Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана
Сетевое научное издание
ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 10. С. 359–382.

DOI: **10.7463/1014.0730105**

Представлена в редакцию: 22.08.2014
Исправлена: 07.10.2014



**УДК 539.3**

# Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин

**Димитриенко Ю. И.[1,*], Губарева Е. А.[1], Яковлев Д. О.[1]**

[*] dimit.bmstu@gmail.com

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Предложена теория вязкоупругих многослойных тонких пластин при установившихся моногармонических колебаниях, построенная из общих уравнений трехмерной теории вязкоупругости путем введения асимптотических разложений по малому геометрическому параметру - отношению толщины к длине пластины, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения амплитуд перемещений и напряжений по толщине пластины. Разработанная теория позволяет вычислить все 6 компонент тензора комплексных амплитуд напряжений, включая амплитуды поперечных нормальных напряжений и амплитуды напряжения межслойного сдвига. Предложен алгоритм расчета диссипативных характеристик вязкоупругих многослойных пластин, основанный на расчете функции диссипации энергии, локального коэффициента демпфирования и интегрального коэффициента демпфирования. Проведено численное моделирование напряжений в вязкоупругой пластине из композитного слоисто-волокнистого материала при изгибных колебаниях, которое показало, что действительные части амплитуд напряжений, в том числе и напряжений межслойного сдвига и поперечных напряжений, практически не зависят от частоты колебаний. Этот факт обусловлен спецификой задачи об изгибных колебаниях, в ней все напряжения зависят только от продольной компоненты комплексного модуля упругости, которая, в свою очередь, главным образом, зависит только от упругих свойств армирующих волокон. Вязкоупругие же свойства матрицы практически не влияют на действительные части амплитуд напряжений. Проведенные численные расчеты показали, что основные значения локального коэффициента рассеяния энергии реализуются в слоях композитной пластины с ориентацией волокон , а значения коэффициента демпфирования в слоях с продольной ориентацией волокон меньше почти на порядок. Установлено также, что максимальные значения интегрального коэффициента рассеяния энергии достигаются при частоте в 2,5 раза превышающей частоту максимума тангенса угла потерь матрицы композитного материала, которая дает основной вклад в механизм рассеяния энергии композитной пластины. Результаты расчетов показали, что учет напряжений межслойного сдвига и поперечных напряжений в пластинах является достаточно существенным при расчете коэффициента рассеяния энергии, несмотря на относительно малые значения этих напряжений по сравнению с напряжениями изгиба, поскольку вязкоупругие свойства композитных полимерных материалов при сдвиге и поперечном растяжении, как раз являются наиболее значимыми. Пренебрежение этими напряжениями приводит к ошибке в 12-15 %. при расчете коэффициента рассеяния энергии. Поэтому расчет коэффициентов рассеяния энергии в тонких вязкоупругих композитных пластинах необходимо осуществлять по теориям, учитывающим все ненулевые компоненты амплитуд тензора напряжений, такая теория предложена в данной работе

**Ключевые слова**: асимптотическая теория вязкоупругих пластин, многослойные пластины, вязкоупругость, композиты, полимерные композиционные материалы, слоисто-волокнистые материалы, метод асимптотического осреднения, комплексные модули упругости, рассеяние энергии

## Введение

Для проектирования конструкций из многослойных композиционных материалов, длительно эксплуатирующихся при воздействии вибраций, например, в составе авиационной или судостроительной техники [1], важную роль играют характеристики демпфирования композитных конструкций [2-8]. Известно, что полимерные композиционные материалы, кроме высоких упруго-прочностных характеристик обладают существенными вязкоупругими характеристиками, это позволяет создавать на их основе силовые конструкции обладающие одновременно и значительными демпфирующими свойствами. Однако для расчета характеристик демпфирования конструкций необходимо вычислить функцию диссипации энергии и накопленную энергию, которые включают в себя полный набор компонент тензора напряжений. Расчет всех ненулевых компонент тензора напряжений возможен при использовании полной 3-х мерной теории вязкоупругости, однако, этот расчет весьма трудоемкий, даже при использовании современных конечно-элементных методов и мощной вычислительной техники [9-15]. Поэтому весьма актуальной является задача о разработке теории расчета напряженного состояния вязкоупругих многослойных тонких пластин при установившихся колебаниях по двумерной теории, подобной классической теории пластин, но позволяющей вычислить все ненулевые компоненты напряжений, включая напряжения межслойного сдвига и поперечные нормальные напряжения. Такая теория была ранее предложена для расчета упругих конструкций [15-20]. В настоящей работе осуществлена дальнейшая разработка этой теории для случая вязкоупругих композитных многослойных пластин.

## 1. Основные допущения асимптотической теории тонких вязкоупругих пластин

Рассмотрим многослойную пластину постоянной толщины, введем малый параметр $\kappa = h/L << 1$, как отношение общей толщины пластины $h$ к характерному размеру всей пластины L (ее максимальной длине). Введем безразмерные глобальные $x_k$ и локальную $\xi$ координаты:

$$x_k = \tilde{x}_k / L \quad \xi = x_3/\kappa \ , k=1,2,3, \qquad (1)$$

где $\tilde{x}_k$ - обычные (размерные) декартовы координаты, ориентированные таким образом, что ось $O\tilde{x}_3$ направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси $O\tilde{x}_1\, O\tilde{x}_2$ принадлежат срединной поверхности пластины. Координаты $x_3$ и $\xi$ рассматриваются как независимые переменные, координата $\xi$ изменяется в диапазоне $-0.5 \le \xi_3 \le 0.5$.

Рассмотрим для пластины 3-х мерную задачу линейной теории вязкоупругости при установившихся квазистатических колебаниях [21]

$$
\begin{aligned}
&\nabla_j \sigma^*_{ij} = 0,\\
&\varepsilon^*_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j u^*_i + \nabla_i u^*_j\right),\\
&\sigma^*_{ij} = C^*_{ijkl}\varepsilon^*_{kl},\\
&\Sigma_{3\pm} : \sigma^*_{i3} = -\tilde{p}^*_{\pm}\delta_{i3}, \qquad \Sigma_T : u^*_i = u^*_{ei}, \qquad \Sigma_S : [\sigma^*_{i3}] = 0, \qquad [u^*_3] = 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

состоящую из уравнений равновесия, соотношений Коши, соотношений линейной вязкоупругости, граничных условий на внешней и внутренней поверхности $\Sigma_{3\pm}$ (их уравнение имеет вид $\tilde{x}_3 = \pm h/2$) и на торцевой поверхности $\Sigma_T$, а также граничных условий на поверхности контакта $\Sigma_S$ слоев пластины, $[u^*_3]$-скачок функций.

В системе (2) обозначены: $\sigma^*_{ij}$ - компоненты тензора комплексных амплитуд напряжений, $\varepsilon^*_{\mathrm{ij}}$- компоненты тензора комплексных амплитуд деформаций, $u^*_j$- компоненты вектора комплексных амплитуд перемещений, $\nabla_j = \partial / \partial\tilde{x}_j$ - оператор дифференцирования по декартовым координатам, $C^*_{ijkl}(\xi,\omega)$ - компоненты тензора комплексных модулей упругости, который зависит от частоты колебаний $\omega$ и от координаты $\xi_3 = \xi$, так как этот тензор различен для разных слоев пластины.

Принимаем основное допущение, состоящее в том, что амплитуда колебаний давления $\tilde{p}^*_{\pm}$ на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости $O(\kappa^3)$ по сравнению с $E_0$ - характерное значение модуля упругости материала пластины (размерная величина),

$$
\tilde{p}_{\pm} = \kappa^3 p_{\pm}, \; p_{\pm} = O(1)E_0, \tag{3}
$$

где $O(1)$ - безразмерная величина, порядка 1. Допущение (3), как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких пластин.

## 2. Асимптотическое решение задачи теории вязкоупругости (2) для тонких пластин

Задача (2) содержит локальную координату $\xi$, а также малый параметр $\kappa$ в граничных условиях (это коэффициент при давлении), поэтому ее решение ищем в виде асимптотических разложений по параметру $\kappa$ в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$u_k^* = u_k^{*(0)}(x_I) + \kappa u_k^{*(1)}(x_I,\xi) + \kappa^2 u_k^{*(2)}(x_I,\xi) + \kappa^3 u_k^{*(3)}(x_I,\xi) + \ldots$$

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^{*(0)} + \kappa\varepsilon_{ij}^{*(1)} + \kappa^2\varepsilon_{ij}^{*(2)} + \ldots \qquad (4)$$

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{*(0)} + \kappa\sigma_{ij}^{*(1)} + \kappa^2\sigma_{ij}^{*(2)} + \ldots,$$

здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами $I,J,K,L$ принимают значения 1,2, а индексы $i,j,k,l$ - значения 1,2,3.

Далее будем использовать обозначения для производных по локальной координате $u_{i/3}^{*(1)} = \partial u_i^{*(1)}/\partial\xi$ и по глобальным координатам $u_{i,j}^{*(1)} = \partial u_i^{*(1)}/\partial x_j$, введем также операцию осреднения по толщине пластины

$$< u_i^{*(1)} >= \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{*(1)} d\xi . \qquad (5)$$

Подставляя асимптотические разложения (4) в систему уравнений (2), и собирая в ней члены при одинаковых степенях от $\kappa$, получаем рекуррентную последовательность специальных локальных задач теории вязкоупругости 0-го, 1-го, 2-го и 3-го и т.д. приближений для нахождения всех членов асимптотических разложений (4). Для перемещений все члены разложения выше 0-го приближения, т.е $u_k^{*(1)}, u_k^{*(2)}, u_k^{*(3)}\ldots$ являются линейными функциями от нулевого приближения $u_k^{*(0)}$ и его производных: $u_{k/I}^{*(0)}, u_{k/IK}^{*(0)}$ и т.д. После подстановки всех этих выражений для $u_k^{*(1)}, u_k^{*(2)}, u_k^{*(3)}\ldots$ в асимптотическое разложение (4), после удерживания только главных членов ряда (более высокие асимптотики отбрасываем), получаем, что амплитуды перемещений в пластине с точностью до членов 2-го порядка малости имеют вид:

$$u_I^* = u_I^{*(0)} + \kappa(-\xi u_{3,I}^{*(0)} + \varepsilon_{KL}^{*(0)} U_{IKL}^*(\xi)), \qquad (6)$$

$$u_3^* = u_3^{*(0)} + \kappa\varepsilon_{KL}^{*(0)} U_{3KL}^*(\xi), \qquad (7)$$

где обозначены амплитуды деформации срединной поверхности пластины в нулевом приближении

$$\varepsilon_{KL}^{*(0)} = \frac{1}{2}(u_{K,L}^{*(0)} + u_{L,K}^{*(0)}), \qquad (8)$$

а также функции, относящиеся к известным величинам

$$U^*_{iKL}(\xi) = 2(< \int_{-0.5}^{\xi} C^{*-1}_{i3j3} C^*_{j3KL} d\xi > - \int_{-0.5}^{\xi} C^{*-1}_{i3j3} C^*_{j3KL} d\xi). \tag{9}$$

Полученные выражения (6) и (7) для многослойных пластин близки по характеру распределения перемещений по толщине к теории ломаной нормали Э.И.Григолюка [22], в которых подобные выражения принимаются лишь как гипотезы.

Осредняя выражения (6) и (7) по толщине с учетом (5) и (9), получаем, что $< u^*_I >= u^{*(0)}_I$, $< u^*_3 >= u^{*(0)}_3$, т.е перемещения нулевого приближения $u^{*(0)}_k$ являются средними по толщине перемещениями пластины, и, вообще говоря, могут не совпадать с перемещениями срединной поверхности пластины $u^*_k\big|_{\xi=0}$, относительно которых, как правило, в теории пластин и формулируются кинематические допущения в приближенных теориях пластин. Перемещения $u^*_k\big|_{\xi=0}$ и $< u^*_I >= u^{*(0)}_I$ совпадают для однослойных пластин.

## 3. **Осредненные уравнения теории вязкоупругости для многослойных тонких пластин**

Для вычисления амплитуд перемещений нулевого приближения $u^{*(0)}_k$, следуя общему алгоритму метода для упругих многослойных пластин [16,19], получаем осредненные уравнения равновесия вязкоупругих пластин

$$T^*_{IJ,J} = 0,\ Q^*_{J,J} = \Delta\bar{p}^*,\ M^*_{IJ,J} - Q^*_I = 0, \tag{10}$$

где $T^*_{IJ}$ - усилия, $M^*_{IJ}$ - моменты и $Q^*_I$ - перерезывающие силы, здесь обозначено $\Delta\bar{p}^* = \kappa^2 \Delta p^*$, $\Delta p^* = p^*_+ - p^*_-$, которые вводятся с помощью следующих осредненных соотношений

$$\begin{gathered} T^*_{IJ} =< \sigma^{*(0)}_{IJ} > + \kappa < \sigma^{*(1)}_{IJ} > + \ldots, \\ Q^*_I = \kappa < \sigma^{*(1)}_{I3} > + \kappa^2 < \sigma^{*(2)}_{I3} > + \ldots, \\ M^*_{IJ} = \kappa < \xi\sigma^{*(0)}_{IJ} > + \kappa^2 < \xi\sigma^{*(1)}_{IJ} > + \ldots. \end{gathered} \tag{11}$$

Подставляя выражения (4) для деформаций и напряжений $\sigma^{*(0)}_{IJ}, \sigma^{*(1)}_{IJ}$, а также определяющие соотношения системы (2), в интегралы формул (11), и удерживая в них только первые два приближения, получаем осредненные определяющие соотношения теории вязкоупругих пластин

$$\begin{gathered} T^*_{IJ} = \bar{C}^*_{IJKL} \varepsilon^{*(0)}_{KL} + B^*_{IJKL} \eta^*_{KL} + K^*_{IJKLM} \varepsilon^{*(0)}_{KL,M}, \\ M^*_{IJ} = B^*_{IJKL} \varepsilon^{*(0)}_{KL} + D^*_{IJKL} \eta^*_{KL} + \bar{K}^*_{IJKLM} \varepsilon^{*(0)}_{KL,M}, \\ Q^*_I = K^*_{IJKL} \varepsilon^{*(0)}_{KL,J} + \kappa^2 < \sigma^{*(2)}_{I3} >, \end{gathered} \tag{12}$$

где обозначены тензоры осредненных вязкоупругих констант пластины

$$\bar{C}^{*}_{IJKL} = < C^{*(0)}_{IJKL} > = < C^{*}_{IJKL} > - < C^{*}_{IJk3} C^{*-1}_{k3i3} C^{*}_{i3KL} >, \qquad (13)$$

$$C^{*(0)}_{IJKL} = C^{*}_{IJKL} - C^{*}_{IJk3} C^{*-1}_{k3i3} C^{*}_{i3KL},$$

а также

$$B_{IJKL} = \kappa < \xi C^{(0)}_{IJKL} >, \; K_{IJKLM} = \kappa < \tilde{N}^{(0)}_{IJKLM} >,$$

$$K_{IJKL} = \kappa < \int_{-0.5}^{\xi} (< C^{(0)}_{IJKL} > - C^{(0)}_{IJKL}) d\xi >,$$

$$\bar{D}_{IJKL} = \kappa^2 < \xi^2 C^{(0)}_{IJKL} >, \; \bar{K}_{IJKLM} = \kappa^2 < \xi \tilde{N}^{(0)}_{IJKLM} >,$$

$$\tilde{N}^{(0)}_{IJKLM} = N^{(0)}_{IJKLM} + \Phi_{IJKLM},$$

$$N^{(0)}_{IJKLM} = -C_{IJk3} C^{-1}_{k3P3} \int_{-0.5}^{\xi} (< C^{(0)}_{PMKL} > - C^{(0)}_{PMKL}) d\xi,$$

$$\Phi_{KLMNS}(\xi) = \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) - < \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) >, \qquad (14)$$

$$\tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) = -\int_{-0.5}^{\xi} (C^{-1}_{K3i3}\delta_{SL} + C^{-1}_{L3i3}\delta_{SK}) C_{i3MN} d\xi.$$

В систему осредненных определяющих соотношений (12) входят деформации нулевого приближения $\varepsilon^{*(0)}_{KL}$ (10), кривизны $\eta^{*}_{KL}$ и градиенты деформаций $\varepsilon^{*(0)}_{KL,N}$:

$$\eta^{*}_{KL} = -u^{*(0)}_{3,KL}, \quad \varepsilon^{*(0)}_{IJ,K} = \frac{1}{2}(u^{*(0)}_{I,JK} + u^{*(0)}_{J,IK}), \qquad (15)$$

которые зависят от 3 функций $u^{*(0)}_{I}$, $u^{*(0)}_{3}$ глобальных переменных $x_I$:

Подставляя далее выражения (15) в (12), а затем (12) в (10), получаем систему осредненных уравнений равновесия пластины относительно 3 неизвестных функций $u^{(0)}_{I}$, $u^{(0)}_{3}$:

$$\bar{C}^{*}_{IJKL} u^{*(0)}_{K,LJ} + B^{*}_{IJKL} u^{*(0)}_{3,KLJ} + K^{*}_{IJKLM} u^{*(0)}_{K,LMJ} = 0,$$

$$B^{*}_{IJKL} u^{*(0)}_{K,LJI} + D^{*}_{IJKL} u^{*(0)}_{3,KLJI} + \bar{K}^{*}_{IJKLM} u^{*(0)}_{K,LMJI} = \Delta\bar{p}^{*}. \qquad (16)$$

Эта система имеет четвертый порядок относительно амплитуды прогиба $u^{*(0)}_{3}$, как в классической теории пластин Кирхгофа-Лява, и третий порядок производных относительно амплитуд продольных перемещений $u^{*(0)}_{I}$, чем отличается от теории Кирхгофа-Лява.

## 4. Амплитуды напряжений в вязкоупругих многослойных пластинах

После того как решена осредненная задача (18), и найдены функции $u^{*(0)}_{I}$, $u^{*(0)}_{3}$, вычисляем деформации (10), а затем напряжения $\sigma^{*(0)}_{IJ}$ по формуле: $\sigma^{*(0)}_{IJ} = C^{*(0)}_{IJKL} \varepsilon^{*(0)}_{KL}$.

Сдвиговые напряжения $\sigma_{I3}^{*(0)}$ и поперечное напряжение $\sigma_{33}^{*(0)}$, как было установлено в [16,19], в пластине тождественно равны нулю. Ненулевые значения сдвиговых напряжений появляются у следующего члена асимптотического разложения - $\sigma_{I3}^{*(1)}$. Для поперечного напряжения первое в асимптотическом ряду ненулевое значение – это значение $\sigma_{33}^{*(2)}$. В результате, сохраняя в асимптотическом разложении (6) только главные ненулевые члены, и отбрасывая члены боле высокого порядка малости. получаем следующие выражения для всех 6 компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{IJ}^{*} = \sigma_{IJ}^{*(0)}$$

$$\sigma_{33}^{*} = -\kappa^2 \int_{-0.5}^{\xi} (<\sigma_{3J,J}^{*(1)}> - \sigma_{3J,J}^{*(1)}) d\xi + \kappa^3 (-p_{-}^{*} - \Delta p^{*}(\xi + 0.5) + \int_{-0.5}^{\xi} (<\sigma_{3J,J}^{*(2)}> - \sigma_{3J,J}^{*(2)}) d\xi), \quad (17)$$

$$\sigma_{I3}^{*} = \kappa \sigma_{I3}^{*(1)} + \kappa^2 \int_{-0.5}^{\xi} (<\sigma_{IJ,J}^{*(1)}> - \sigma_{IJ,J}^{*(1)}) d\xi \ .$$

Входящие в эти выражения напряжения $\sigma_{I3}^{*(1)}$, $\sigma_{IJ}^{*(1)}$ и $\sigma_{I3}^{*(2)}$ вычисляются по формулам

$$\sigma_{IJ}^{*(0)} = C_{IJKL}^{*(0)} \varepsilon_{KL}^{*(0)},$$

$$\sigma_{IJ}^{*(1)} = \xi C_{IJKL}^{*(0)} \eta_{KL}^{*} + \tilde{N}_{IJKLM}^{*(0)} \varepsilon_{KL,M}^{*(0)}, \quad (18)$$

$$\sigma_{I3}^{*(1)} = \varepsilon_{KL,J}^{*(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (<C_{IJKL}^{*(0)}> - C_{IJKL}^{*(0)}) d\xi, \ \sigma_{33}^{*(1)} = 0,$$

$$\sigma_{I3}^{*(2)} = \int_{-0.5}^{\xi} (<\sigma_{IJ,J}^{*(1)}> - \sigma_{IJ,J}^{*(1)}) d\xi,$$

Все соотношения (18) содержат только один набор неизвестных функций - деформации $\varepsilon_{KL}^{*(0)}$ (а также их производные $\varepsilon_{KL,M}^{*(0)}$) и компоненты тензора искривлений $\eta_{KL}^{*}$ - эти величины полностью вычисляются. после того, как решены осредненные уравнения теории пластин (16).

Таким образом, разработанная теория тонких пластин позволяет найти все шесть компонент тензора напряжений.

В частном случае, когда слои пластины расположены симметрично относительно срединной плоскости $\xi = 0$, часть тензоров (17) являются нулевыми

$$B_{IJKL}^{*} = 0, \ K_{IJKLM}^{*} = 0, \quad (19)$$

## 5. Диссипативные характеристики вязкоупругих многослойных пластин

Функцию диссипации (рассеяния) энергии вязкоупругих сред при моногармонических колебаниях, осредненную за 1 цикл колебаний, вычисляем по формуле [21]:

$$w^* = \frac{\omega}{2} \mathrm{Im}(\Pi^*_{ijkl}(\omega,\xi))(\mathrm{Re}(\sigma^*_{ij})\,\mathrm{Re}(\sigma^*_{kl}) + \mathrm{Im}(\sigma^*_{ij})\,\mathrm{Im}(\sigma^*_{kl})), \tag{20}$$

где Im ( ) и Re ( ) - мнимая и действительная части комплексных величин, $\mathrm{Im}(\Pi^*_{ijkl}(\omega))$ - компоненты мнимой части тензора комплексных податливостей $\Pi^*_{ijkl}(\omega)$, обратного к $C^*_{ijkl}(\omega,\xi)$: $\Pi^*_{ijkl} = C^{*-1}_{ijkl}$. Для случая, когда вязкие свойства материалов существенно меньше упругих свойств (этот случай как правило и реализуется на практике) $|\mathrm{Im}(\Pi^*_{ijkl})| \ll |\mathrm{Re}(\Pi^*_{ijkl})|$ и $|\mathrm{Im}(\sigma^*_{ij})| \ll |\mathrm{Re}(\sigma^*_{ij})|$, эта формула приобретает вид

$$w^* = \frac{\omega}{2} \mathrm{Im}(\Pi^*_{ijkl}(\omega,\xi))\,\mathrm{Re}(\sigma^*_{ij})\,\mathrm{Re}(\sigma^*_{kl}). \tag{21}$$

Введем также плотность накопленной энергии вязкоупругой среды за 1 цикл колебаний

$$\psi = \frac{\omega}{2} \mathrm{Re}(\Pi^*_{ijkl}(\omega,\xi))\,\mathrm{Re}(\sigma^*_{ij})\,\mathrm{Re}(\sigma^*_{kl}), \tag{22}$$

локальный коэффициент рассеяния энергии вязкоупругой среды

$$\delta = \frac{w^*}{\psi}, \tag{23}$$

а также интегральный коэффициент рассеяния энергии конструкции (пластины), который определим следующим образом:

$$\bar{\delta} = \frac{W^*}{\Psi},\; W^* = \int_V w^* dV = \int_\Sigma \int_{-0.5}^{0.5} w^* d\xi d\Sigma,\; \Psi = \int_V \psi dV = \int_\Sigma \int_{-0.5}^{0.5} \psi d\xi d\Sigma, \tag{24}$$

где $\Sigma$ - срединная поверхность пластины.

## 6. Изгибные колебания многослойных пластин

Рассмотрим задачу об изгибных квазистатических колебаниях многослойной вязкоупругой пластины прямоугольной формы под действием равномерно распределенного давления. Полагаем, что слои пластины расположены симметрично относительно плоскости $\xi = 0$, поэтому имеют место соотношения (19). В этом случае для задачи изгиба пластины нулевыми являются следующие функции:

$$u^{*(0)}_I = 0,\, \varepsilon^{*(0)}_{KL} = 0,\; T^*_{IJ} = 0,\; \sigma^{*(0)}_{IJ} = 0,\; \sigma^{*(1)}_{I3} = 0, \tag{25}$$

а ненулевыми неизвестными функциями являются только $u_3^{*(0)}(x)$, $M_{11}^*(x)$, $Q_1^*(x)$, здесь $x = x_1$ - безразмерная продольная координата пластины. Тождественно ненулевые уравнения равновесия (10), определяющие соотношения (12) и кинематические соотношения (14) принимают вид

$$M_{11,11}^* = \Delta\bar{p}^*,\ M_{11}^* = D_{1111}^*\eta_{11}^*,\ \eta_{11}^* = -u_{3,11}^{*(0)}. \tag{26}$$

Тогда амплитуды изгибных напряжений, напряжений межслойного сдвига и поперечных напряжений, согласно (18), вычисляются по формулам

$$\sigma_{IJ}^* = -\kappa\xi C_{IJ11}^{*(0)} u_{3,11}^{*(0)},$$

$$\sigma_{I3}^* = -\kappa^2 u_{3,111}^{*(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (<\xi C_{I111}^{*(0)}> - \xi C_{I111}^{*(0)}) d\xi, \tag{27}$$

$$\sigma_{33}^* = -\kappa^3 (p_-^* + \Delta p^*(\xi + 0.5) + u_{3,1111}^{*(0)} \int_{-0.5}^{\xi} (<\sigma^{*(2)}> - \sigma^{*(2)}) d\xi),$$

$$\sigma^{*(2)} = \int_{-0.5}^{\xi} (<\xi C_{1111}^{*(0)}> - \xi C_{1111}^{*(0)}) d\xi.$$

Решение уравнений (26) вместе с граничными условиями шарнирного закрепления: при $x = 0$ и $x = 1$: $u_3^{*(0)} = 0,$ $u_{3,11}^{*(0)} = 0$ - это решение для прогиба пластины в теории Кирхгофа-Лява [21]:

$$u_3^{*(0)} = -\frac{\Delta\bar{p}^*}{24 D_{11}^*} x(x^3 - 2x^2 + 1),\ D_{11}^* = <\xi^2 C_{1111}^{*(0)}>, \tag{28}$$

тогда напряжения (27) принимают следующий вид

$$\sigma_{IJ}^* = \frac{C_{IJ11}^{*(0)} \Delta\tilde{p}^*}{2\kappa^2 D_{11}^*} \xi x(x-1),$$

$$\sigma_{I3}^* = \frac{\Delta\tilde{p}^*}{\kappa D_{11}^*}(x - \frac{1}{2}) \int_{-0.5}^{\xi} (<\xi C_{I111}^{*(0)}> - \xi C_{I111}^{*(0)}) d\xi, \tag{29}$$

$$\sigma_{33}^* = -\tilde{p}_-^* - \Delta\tilde{p}^*(\xi + 0.5) + \frac{\Delta\tilde{p}^*}{D_{11}^*} \int_{-0.5}^{\xi} (<\sigma^{*(2)}> - \sigma^{*(2)}) d\xi).$$

Здесь обозначено: $\Delta\tilde{p}^* = \kappa^3 \Delta p^*$, $\tilde{p}_-^* = \kappa^3 p_-^*$, а также учтено, что $\frac{\Delta\bar{p}^*}{D_{1111}^*} = \frac{\Delta p^*}{D_{11}^*} = \frac{\Delta\tilde{p}^*}{\kappa^3 D_{11}^*}$..

## 7. Вязкоупругие композитные пластины

Рассмотрим случай, когда многослойная пластина представляет собой слоисто-волокнистый композит (СВК), каждый слой которого является однонаправленным материалом, повернутым на угол $\phi_\alpha$ вокруг оси $O\xi_3$.

Тогда в повернутой (собственной) системе координат $O\xi_i^{(\alpha)}$, ось $O\xi_1^{(\alpha)}$ которой совпадает с направлением ориентации волокон каждого слоя, компоненты $C_{ijkl}^{*0}$ тензоров комплексных модулей упругости определяются как обратные к тензорам комплексных податливостей : $C_{ijkl}^{*0} = (\Pi_{ijkl}^{*0})^{-1}$, а компоненты $(\Pi_{ijkl}^{*0})^{-1}$ - имеют следующую структуру [ ]

$$(\Pi_{ijkl}^{*0}) = \begin{bmatrix} \Pi_{1111}^{*0} & \Pi_{1122}^{*0} & \Pi_{1133}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ & \Pi_{2222}^{*0} & \Pi_{2233}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Pi_{3333}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\Pi_{1313}^{*0} & 0 & 0 \\ & сим. & & & 2\Pi_{2323}^{*0} & 0 \\ & & & & & 2\Pi_{1212}^{*0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L^*} & -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & \frac{1}{E_T^*} & -\frac{\nu_T^*}{E_T^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & -\frac{\nu_T^*}{E_T^*} & \frac{1}{E_T^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_L^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_T^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_L^*} \end{bmatrix} \tag{30}$$

где $E_L^*$ – продольный комплексный модуль упругости 1D композита в направлении ориентации волокон, $E_T^*$ – поперечный комплексный модуль упругости нити, $\nu_L^*$ - продольный комплексный коэффициент Пуассона, $\nu_T^*$ - поперечный комплексный коэффициент Пуассона, $G_L^*$ - продольный комплексный модуль сдвига, $G_T^* = \dfrac{E_T^*}{2(1+\nu_T^*)}$ - поперечный комплексный модуль сдвига. Эти характеристики 1D композита вычисляются по смесевым формулам для 1D композита

$$E_L^* = E_f\varphi_f + E_m^*(1-\varphi_f),\; E_T^* = \left(\frac{\varphi_f}{E_f} + \frac{1-\varphi_f}{E_m^*}\right)^{-1},$$

$$\nu_L^* = \nu_f\varphi_f + \nu_m^*(1-\varphi_f),\; \nu_T^* = \nu_m^*, \tag{31}$$

$$G_L^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_f(1+\nu_f)}{E_f} + \frac{(1-\varphi_f)(1+\nu_m^*)}{E_m^*}\right)^{-1}.$$

Волокна полагаются упругими, а матрица - вязкоупругой, в формулах (12) обозначены: $E_f$ - модуль упругости волокон, $\nu_f$ - продольный и поперечный коэффициенты Пуассона моноволокон, $G'_f$ - продольный модуль сдвига моноволокон, $\varphi_f$ - относительное объемное содержание волокон в 1D композите, $E_m^*$ и $\nu_m^*$ - комплексные модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы, которые вычисляются по через комплексный модуль сдвига $G_m^*$ и модуль объемного сжатия $K_m$ по формулам [23]: $E_m^* = \dfrac{9K_m G_m^*}{3K_m + G_m^*}$, $\nu_m^* = \dfrac{3K_m - 2G_m^*}{6K_m + 2G_m^*}$. Предполагается, что матрица при всестороннем сжатии проявляет только упругие свойства [23], тогда $K_m$ является вещественной константой. Для комплексного модуля сдвига матрицы $G^*$ примем модель экспоненциальных ядер [21], с учетом температурно-временной аналогии, тогда для $G^*$ имеем следующее аналитическое выражение от частоты колебаний [21]

$$G^* = \operatorname{Re}(G^*) + i\operatorname{Im}(G^*),\ \operatorname{Re}(G^*) = G + \sum_{\gamma=1}^{N} \frac{A_\gamma}{1+(\tilde{\omega}\tau_\gamma)^2},\ \operatorname{Im}(G^*) = \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{A_\gamma \tilde{\omega}\tau_\gamma}{1+(\tilde{\omega}\tau_\gamma)^2}. \quad (32)$$

$$\tilde{\omega} = \omega a_\theta(\theta),\ a_\theta = \exp\left(-\frac{a_1\Delta\theta)}{a_2 + \Delta\theta}\right),$$

где $G$, $A_\gamma$, $\tau_\gamma$, $a_1, a_2$ - константы, а $\tilde{\omega}$ - приведенная частота колебаний, $\theta$ - температура, $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, а $\theta_0$ - начальное значение температуры.

В единой для всех слоев системе координат СВК $O\xi_i$ компоненты тензора модулей упругости $\alpha$-го слоя вычисляются с помощью формул преобразования компонент тензора 4-го ранга [24]:

$$C^*_{ijkl}(\xi) = C^{*0}_{mnpq} Q^\alpha{}_{im} Q^\alpha{}_{jn} Q^\alpha{}_{kp} Q^\alpha{}_{\ell q}, \qquad \xi \in V_{\xi\alpha}, \quad (33)$$

здесь $Q^\alpha{}_{im}$ – элементы матрицы поворота слоя с номером $\alpha$, эта матрица имеет следующий вид:

$$[Q^\alpha{}_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos\phi_\alpha & \sin\phi_\alpha & 0 \\ -\sin\phi_\alpha & \cos\phi_\alpha & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 8. Результаты численных расчетов

При численных расчетах использовались следующие значения характеристик полимерной матрицы эпоксифенольного типа:

$$G_m = 0,345\,\textit{ГПа};\;\; K_m = \frac{2G_m}{3}\frac{1+\nu_m}{(1-\nu_m)},\;\; \nu_m = 0.45$$

$$n_m = 1,\; A_1 = 1 \text{ ГПа},\; \tau_1 = 0.01c\;,\; a_1 = 20K, \qquad a_2 = 300K\;,$$

а также характеристики волокон, которые считались чисто упругими :

$$E_f = 200\,\textit{ГПа};\;\; \nu_f = 0.25,\;\; A_k = 0\;\; .$$

Эти данные рассмтривались как оценочные, для боле точного определения констант вязкоупругости матрицы необходимы специализированные экспериментальные иследования. Коэффициент армирования 1D однонаправленных слоев композита был принят равным 0.6.

СВК имел следующую 4-х слойную структуру: [0/+45/-45/0], с равным соотношением всех 4-х слоев - по 25% каждого слоя, т.е углы $\phi_\alpha$ слоев имели следующие значения: $\phi_1 = 0^0$ , $\phi_2 = 45^0$ , $\phi_3 = -45^0$ , $\phi_4 = 0^0$ .

Геометрические размеры пластины были выбраны: $L$=1 $м$ , $h = 2\cdot 10^{-2}\,м$, давление на поверхностях пластины $\mathrm{Re}(\tilde{p}_+^*) = 0,2МПа$ , $\mathrm{Re}(\tilde{p}_-^*) = 0,1МПа$ .

На рисунках 1...3 приведены распределения действительных частей комплексных амплитуд тензоров изгибных напряжений $\mathrm{Re}\,\sigma_{11}^*$, сдвиговых напряжений $\mathrm{Re}\,\sigma_{13}^*$ и поперечных напряжений по толщине $\mathrm{Re}\,\sigma_{33}^*$ пластины для различных значений продольной координаты *x*. Максимальные значения изгибных напряжений $\mathrm{Re}\,\sigma_{11}^*$ реализуются в 1-м и 4-м слоях с продольной ориентацией волокон $\phi_1 = \phi_4 = 0^0$ в срединной части пластины, а максимальные значения сдвиговых напряжений $\mathrm{Re}\,\sigma_{13}^*$ реализуются на краях пластины при *x*=0 и 1, в 2 и 3-м слоях с ориентацией волокон $\phi_2 = 45^0, \phi_3 = -45^0$. Поперечные напряжения $\mathrm{Re}\,\sigma_{33}^*$ одинаковы для всех значений *x*. Для рассмотренного типа композита все действительные части комплексных амплитуд тензоров напряжений $\mathrm{Re}\,\sigma_{ij}^*$ практически не зависят от частоты колебаний $\omega$, в том числе сдвиговые и поперечные напряжения. Этот факт объясняется тем, что напряжения $\mathrm{Re}\,\sigma_{13}^*$ и $\mathrm{Re}\,\sigma_{11}^*$ согласно формулам (29) определяются значениями комплексного модуля упругости $C_{1111}^{*(0)}$, которые практически не зависят от вязкоупругих свойств матрицы.

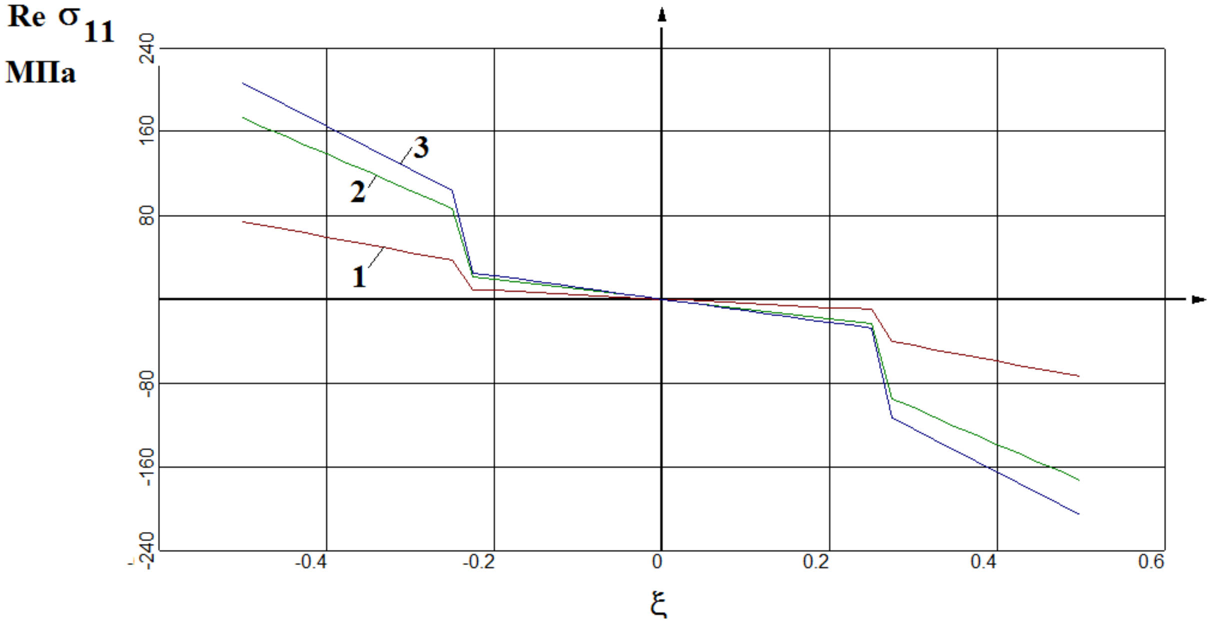


**Рис. 1** Распределение действительной части амплитуды изгибных напряжений $\operatorname{Re}\sigma_{11}^{*}$ по толщине композитной пластины в различных зонах: x=0 (1), 0.25 (2), 0.5 (3), для часты 1 Гц.

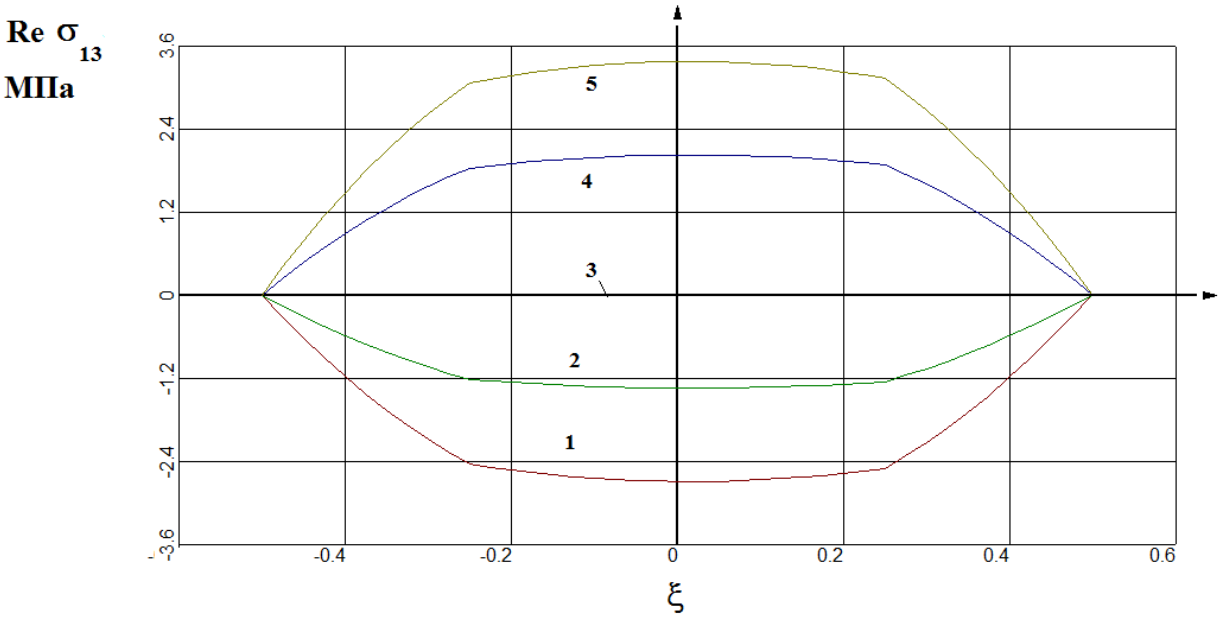


**Рис.2** Распределение действительной части амплитуды касательных напряжений $\operatorname{Re}\sigma_{13}^{*}$ по толщине композитной пластины в различных зонах: x=0 (1), 0.25 (2), 0.5 (3), 0.75 (4), 1 (5), для часты 1 Гц.

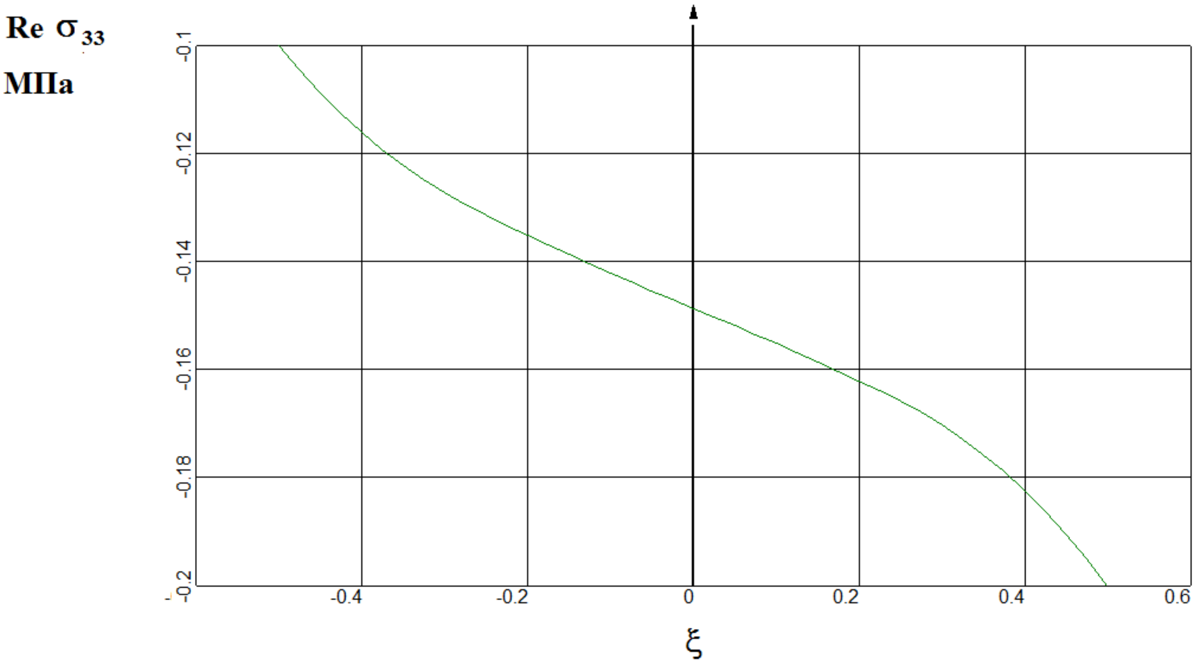


**Рис. 3** Распределение действительной части амплитуды поперечного напряжения $\operatorname{Re}\sigma_{33}^{*}$ по толщине композитной пластины для часты 1 Гц.

На рис.4...6 представлены распределения мнимых частей комплексных амплитуд напряжений $\operatorname{Im}\sigma_{11}^{*}$ , $\operatorname{Im}\sigma_{13}^{*}$ , $\operatorname{Im}\sigma_{33}^{*}$ . Эти напряжения существенно зависят от частоты колебаний, однако их значения существенно меньше соответствующих значений действительных частей амплитуд тензоров напряжений, т.е. выполняется условие $|\operatorname{Im}(\sigma_{ij}^{*})| \ll |\operatorname{Re}(\sigma_{ij}^{*})|$.

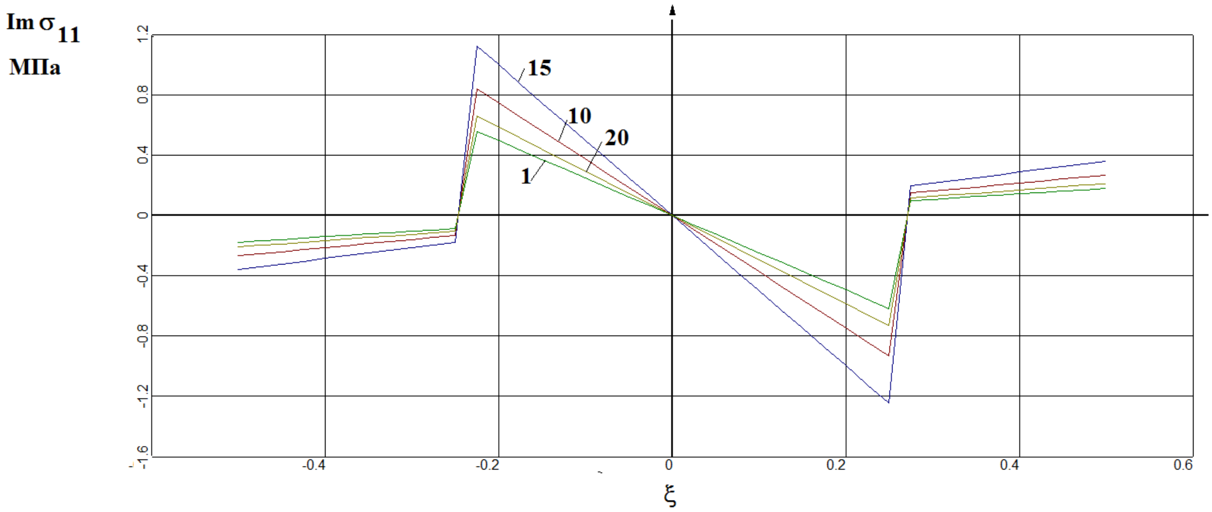


**Рис.4** Распределение мнимой части амплитуды изгибных напряжений $\operatorname{Im}\sigma_{11}^{*}$ по толщине композитной пластины в ее срединной зоне для различных частот колебаний

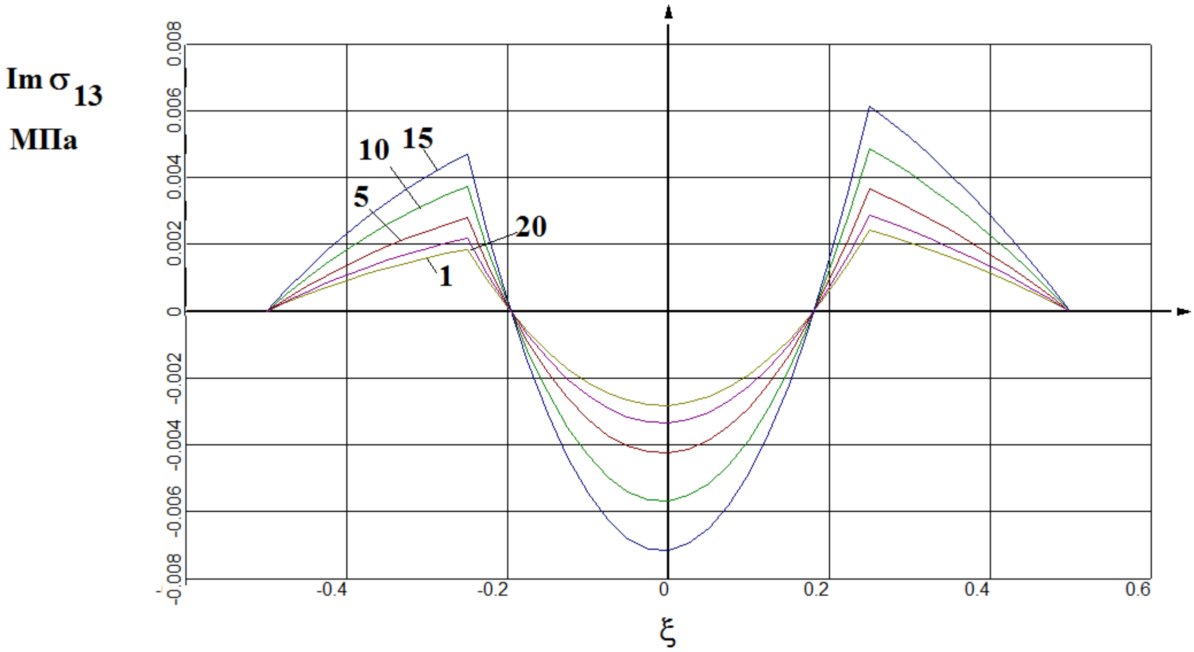


**Рис. 5** Распределение мнимой части амплитуды касательных напряжений $\mathrm{Im}\,\sigma_{13}^{*}$ по толщине композитной пластины при x=0 для различных частот колебаний

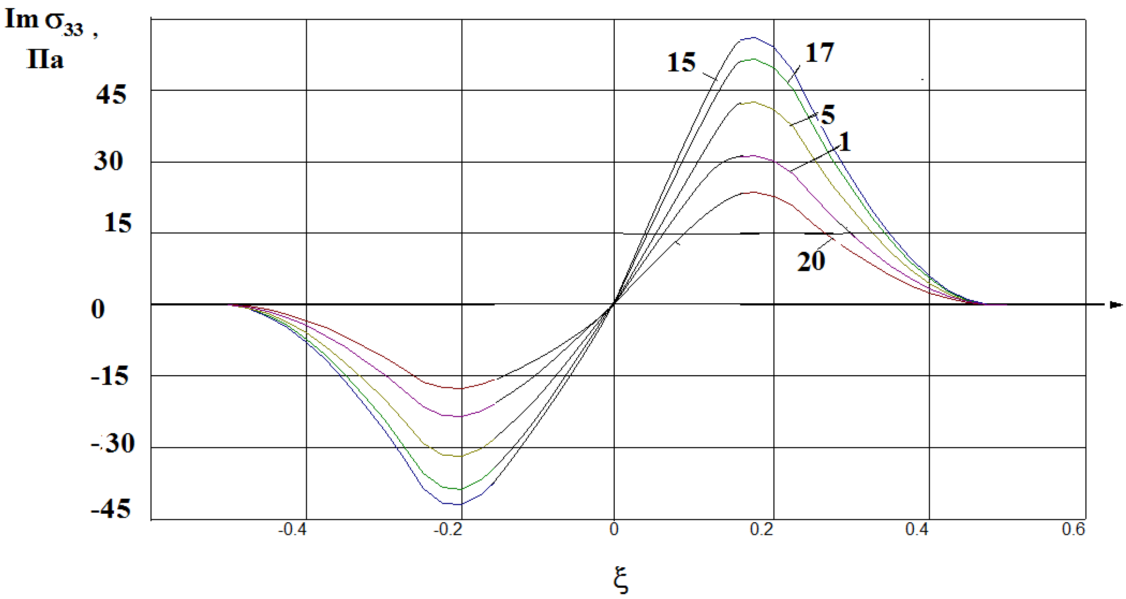


**Рис. 6** Распределение мнимой части амплитуды поперечных напряжений $\mathrm{Im}\,\sigma_{33}^{*}$ по толщине композитной пластины в ее срединной зоне для различных частот колебаний

На рисунке 7 представлены распределения локального коэффициента (23) рассеяния энергии по пластине. Результаты расчетов показывают, что основные значения коэффициента рассеяния энергии реализуются в слоях композитной пластины с ориентацией волокон $\pm 45^0$. Значения коэффициента рассеяния энергии в слоях с продольной ориентацией волокон $0^0$ меньше почти на порядок.

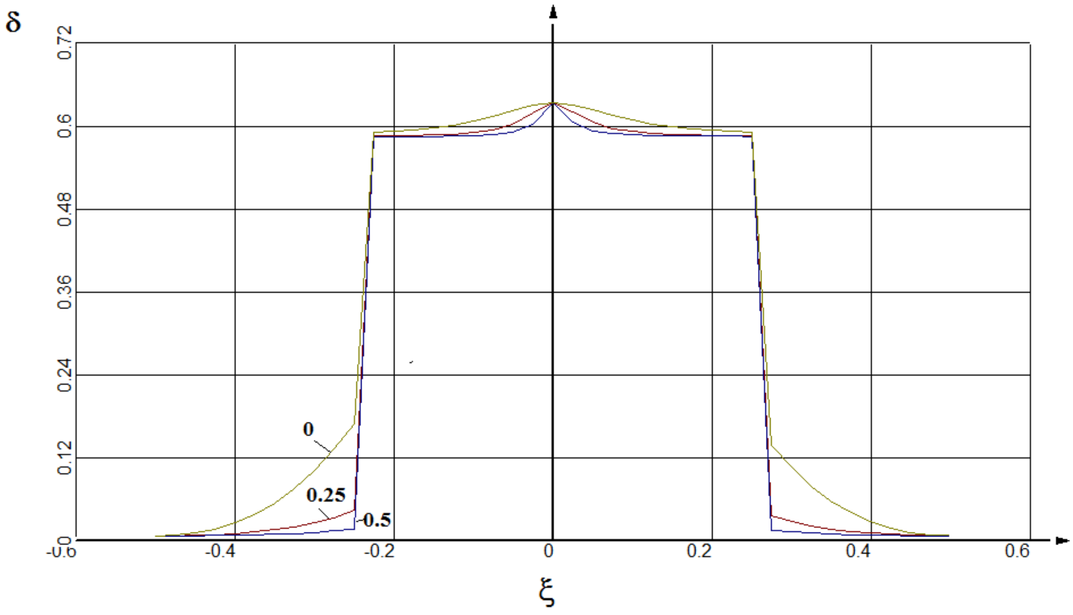


**Рис. 7** Распределение локального коэффициента демпфирования $\delta(x,\xi)$ по толщине композитной пластины для различных ее зон ( $x$=0, 0.25, 0.5) для частоты 15 Гц.

На рисунке 8 показан график зависимости интегрального коэффициента рассеяния энергии (24) от частоты колебаний. Эта зависимость имеет характерный максимум на частоте 15 Гц, которая отличается от частоты $\omega_m = 6$ Гц, на которой достигается максимальное значение тангенса угла потерь матрицы $tg\delta(G^*(\omega))$, где $tg\delta(G^*(\omega)) = \mathrm{Im}(G^*)/\mathrm{Re}(G^*)$. Значения интегрального коэффициента рассеяния энергии примерно в 4 раза меньше максимальных значений локального коэффициента рассеяния энергии: 0.16 и 0.63, соответственно.

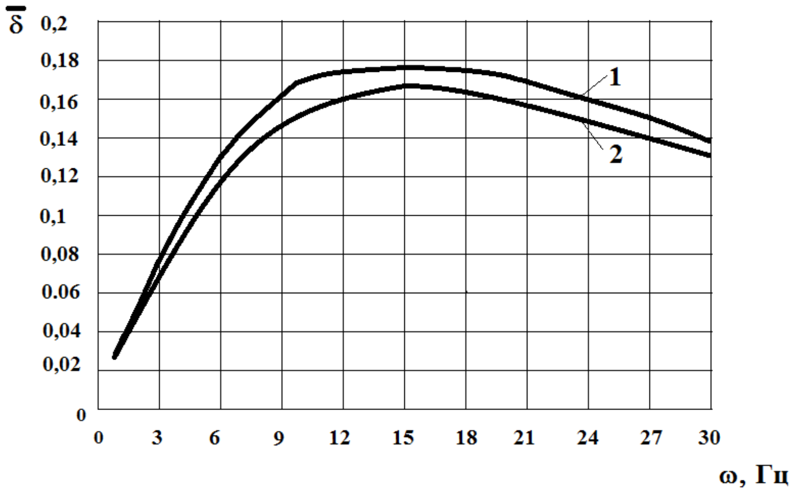


**Рис. 8** Зависимость интегрального коэффициента рассеяния энергии от частоты колебаний композитной пластины для случая учета всех компонент тензора напряжений (1) и без учета напряжений межслойного сдвига $\sigma_{13}^*$ и поперечных напряжений $\sigma_{33}^*$ (2).

На этом же рисунке показаны сравнительные результаты расчетов коэффициента рассеяния энергии по точной формуле (24), в которой учтены все ненулевые напряжения данной задачи (это $\sigma^*_{11}\ \sigma^*_{22}\ \sigma^*_{12}\ \sigma^*_{13}\ \sigma^*_{33}$), и по приближенной формуле, в которой не учитываются напряжения $\sigma^*_{13}$ и $\sigma^*_{33}$. Этот случай не учета напряжений межслойного сдвига и поперечных напряжений реализуется, если использовать для расчета напряженно-деформированного состояния классические теории пластин, типа теории Киргофа-Лява. Результаты сравнения показывают, что в этом случае ошибка в определении значений коэффициента рассеяния энергии весьма существенная - она достигает 12-15 %, поскольку, несмотря на относительно малые значения значений напряжений $\sigma^*_{13}$ и $\sigma^*_{33}$, вязкоупругие свойства композитного материала при сдвиге и поперечном растяжении, характеризуемые компонентами $\mathrm{Im}(\Pi^*_{1313}(\omega,\xi))$ и $\mathrm{Im}(\Pi^*_{3333}(\omega,\xi))$ , как раз являются наиболее значимыми.

Таким образом, расчет коэффициентов рассеяния энергии в тонких вязкоупругих композитных пластинах необходимо осуществлять по теориям, учитывающим все ненулевые компоненты амплитуд тензора напряжений. Такая теория предложена в данной работе. Ее ключевой результат - это возможность расчета всех компонент тензора амплитуд напряжений по сравнительно простым аналитическим формулам (18), или (27) - для частного случая изгибных колебаний.

## Заключение

1. Разработана теория вязкоупругих многослойных тонких пластин при установившихся моногармонических колебаниях, построенная из общих уравнений трехмерной теории вязкоупругости путем введения асимптотических разложений по малому геометрическому параметру - отношению толщины к длине пластины, без введения каких-либо гипотез относительно характера распределения амплитуд перемещений и напряжений по толщине пластины.
2. Разработанная теория позволяет вычислить все 6 компонент тензора комплексных амплитуд напряжений, включая амплитуды поперечных нормальных напряжений и амплитуды напряжения межслойного сдвига.
3. Предложен алгоритм расчета диссипативных характеристик вязкоупругих многослойных пластин, основанный на расчете функции диссипации энергии, локального коэффициента демпфирования и интегрального коэффициента демпфирования.
4. Проведено численное моделирование напряжений в вязкоупругой пластине из композитного слоисто-волокнистого материала при изгибных колебаниях, которое показало, что действительные части амплитуд напряжений, в том числе и напряжений межслойного сдвига и поперечных напряжений, практически не зависят от частоты колебаний. Этот факт обусловлен спецификой задачи об изгибных колебаниях, в ней все напряжения зависят только от продольной компоненты комплексного модуля упругости, которая, в свою очередь, главным образом, зависит только от упругих свойств

армирующих волокон. Вязкоупругие же свойства матрицы практически не влияют на действительные части амплитуд напряжений.

5. Проведенные численные расчеты показали, что основные значения локального коэффициента рассеяния энергии реализуются в слоях композитной пластины с ориентацией волокон $\pm 45^0$, а значения коэффициента демпфирования в слоях с продольной ориентацией волокон $0^0$ меньше почти на порядок. Установлено также, что максимальные значения интегрального коэффициента рассеяния энергии достигаются при частоте в 2,5 раза превышающей частоту максимума тангенса угла потерь матрицы композитного материала, которая дает основной вклад в механизм рассеяния энергии композитной пластины.

Исследование выполнено за счет средств Задания № 1.445.2014/К Минобрнауки РФ.

## Список литературы


1. Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным заполнителем // Композиты и наноструктуры. 2014. Т. 6, № 1. С.32-48.
2. Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Моделирование и разработка трехслойных композиционных материалов с сотовым заполнителем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 5. С. 66-82.
3. Sheldon Imaoka. Analyzing Viscoelastic Materials // ANSYS Advantage. 2008. Vol. 2, no. 4. P. 46-47.
4. Matzenmiller A., Gerlach S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding // Computational Materials Science. 2004. Vol. 29, iss. 3. P. 283-300. DOI: 10.1016/j.commatsci.2003.10.005
5. Michel J.C., Moulinec H., Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Vol. 172, iss. 1-4. P. 109-143. DOI: 10.1016/S0045-7825(98)00227-8
6. Shibuya Y. Evaluation of creep compliance of carbon-fiber-reinforced composites by homogenization theory// JSME Int. J. Ser. A. 1997. Vol. 40. P. 313-319.
7. Haasemann G, Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites // Technische Mechanik. 2010. Vol. 30, no. 1-3. P. 122-135.
8. Masoumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Plates – A Multi Scale Approach // International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering. 2013. Vol. 2, no. 2. P. 11-18.

9. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечного элемента // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2002. № 2. С. 95-108.
10. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.2007. № 1. С. 102-116.
11. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка автоматизированной технологии вычисления эффективных упругих характеристик композитов методом асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 2. С. 57-67.
12. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Автоматизация прогнозирования свойств композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения // Информационные технологии. 2008. № 8. С. 31-38.
13. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Численное моделирование композиционных материалов с многоуровневой структурой // Известия РАН. Серия физическая. 2011. Т. 75, № 11. С. 1549-1554.
14. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 5. С. 3-20.
15. Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 7. С. 243-265. DOI: 10.7463/0714.0717805
16. Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 86-100.
17. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 12. Режим доступа: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html (дата обращения 01.09.2014).
18. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 36-57.
19. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20, № 2. С. 259-282.
20. Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин // Известия РАН. Механика твердого тела. 2006. № 6. С. 71-79.

21. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4. Основы механики твердых сред. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 624 с.
22. Григолюк Э. И., Куликов Г.М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов // Механика композитных материалов. 1988. № 4. С. 698-704.
23. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 356 с.
24. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1. Тензорный анализ. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана , 2011. 463 с.

.

Science & Education of the Bauman MSTU Electronic journal ISSN 1994-0448

*Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 10, pp. 359–382.

DOI: **10.7463/1014.0730105**

Received: 22.08.2014
Revised: 07.10.2014



# Asymptotic Theory of Viscoelastic Multilayer Thin Composite Plates

**Yu.I. Dimitrienko[1,*], E.A. Gubareva[1], D.O. Yakovlev[1]**

*dimit.bmstu@gmail.com

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

**Keywords:** asymptotic theory of viscoelastic plates, multilayer plates, viscoelasticity, composites, polymer composite materials, laminated fibrous composites, asymptotic homogenization method, com-plex elastic modules, dissipation energy

The paper offers a theory of viscoelastic multilayer thin plates at the steady-state mono-harmonic vibrations. The theory is developed from the general equations of the three-dimensional theory of viscoelasticity by introducing an asymptotic small geometrical parameter expansion. This parameter is a plate thickness-length ratio, without involving the hypotheses regarding the nature of distributing amplitudes of displacements and plate thickness stresses. The developed theory allows us to find all 6 components of a tensor of complex amplitudes of stresses, including amplitudes of cross normal stresses and stress amplitudes of inter-laminar shear.

The article offers an algorithm for calculating the dissipative characteristics of viscoelastic multilayer plates. The algorithm is based on the calculation of energy dissipation function, local coefficient of damping, and integrated coefficient of damping.

Numeric simulation of stresses in a viscoelastic plate from the composite layered-and-fibrous material at flexural vibrations was performed. It showed that the real parts of stress amplitudes including those of inter-laminar shear and cross stresses, essentially, do not depend on the frequency of vibrations. This fact is caused by specifics of a task about flexural vibrations. In this task all stresses depend only on the longitudinal component of the complex module of elasticity. This component, in turn, depends, mainly, only on the elastic properties of the reinforcing fibres. Viscoelastic properties of a matrix almost do not effect on the real parts of stress amplitudes.

The carried-out numerical calculations showed that major values of local coefficient of energy dissipation are realized in layers of a composite plate with fibres orientation $\pm 45^0$, while values of damping coefficient in layers with longitudinal orientation of fibres $0^0$ are almost one order less. It is also found that the maximum values of integrated coefficient of energy dissipation are reached at the frequency 2.5 times exceeding the frequency of loss tangent maximum of

the composite material matrix, which provides main contribution to the energy dissipation mechanism of a composite plate.

Results of calculations showed that it is rather essential to take into consideration stresses of interlayer shear and cross stresses in plates at calculation of energy dissipation coefficient, despite rather small values of these stresses in comparison with the flexural stresses since viscoelastic properties of composite polymeric materials are just right the most significant at shear and cross extension. When calculating the energy dissipation coefficient, neglecting these stresses results in a mistake of 12-15%. Therefore energy dissipation coefficients in thin viscoelastic composite plates should be calculated according to the theories considering all nonzero components of amplitudes of stress tensor. This work offers such theory.

## References


1. Dimitrienko Iu.I., Iakovlev N.O., Erasov V.S., Fedoniuk N.N., Sborshchikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigor'ev M.M., Prozorovskii A.A. Development of a multilayer polymer composite material with discrete structural-orthotropic fillers. *Kompozity i nanostruktury = Composites and Nanostructures*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32-48. (in Russian).
2. Dimitrienko Iu.I., Fedoniuk N.N., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Prozorovskii A.A., Erasov V.S., Iakovlev N.O. Modeling and Development of Three-Layer Sandwich Composite Materials with Honeycomb Core. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science*, 2014, no. 5, pp. 66-82. (in Russian).
3. Sheldon Imaoka. Analyzing Viscoelastic Materials. *ANSYS Advantage*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 46-47.
4. Matzenmiller A., Gerlach S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber–matrix bonding. *Computational Materials Science*, 2004, vol. 29, iss. 3, pp. 283-300. DOI: 10.1016/j.commatsci.2003.10.005
5. Michel J.C., Moulinec H., Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, vol. 172, iss. 1-4, pp. 109-143. DOI: 10.1016/S0045-7825(98)00227-8
6. Shibuya Y. Evaluation of creep compliance of carbon-fiber-reinforced composites by homogenization theory. *JSME Int. J. Ser. A*, 1997, vol. 40, pp. 313-319.
7. Haasemann G, Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 30, no. 1-3, pp. 122-135.
8. Masoumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Plates – A Multi Scale Approach. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 11-18.

9. Dimitrienko Iu.I., Kashkarov A.I. Finite Element Method of Calculation of Efficient Characteristics of Composites with Periodical Structure. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science,* 2002, no. 2, pp. 95-108. (in Russian).
10. Dimitrienko Iu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. Finite Element Design of Effective Elastic and Plastic Characteristics of Composites on the Basis of Method of Asymptotic Averaging. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science*, 2007, no. 1, pp. 102-116. (in Russian).
11. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Development of Automated Technology of Calculation of Effective Elastic Characteristics of Composites by Method of Asymptotic Averaging. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science*, 2008, no. 2, pp. 57-67. (in Russian).
12. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Automated Forecasting of Composite Material Properties by Means of Homogenization Method. *Informatsionnye tekhnologii = Information Technologies*, 2008, no. 8, pp. 31-38. (in Russian).
13. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Numerical modeling of composites with multiscale microstructure. *Izvestiia RAN. Seriia fizicheskaia*, 2011, vol. 75, no. 11, pp. 1549-1554. (English translation: *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2011, vol. 75, no. 11, pp. 1457-1461. DOI: 10.3103/S1062873811110074 ).
14. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Multiscale modeling of elastic composite materials. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3-20. (in Russian).
15. Dimitrienko Iu.I., Fedoniuk N.N., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Prozorovskii A.A. Multiscale Finite-Element Modeling of Sandwich Honeycomb Composite Structures. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2014, no. 7, pp. 243-265. DOI: 10.7463/0714.0717805 (in Russian).
16. Dimitrienko Iu.I. Asymptotic Theory of Multilayer Thin Plates. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science,* 2012, no. 3, pp. 86-100. (in Russian).
17. Dimitrienko Iu.I., Iakovlev D.O. Comparison analysis of asymptotic theory of multilayer composite plates and three-dimentional theory of elastisity. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation,* 2013, no. 12. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html , accessed 01.09.2014. (in Russian).

18. Dimitrienko Iu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*, 2014, no. 1, pp. 36-57.
19. Dimitrienko Iu.I., Iakovlev D.O. Asymptotic theory of thermoelasticity of multilayer composite plates. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii = Journal on Composite Mechanics and Design*, 2014, vol. 20, no 2. S. 259-282. (in Russian).
20. Sheshenin S.V. Asymptotic analysis of plates with periodic cross-sections. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2006, no. 6, pp. 71-79. (English translation: *Mechanics of Solids*, 2006, vol. 41, no. 6, pp. 57-63.).
21. Dimitrienko Iu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 t. T. 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 4. Bases of Mechanics of Solid Medium]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2013. 624 p. (in Russian).
22. Grigoliuk E. I., Kulikov G.M. Generalized model of the mechanics of thin-walled structures made of composite materials. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1988, no. 4, pp. 698-704. (English translation: *Mechanics of Composite Materials*, 1988, vol. 24, iss. 4, pp. 537-543. DOI: 10.1007/BF00608139 ).
23. Il'iushin A.A., Pobedria B.E. *Osnovy matematicheskoi teorii termoviazkouprugosti* [Bases of mathematical theory ot thermoviscoelasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 356 p. (in Russian).
24. Dimitrienko Iu.I. *Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 t. T. 1. Tenzornyi analiz* [Continuum Mechanics. In 4 vols. Vol. 1. Tensor Analysis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 463 p. (in Russian).