 0 \text{ при } r = r_0. \tag{4}$$

Система условий (3)–(4) в атомной ячейке дополняется условием сохранения заряда:

$$Z = \int_0^{r_0} n(r) 4\pi r^2 dr .$$

При этом на основании работы [4] предлагается в качестве r_0 использовать средний радиус атомной ячейки, определяемый из условия:

$$\frac{4}{3}\pi (r_0 a_0)^3 n = 1,$$

где $n = \rho N_A/A$; N_a – число Авогадро, A – атомный вес; $a_0 = 0{,}529 \cdot 10^{-8}$ см – атомная единица длины.

Таким образом, имеем

$$r_0 = 1{,}388\left(\frac{A}{\rho}\right).$$

Из представленных выше соотношений видно, что уравнение (2) зависит от температуры T и плотности ρ. Температура присутствует в слагаемом $n(r)$, а плотность влияет на решение задачи через параметр r_0. При решении сформулированной выше задачи эти два параметра считаются заданными.

После замены переменных $\phi = r \cdot V(r)/(\theta \cdot r_0)$, которая позволяет исключить особенность краевого условия (3) и избавиться от якобиана преобразования $V(r) \cdot r$, входящего под знак второй производной, имеем следующую краевую задачу:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = axI_{1/2}\left(\frac{\phi}{x}\right)\left(a = \frac{4}{\pi}\sqrt{2\theta}r_0^2, 0 < x < 1\right), \tag{5}$$

$$\phi(0) = \frac{Z}{\theta r_0},\ \ \phi(1) = \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=1}, \tag{6}$$

здесь $x = r/r_0$; $\phi = (V(r)+\mu)\cdot r/(\theta\cdot r_0)$.

В целом можно отметить, что это уравнение является уравнением 2-ого порядка, оно обладает нелинейностью в правой части. Свойства рассматриваемого вещества влияют на это уравнение через параметр r_0, который связан с его атомным весом A и плотностью ρ, а также через величину химического потенциала μ.

После вычисления потенциала $\phi(x)$ можно найти радиальную электронную плотность $4\pi r^2\rho(r)$ если учесть следующее:

$$\rho(r) = \frac{(2\cdot\theta)^{3/2}}{2\cdot\pi^2} I_{1/2}\left(\frac{V(r)+\mu}{\theta}\right) \Rightarrow \rho(x) = \frac{(2\cdot\theta)^{3/2}}{2\cdot\pi^2} I_{1/2}\left(\frac{\phi(x)}{x}\right).$$

Оценки влияния внешнего магнитного поля на теплофизические и транспортные свойства плазмы. Влияние магнитного поля на транспортные коэффициенты плазмы

Степень влияния магнитного поля на транспортные коэффициенты плазмы (электропроводность, теплопроводность) зависит от отношения частоты столкновения электронов ν_e к ларморовской частоте $\omega_e = \frac{eB}{m_e c} = 1{,}76\cdot 10^7\cdot B$ вращения электронов в магнитном поле [8], здесь e – заряд электрона, B – магнитная индукция в Гс, m_e – масса электрона, c – скорость света.

В плазме магнитное поле будет оказывать заметное влияние на транспортные свойства, если $\nu_e/\omega_e << 1$. Учитывая, что частоту столкновений электронов в полностью ионизованной плазме [9] можно определить с помощью выражения:

$$\nu_e = \frac{4\sqrt{2\pi}e^4 Z^2 n_i \Lambda}{3\sqrt{m_e}T_e^{3/2}} = 2{,}85\cdot 10^{-5}\,\frac{\Lambda}{10}\cdot\frac{Zn_i}{T_e^{3/2}},$$

где Λ – кулоновский логарифм, T_e – электронная температура в эВ, n – плотность плазмы в см$^{-3}$, получаем условие сильного влияния магнитного поля на свойства плазмы в виде:

$$B >> 1{,}6 \cdot 10^{-12} \frac{\Lambda}{10} \frac{Zn}{T_e^{3/2}}.$$

Для плазмы алюминия (Z = 13) интересующих нас параметров $T_e \sim 1$ кэВ, $n \sim 10^{21}$ см$^{-3}$ (что соответствует плотности плазмы $\rho \sim 10$ кг/м^3 – плотность короны мишени в инерциальном термоядерном синтезе) имеем следующую оценку ($\Lambda \approx 15$): $B >> 10^6$ Гс = 100 Тл.

В магнитно-инерциальном термоядерном синтезе [10, 11] экспериментально получено магнитное поля $B_{тя} \sim 10^3$ Тл [12–14] и могут быть достигнуты еще более высокие значения [15–21]. Поэтому требуется учет влияния сверхсильных магнитных полей на транспортные свойства плазмы.

Влияние магнитного поля на внутренние оболочки атомов и ионов

Магнитное поле, влияющее на ориентацию спинов электронов или атомов в газе, имеющих температуру T, определяется условием

$$\mu B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \; [illegible]_B T \text{ или } B >> 1{,}49 \cdot 10^4 T[\text{K}]\text{Гс},$$

где μ – магнетон Бора.

В нашем случае характерная температура $T_{хар} \sim 1$ кэВ $\approx 10^7$ K. Тогда $B >> 10^{11}$ Гс (10^7 Тл), что значительно больше величин B, достигаемых в задачах термоядерного синтеза. Таким образом, будем считать, что магнитное поле не влияет на ориентацию спинов электронов или атомов в газе.

Магнитное поле $B \sim 10^5$ Тл, в котором энергия магнитного момента μB больше, чем характерная энергия связи атома или молекулы (порядка числа $Ry = m_e e^4/2\hbar^2$), существенно влияют на структуру атомов и молекул и сильно изменяет их энергию связи и ионизации. Рассматриваемые здесь поля существенно меньше $B \sim 10^9$ Тл, поэтому мы можем пренебречь релятивистскими эффектами.

Методика численного решения. Аппроксимация задачи конечно-разностной схемой и выбор начального приближения

Для нахождения потенциала Томаса–Ферми $\phi(r)$ решается краевая задача (5),(6). Так как уравнение (5) нелинейно, его правая часть была линеаризована [4]:

$$I_{1/2}\left(\frac{\phi}{x}\right) \approx I_{1/2}\left(\frac{\bar{\phi}}{x}\right) + \frac{\phi - \bar{\phi}}{2x} I_{-1/2}\left(\frac{\bar{\phi}}{x}\right), \tag{7}$$

где $\phi(x) = x \cdot (V(r) + \mu) / \theta,\ x = r / r_0,\ \bar{\phi}(x)$ – итерационное приближение к функции $\phi(x)$.

Для функции Ферми-Дирака $I_{1/2}\left(\frac{\phi}{x}\right)$ применяется аппроксимация вида (обеспечивающая приемлемую для практических вычислений точность) [4]:

$$\overline{I_{1/2}(x)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \ln\left[1 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} \cdot \exp\left(\frac{2x}{3}\right) \right] \right\}^{3/2}.$$

Особенность решения $V(r)$, имеющаяся для $r \to 0$, после замены переменных $\phi = rV(r)/\theta r_0$ преобразуется в особенность функции $I_{1/2}\left(\frac{\phi}{x}\right)$ (для $x \to 0$). Эта особенность при численном решении рассматриваемой задачи разрешается на основе асимптотического поведения функции $\overline{I_{1/2}(x)}$, при $x \to 0$.

Для увеличения количества расчетных точек вблизи $x = 0$ (область существенного изменения функции $\phi(x)$) проведем замену переменной $x = u^2$, то есть выполним сгущение расчетной сетки в области $x = 0$. При этом отметим, что вдоль переменной $u = x^{1/2}$ расчетная сетка остается равномерной.

Используя формулу (7), запишем на равномерной сетке $u_i = ih$, $(h = 1/N, i = 0,1,2,...N)$ дифференциальное уравнение 2-го порядка (5) в виде следующего линейного (по функции ϕ) конечно-разностного представления:

$$\frac{1}{4u_i^2}\left(\frac{\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}}{h^2}-\frac{\phi_{i+1}-\phi_{i-1}}{2u_i h}\right)=au_i^2 I_{1/2}\left(\frac{\bar{\phi}_i}{u_i^2}\right)+$$

$$+\frac{a(\phi_i-\bar{\phi}_i)}{2}\cdot I_{-1/2}\left(\frac{\bar{\phi}_i}{u_i^2}\right), i=1,\ 2,\ \ldots, N-1; \qquad (8)$$

где $a=\frac{4}{\pi}\sqrt{2\theta}r_0^2$.

Граничные условия для выше приведённой разностной схемы при $u = 0$:

$$\phi_0=\frac{Z}{\theta r_0}, \qquad (9)$$

Для получения в разностном виде граничного условия при $u=1$:

$$\left.\frac{d\phi}{du}\right|_{u=1}=2\phi(1), \qquad (10)$$

можно воспользоваться формулой Тейлора

$$\phi_{N-1}=\phi_N-\phi_N^{'}h+\frac{1}{2}\phi_N^{''}h^2+O(h^3),$$

где, в соответствии с (5),(6) и (8):

$$\phi_N^{'}=2\phi_N,$$

$$\phi_N^{''}=2\phi_N+4aI_{3/2}(\bar{\phi}_N)+2a(\phi_N-\bar{\phi}_N)I_{3/2}(\bar{\phi}_N).$$

Заменяя в вышеприведенных равенствах $\tilde{\phi}_i$ на $\phi_i^{(s)}$, ϕ_i на $\phi_i^{(s+1)}$, где s – номер итерации, получим соответствующую линейную конечно-разностную схему, которую можно решить методом скалярной прогонки.

В целом система уравнений (8-10) разрешается методом «стрельбы» с применением итерационной прогонки.

В качестве начального приближения для $\phi(x)$ использовалось модельное представление постоянной плотности электронов [4]:

$$\phi^{(0)}(x) = \frac{Z}{\theta \cdot r_0} \cdot \left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^3\right) - \eta^{(0)}x,$$

где индекс $^{(0)}$ означает нулевое приближение; $\eta^{(0)}$ определяется по формуле:

$$\eta^{(0)} = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}\ln\left[\exp\sqrt[3]{\frac{2q^2}{3}} - 1\right],$$

Здесь $q = \frac{3\pi}{2}\frac{Z}{(2\theta)^{\frac{3}{2}} r_0^3} = 2,795 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{Z\rho}{AT^{3/2}}$; A – атомный вес вещества (а.е.м.); ρ – плотность вещества в г/см^3.

Квантовые, обменные и осцилляционные поправки к модели Томаса–Ферми

Уточнение обобщенной модели ТФ для вещества с заданной температурой и плотностью было проведено на основе разложения исходного гамильтониана по степеням постоянной Планка ħ [4]. В результате была построена модель ТФ с квантовыми и обменными поправками или модель ТФП.

Поправку $\delta V(r)$ к потенциалу Томаса–Ферми в модели ТФП можно выразить следующим образом:

$$\delta V(r) = \frac{\sqrt{2}}{6\pi\sqrt{\theta}}\left[r_0\chi(x)/r + \frac{1}{2}I_{-1/2}\left(\frac{\phi(x)}{x}\right) - \frac{1}{2}I_{-1/2}\left[\phi(1)\right] - \chi(1)\right],$$

где $x=r/r_0$, $\phi(x)$ — решение уравнения ТФ, $\chi(x)$ — решение линейного неоднородного уравнения следующего вида:

$$\frac{d^2\chi(x)}{dx^2}=\frac{\sqrt{2\theta}r_0^2}{\pi}\left\{2I_{-1/2}\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)\chi(x)+7x\left[I_{-1/2}\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)\right]^2-\right.$$
$$-xI_{1/2}\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)I_{-3/2}\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)$$

с граничными условиями

$$\chi(0)=0,\chi(1)=\left.\frac{d\chi(x)}{dx}\right|_{x=1}.$$

Поправки для термодинамических функций электронов получаются аналогично тому, как были получены термодинамические функции электронов в модели ТФ [4]. Формулы для поправок имеют следующий вид [22]

для давления

$$\Delta p=\frac{\theta^2}{3\pi^3}\left[\chi(1)I_{1/2}(\phi(1))+Y(\phi(1))\right],$$

где

$$Y(x)=\frac{1}{2}I_{1/2}(x)I_{-1/2}(x)+\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{x}\left[I_{-1/2}(t)\right]^2dt;$$

для энергии

$$\Delta E=\frac{2\theta^2}{3\pi^2}r_0^2\left[\int_0^1 x\chi(x)I_{1/2}\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)dx+2\int_0^1 x^2Y\left(\frac{\phi(x)}{x}\right)dx\right]+$$
$$+\frac{Z\sqrt{2\theta}}{6\pi}\chi'(0)-\Delta E_0,$$

где $\Delta E_0=-0,2690017Z^{5/3}$;

для энтропии

$$\Delta S = \frac{2\theta}{3\pi^2} r_0^2 \left[\int_0^1 x\chi(x) I_{1/2}\left(\frac{\phi(x)}{x}\right) dx + \right.$$

$$\left. + 4\int_0^1 x^2 Y\left(\frac{\phi(x)}{x}\right) dx \right] + \frac{\sqrt{2}Z}{6\pi\sqrt{\theta}} \left.\frac{d\chi}{dx}\right|_{x=0}.$$

Осцилляционные поправки носят нерегулярный характер и индивидуальны для каждого элемента [23].

Результаты расчетов

Основные расчеты производились для числа пространственных точек в расчетной сетке равного $N = 10^4$. Характерное число итераций в расчетах составляло величину $s = 15$. Время отдельного расчета на персональном компьютере – 10 секунд.

На рис. 1. приводится распределение радиальной электронной плотности алюминия $4\pi r^2\rho(r)$ при температуре 1 кэВ и плотности 10^3 кг/м^3.

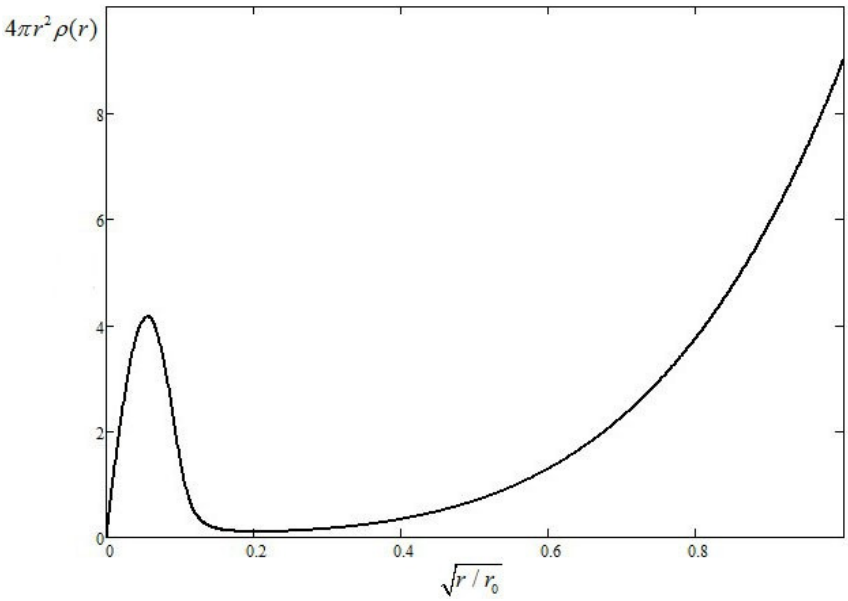


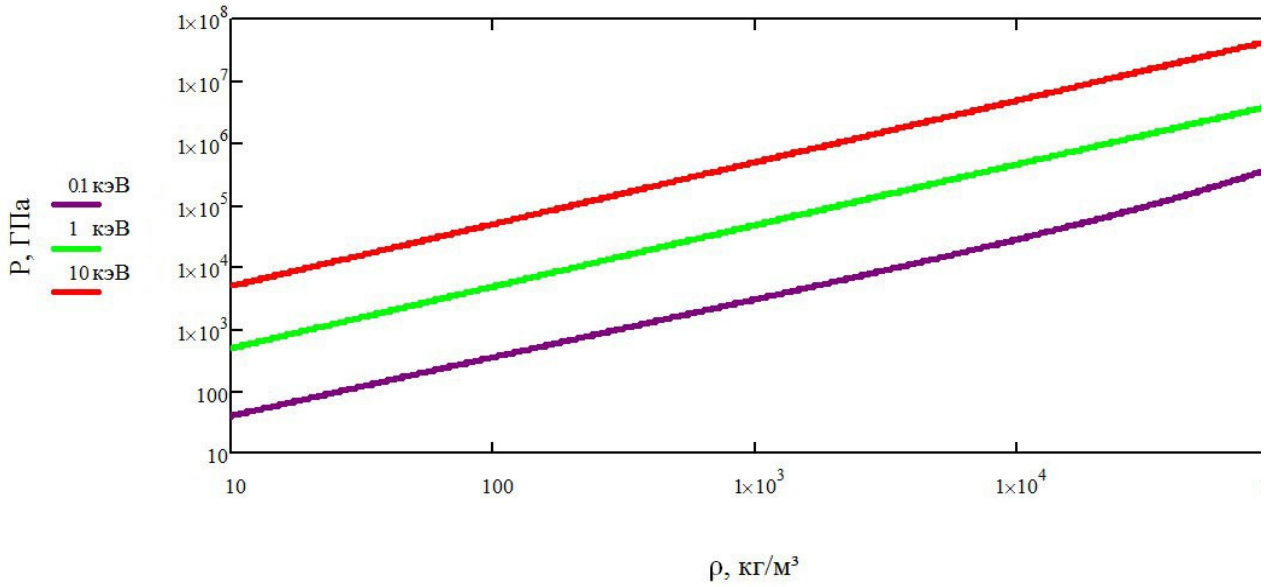
Рис. 1. Радиальная электронная плотность $4\pi r^2\rho(r)$ в зависимости от $(r/r_0)^{1/2}$ по модели Томаса-Ферми для алюминия при температуре 1 кэВ и плотности 10^3 кг/м^3

На рис. 2 приводятся уравнения состояния $P = P(T,\rho),\ E = E(T,\rho),\ S = S(T,\rho)$ для алюминия. Некоторые результаты расчетов для золота опубликованы в работе [24].

Заключение

Расчеты проводились в следующем диапазоне параметров состояния алюминия: температура $T = 0.1 \div 10$ кэВ, плотность $\rho = 10 - 10^5$ кг/м^3, магнитная индукция $B \sim 10^3$ Тл. Выполненные оценки показали, что магнитное поле указанной интенсивности оказывает влияние только на транспортные свойства плазмы, но не изменяет вид внутренних оболочек атомов и ионов. Получены распределения радиальной плотности электронов по радиусу атомной ячейки, а также давление, удельная внутренняя энергия и энтропия в зависимости от температуры и плотности. Наибольшая величина квантовых и обменных поправок для давления 16 % при 1 кэВ и 10^5 кг/м^3.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Министерства образования и науки Российской Федерации № 13.79.2014/K.



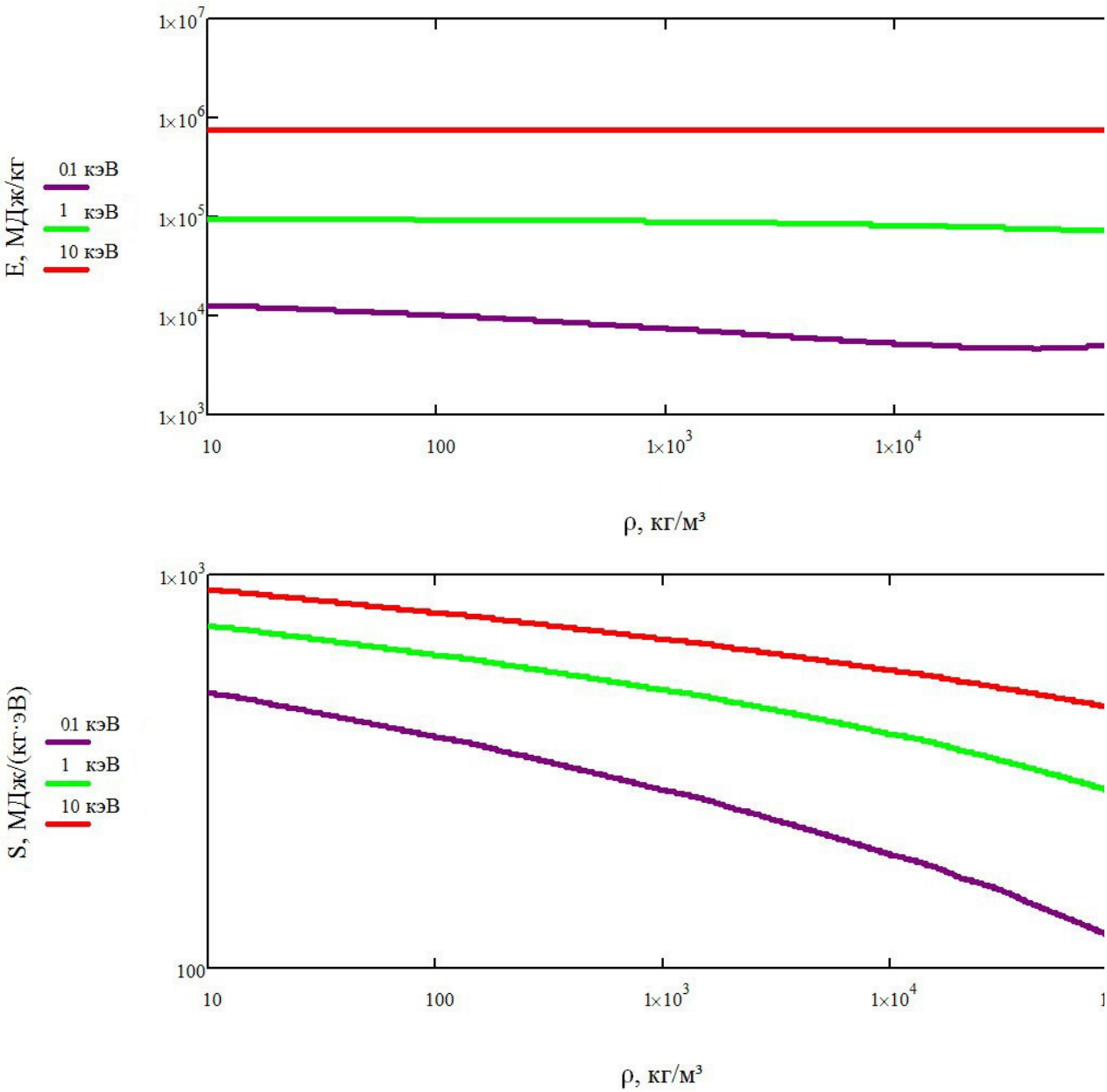


Рис. 2. Изотермы давления, удельной внутренней энергии и удельной энтропии для алюминия, вычисленные по модели Томаса-Ферми

Список литературы

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных явлений гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 688 с.
2. Смирнов С.Г., Холин С.А. Уравнение Томаса–Ферми для атома в магнитном поле с учетом ориентации спина электронов // Забабахинские научные чтения (Снежинск, 20–25 сентября 1998 г.): тез. докл. Снежинск, 1998. С. 310–315.
3. Tomishima Y., Yonei K. Thomas-Fermi Theory for Atoms in a Strong Magnetic Field // Progress of Theoretical Physics. 1978. V. 59. № 3. Pp. 683 - 696.

4. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчёта росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: Физматлит, 2000. 400 с.
5. Иванченко Е.С. Прецизионные модели ударных адиабат и база ТЕФИС: дис. … канд. ф.-м.н. М., 2009. 127 с.
6. Сапожников А.Т., Миронова Е.Е. Комплекс программ «ТУР» для построения и исследования уравнений состояния // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2007. Т. 3-4. С. 27-36.
7. Potekhin A.Y., Chabrier G. Equation of state for magnetized Coulomb plasmas // Astron. Astrophys. 2013. V. 550. № 43. 16 p.
8. Либерман М.А., Йоханссон Б. Вещество в сверхсильном магнитном поле и структура поверхности нейтронных звезд // Успехи физических наук. 1995. Т. 195. С. 121–142.
9. Чирков А.Ю. Введение в физику плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 48 с.
10. Костюков И.Ю., Рыжков С.В. Магнитно-инерциальный термоядерный синтез с лазерным обжатием замагничен-ной сферической мишени // Прикладная физика. 2011. № 1. С. 65–72.
11. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Developing the numerical mod-el for studying laser-compression of magnetized plasmas // Acta Technica. 2011. V. 56. P. 454–467.
12. Knauer J.P., Gotchev O.V., Chang P.Y. et al. Compressing magnetic fields with high-energy lasers // Phys. Plasmas. 2010. V. 17. № 5. Pp. 1-8.
13. Gotchev O.V., Chang P.Y., Knauer J.P. et al. Laser-driven magnetic-flux compression in high-energy-density plasmas // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. № 21. P. 1-4.
14. Takeyama S. Recent topics of the Megagauss Science Laboratory at ISSP, Japan // Presented at the 13th Int. Conf. Mega-gauss Magnetic Field Generation Related Topics. Suzhou (China), 2010. P. 59-60.
15. Chirkov A.Yu., Ryzhkov S.V. The plasma jet/laser driven compression of compact plasmoids to fusion conditions // Journal of Fusion Energy. 2012. V. 31. P. 7-12.
16. Шумаев В.В., Рыжков С.В. Сравнение критериев зажигания D-T мишени в условиях магнитно-инерциального термоядерного синтеза // Молодежный научно-технический вестник. МГТУ им. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 3. Режим доступа: http://sntbul.bmstu.ru/doc/458155.html (дата обращения 10.05.2014).
17. Шумаев В.В. Зажигание D-3He-мишени в условиях магнитно-инерциального термоядерного синтеза // Молодежный научно-технический вестник. МГТУ им.

Баумана. Электрон. журн. 2013. № 2. Режим доступа: http://sntbul.bmstu.ru/doc/566525.html (дата обращения 10.05.2014).

18. Ryzhkov S.V., Chirkov A.Yu., Ivanov A.A. Analysis of the compression and heating of magnetized plasma targets for magneto-inertial fusion // Fusion Science and Technology. 2013. V. 63. № 1T. P. 135-138.
19. Кузенов В.В., Рыжков С.В. Математическая модель взаимодействия лазерных пучков высокой энергии импульса с плазменной мишенью, находящейся в затравочном магнитном поле // Препринт ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН. 2010. № 942. 57 с.
20. Ryzhkov S.V. The behavior of a magnetized plasma under the action of laser with high pulse energy // Problems of Atomic Science and Technology. 2010. № 4. P. 105–110.
21. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Numerical modeling of magnetized plasma compressed by the laser beams and plasma jets // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. № 1 (83). P. 12-14.
22. Киржниц Д.А. О границах применимости квазиклассического уравнения состояния вещества // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1958. Т. 35. Вып. 6. С. 1545–1557.
23. Киржниц Д.А., Шпатаковская Г.В. Осцилляционные эффекты атомной структуры // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1972. Т. 62. Вып. 6. С. 2082–2086.
24. Кузенов В.В., Рыжков С.В., Шумаев В.В. Определение термодинамических свойств замагниченной плазмы на основе модели Томаса–Ферми // Прикладная физика. 2014. № 3. С. 22-25.