электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

**УДК 551.594+533.9**

# Особенности гидродинамического течения газа заряженных частиц

***Введенская А.В.***, *студент*
*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,*
*кафедра «Лазерные и оптико-электронные системы»*

*Научный руководитель: Аникьев А.А., д.ф.-м.н., профессор*
*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана*
*bauman@bmstu.tu*

**Введение**

В основе всех явлений атмосферного разряда лежит процесс разделения заряда, нарастание электрического поля и последующий пробой воздуха. Само по себе это явление носит случайный во времени и пространстве характер, но подготовка разделения заряда и последующее нарастание поля является процессом закономерным, причиной которого являются совокупность различных физических факторов. В качестве основных процессов, приводящих к возникновению линейной молнии, предложено два механизма, подробно изложенных, например, в работах [1, 2]. В одном из них предлагается традиционный пробой на разогретых в электрическом поле электронах. Второй механизм – пробой на убегающих электронах – энергетически более выгоден, так как предполагает на порядок меньшие значения поля для разгона электронов и создания лавин. В настоящей работе развивается новый подход, предложенный в [3, 4] к объяснению физического механизма возникновения разряда, основанный на гидродинамическом рассмотрении потоков заряженных частиц в грозовом облаке, вызванном естественными причинами конвекции и увлечении заряженных частиц восходящими потоками в электрическом поле Земли. Существование гидродинамических потоков заряженных частиц в слабо ионизованном газе может приводить к развитию неустойчивостей по отношению к неоднородному распределению зарядов в облаке, нарастанию электрического поля и появлению локальных областей с полями, превышающими значение пробоя на данной высоте.

1. Теория

Предполагаем, что мы имеем дело со слабоионизованным плотным газом, состоящим из электронов, ионов и незаряженных частиц. Исходя из оценок концентрации заряженных частиц порядка $10^3$ см$^{-3}$ и предполагая примерно постоянной температуру в слое приземной атмосферы на высоте грозовых туч, можно оценить дебаевский радиус $r_D = v_T/\omega_n \approx 4$ см, что превышает расстояние между заряженными частицами и следовательно на меньших расстояниях не происходит кулоновского экранирования. Здесь $v^2_T = kT/m$ – тепловая скорость электронов, а $\omega_n = 10^{12}$ с$^{-1}$ – характерная частота колебаний заряженных частиц. В качестве основных уравнений, описывающих динамику потоков заряженных частиц, используем уравнение Эйлера, уравнение непрерывности и уравнение Пуассона для модели слабо ионизованного газа. Исходное распределение заряженных областей в грозовом облаке в поле Земли будем принимать отрицательным в нижней части и положительным в верхней части, хотя наблюдаемое распределение заряда несколько сложнее [5, 6]. Временное и пространственное распределение электрического поля в одномерном случае, тогда будет описываться системой уравнений:

$$\begin{cases} -enE - \dfrac{\partial P}{\partial x} - mn\nu(v - v_0) = mn\dfrac{\partial v}{\partial t} + mnv\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial n}{\partial t} + \dfrac{\partial (nv)}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(N_0 - n), \\ J = env. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь введены следующие обозначения: $e$ – заряд частицы, $m$ – её масса, $v$ – скорость частицы, $\nu$ - частота соударений частицы со всеми рассеивающими центрами, $n$ – концентрация частиц, $N_0$ – концентрация частиц противоположного знака, $v_0$ – скорость нейтральных частиц, с которыми сталкиваются электроны, $\varepsilon_0$ – диэлектрическая проницаемость среды, $P$ – давление газа, в адиабатическом приближении. Будем считать вначале процесс изотермическим на масштабах внутри облака и на временах предшествующих образованию лидера. Тогда давление можно представить в виде $P = kTn$. В данном приближении мы не учитываем механическую вязкость, но электродинамическая вязкость учтена частично, введением члена столкновений $mn\nu(v - v_0)$. Механизм перезарядки нейтральных частиц и ионов может быть учтен добавлением в правую часть уравнения непрерывности интеграла столкновений. В первом приближении мы не будем учитывать процесс перезарядки, а учтем его при дальнейшем рассмотрении. Запишем систему (1) в безразмерном виде, используя следующие обозначения:

$\xi = \frac{x}{l}$, $\tau = \frac{t}{\tau_0}$, $y = \frac{eEl}{(kT)}$, $\rho = nl^3$, $\rho_0 = N_0 l^3$, $u = \frac{v}{(\nu l)}$, $u_0 = \frac{v_0}{(\nu l)}$, где $l = \frac{e^2}{kT}$ - характерное расстояние, на котором энергия кулоновского взаимодействия равна тепловой энергии частиц;

$\tau_0 = \frac{m\nu l^2}{kT} = \frac{\upsilon_D{}^2}{\upsilon_T{}^2 \nu} \equiv \frac{l^2}{D}$ - время, в течение которого неравновесная концентрация частиц выравнивается за счет диффузии ($\upsilon_D$ – скорость диффузии, $\upsilon_T$ – тепловая скорость частиц, $D=kT/(m\nu)$– коэффициент диффузии). Полученная система запишется в виде:

$$\begin{cases} -\rho y - \frac{\partial P}{\partial \xi} - \tau_0 \nu \rho (u - u_0) = \rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + \tau_0 \nu \rho u \frac{\partial u}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \tau_0 \nu \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{4\pi}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_0), \\ J = \rho u. \end{cases} \tag{2}$$

Для безразмерной плотности потока частиц введено обозначение $j=Jl^2/(e\nu)$. Воспользовавшись уравнением непрерывности, мы исключим из этой системы уравнений скорость. После простых преобразований получим систему уравнений относительно двух переменных – концентрации частиц и напряженности электрического поля в потоке газа:

$$\begin{cases} \rho (y - y_0) - \frac{\partial P}{\partial \xi} - c_1(\tau) - \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau_0 \nu} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ c_1(\tau) + \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{\tau_0 \nu} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{\rho} \left( c_1(\tau) + \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_0). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь введено обозначение $y_0 = \tau_0 \nu u_0$. Константа интегрирования $c_1(\tau)$, полученная нами после интегрирования уравнения непрерывности по координате определяется значениями плотности, скорости потока и изменением электрического поля на границе грозовой тучи соотношением:

$$c_1(\tau) = \tau_0 \nu \rho(\xi_0, \tau) u(\xi_0, \tau) - \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\partial y(\xi_0, \tau)}{\partial \tau}. \tag{4}$$

Эта величина является непрерывной функцией времени, обращающейся в нуль на границе, и отличной от нуля вне её, ввиду того, что изменение электрического поля в данной точке пространства в течение промежутка времени компенсируется плотностью потока заряженных частиц через границу грозовой тучи. Тангенциальные составляющие ротора вектора напряженности магнитного поля на границе не претерпевают скачка, и не будут оказывать влияния на одномерное движение плотности тока. Введем новую переменную ζ, связанную со старыми переменными координатой ξ и временем τ их отношением ζ = ξ - Vτ. Учитывая соотношения $\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\zeta}, \frac{\partial}{\partial\tau}=-V\frac{\partial}{\partial\zeta},$

Запишем систему (4) окончательно в виде:

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial\zeta}\left[\left(\rho(\zeta)\right)^2-\frac{(c_1(\zeta)-V\rho_0)^2}{\tau_0 v}\right]+\left(\rho(\zeta)\right)^2\left[c_1(\zeta)+V[\rho(\zeta)-\rho_0]+\rho(\zeta)[y(\zeta)-y_0]-\frac{V}{\tau_0 v}\frac{\partial c_1(\zeta)}{\partial\zeta}\right],\\ \frac{\partial y}{\partial\zeta}=-\frac{4\pi}{\varepsilon_0}(\rho(\zeta)-\rho_0).\end{cases} \quad (5)$$

Система (5) описывает распределение плотности потока и электрического поля в одномерном приближении и при заданной функции $c_1(\zeta)$, определяемой условиями на границе. Она позволяет вычислить распределение электрического поля и плотности потока газа при изменении параметра V – скорости возмущения поля относительно системы координат, движущейся со скоростью потока газа.

Рассмотрим систему (5) без каких-либо приближений. Выразим из второго уравнения безразмерную концентрацию ρ(ζ) и подставим в первое уравнение. Получим уравнение

$$y_{\xi\xi}\left(A_1y_\xi^2+B_1y_\xi+C_1\right)=(A_2+A_3y)y_\xi^2+(B_2+B_3y)y_\xi^2+(C_2+C_3y)y_\xi^2+Dy+E. \quad (6)$$

Введем новую переменную $y_\zeta$ = w(y), считая y независимой переменной. Тогда уравнение (6) перепишется в виде:

$$w_yw(A_1w^2+B_1w+C_1)=(A_2+A_3y)w^3+(B_2+B_3y)w^2+(C_2+C_3y)w+Dy+E.$$

Если его переписать в виде

$$dy[(A_2+A_3y)w^3+(B_2+B_3y)w^2+(C_2+C_3y)w+Dy+E]=dw[w(A_1w^2+B_1w+ C1, \quad (7),$$

то его можно проинтегрировать после нахождения интегрирующего множителя.

Придем уравнение (7) к уравнению в полных дифференциалах следующего вида:

$$f(y,w) + g(y,w) = 0. \tag{8}$$

Для этого необходимо найти интегрирующий множитель, после умножения на который левая часть уравнения (8) становится полным дифференциалом.

В нашем случае

$$f(y,w) = (A_2 + A_3 y)w^3 + (B_2 + B_3 y)w^2 + (C_2 + C_3 y)w + Dy + E,$$

а

$$g(y,w) = w(A_1 w^2 + B_1 w + C_1).$$

Для нахождения интегрирующего множителя воспользуемся одним из стандартных условий для $f(y,w)$ и $g(y,w)$:

$$\frac{d(f(y,w))}{dw} + \frac{d(g(y,w))}{dy} = \varphi(y)g(y,w) - \psi(w)f(y,w), \tag{9}$$

где $\varphi(y)$ и $\psi(w)$ – любые функции.

При этом интегрирующий множитель будет равен:

$$\mu = e^{\int \varphi(y)dy + \int \psi(w)dw}. \tag{10}$$

Дифференцируем левую и правую часть уравнения (7), получаем:

$$\frac{d(f(y,w))}{dw} = 3A_2 w^2 + 3A_3 y w^2 + 2B_2 w + 2B_3 y w + C_2 + C_3 y, \tag{11}$$

$$\frac{d(g(y,w))}{dy} = 0. \tag{12}$$

При подстановке уравнений (11) и (12) в (9) последнее принимает вид:

$$3A_2 w^2 + 3A_3 y w^2 + 2B_2 w + 2B_3 y w + C_2 + C_3 y$$
$$= \varphi(y)w(A_1 w^2 + B_1 w + C_1) - \psi(w)((A_2 + A_3 y)w^3 + (B_2 + B_3 y)w^2 + (C_2 + C_3 y)w + Dy$$
$$+ E). \tag{13}$$

Отдельно приравняем слагаемые из уравнения (13), содержащие только *w* и слагаемые, заключающие в себе *y*. Результатом будет система:

$$\begin{cases} y(3A_3w^2+2B_3w+C_3)= \varphi(y)w(A_1w^2+B_1w+C_1)-\psi(w)(A_3yw^3+B_3yw^2+C_3yw+Dy), \\ 2B_2w+3A_2w^2+C_2=-[\psi(w)(A_2w^3+B_2w^2+C_2w++E)]. \end{cases} \quad (14)$$

Из второго уравнения системы (14) выразим $\psi(w)$.

$$\psi(w)=-\frac{2B_2w+3A_2w^2+C_2}{A_2w^3+B_2w^2+C_2w+E}. \quad (15)$$

Подставим (15) в первое уравнение системы (14):

$$y(3A_3w^2+2B_3w+C_3)= \varphi(y)w(A_1w^2+B_1w+C_1)+\frac{2B_2w+3A_2w^2+C_2}{A_2w^3+B_2w^2+C_2w+E}\times\times(A_3yw^3+$$

$$B3yw2+C3yw+Dy. \quad (16)$$

Выделим в (16) множители, зависящие от $y$:

$$\varphi(y)w(A_1w^2+B_1w+C_1)= y\left[\frac{-(2B_2w+3A_2w^2+C_2)}{A_2w^3+B_2w^2+C_2w+E}(A_3w^3+B_3w^2+C_3w+D)+3A_3w^2+\right.$$

$$2B3w+C3. \quad 17$$

Тогда очевидно, что

$$\varphi(y)= y, \quad (18)$$

при этом должно выполняться следующее условие, которое следует из (17):

$$w(A_1w^2+B_1w+C_1) = \frac{-(2B_2w+3A_2w^2+C_2)}{A_2w^3+B_2w^2+C_2w+E}(A_3w^3+B_3w^2+C_3w+D)+3A_3w^2+2B_3w + C_3 \quad (19)$$

Подставляя найденные функции (15) и (18) в уравнение (10), найдем интегрирующий множитель:

$$\mu = e^{\int ydy+\int -\frac{2B_2w+3A_2w^2+C_2}{A_2w^3+B_2w^2+C_2w+E}dw}.$$

Ввиду громоздкости решения второго интеграла в степени, сделаем следующую замену:

$$S(w) = \int -\frac{2B_2 w + 3A_2 w^2 + C_2}{A_2 w^3 + B_2 w^2 + C_2 w + E} dw.$$

Тогда интегрирующий множитель примет следующий вид:

$$\mu = e^{\frac{y^2}{2} + S(w)}. \quad (20)$$

Умножим уравнение (7) на интегрирующий множитель,

$$dy[(A_2 + A_3 y)w^3 + (B_2 + B_3 y)w^2 + (C_2 + C_3 y)w + Dy + E]e^{\frac{y^2}{2} + S(w)} - dw[w(A_1 w^2 + B_1 w + C_1)e^{\frac{y^2}{2} + S(w)}] = 0. \quad (21)$$

Левая часть (21) есть уравнение в полных дифференциалах некоторой неизвестной функции *u(y,w)*. Эта функция и является искомым решением. Найдем ее.

Учитывая вышенаписанное, понятно, что из уравнения (21) следует:

$$\frac{d(u(y,w))}{dy} = dy[(A_2 + A_3 y)w^3 + (B_2 + B_3 y)w^2 + (C_2 + C_3 y)w + Dy + E]e^{\frac{y^2}{2} + S(w)}, \quad (22)$$

и следовательно:

$$u(y,w) = \int [(A_2 + A_3 y)w^3 + (B_2 + B_3 y)w^2 + (C_2 + C_3 y)w + Dy + E]e^{\frac{y^2}{2} + S(w)}\, dy + \chi(w).$$

Для удобства записи обозначим:

$$L(y,w) = \int [(A_2 + A_3 y)w^3 + (B_2 + B_3 y)w^2 + (C_2 + C_3 y)w + Dy + E]e^{\frac{y^2}{2} + S(w)}\, dy,$$

тогда

$$u(y,w) = L(y,w) + \chi(w). \quad (23)$$

Аналогично (22):

$$\frac{d(u(y,w))}{dw} = -\left[w(A_1w^2 + B_1w + C_1)e^{\frac{y^2}{2}+S(w)}\right]. \qquad (24)$$

С другой стороны

$$\frac{d(u(y,w))}{dw} = \frac{d(L(y,w))}{dw} + \frac{d(\chi(y,w))}{dw},$$

или

$$\frac{d(\chi(y,w))}{dw} = \frac{d(u(y,w))}{dw} - \frac{d\big(L(y,w)\big)}{dw}.$$

С учетом (24) получаем:

$$\frac{d(\chi(y,w))}{dw} = -w(A_1w^2 + B_1w + C_1)e^{\frac{y^2}{2}+S(w)} - \frac{d\big(L(y,w)\big)}{dw}. \qquad (25)$$

После интегрирования (25)

$$\chi(y,w) = \int \left[-w(A_1w^2 + B_1w + C_1)e^{\frac{y^2}{2}+S(w)} - \frac{d\big(L(y,w)\big)}{dw}\right]dw. \qquad (26)$$

Уравнение (26) может принимать вид:

$$\chi(y,w) = -L(y,w) + \int \left[-w(A_1w^2 + B_1w + C_1)e^{\frac{y^2}{2}+S(w)}\right]dw. \qquad (27)$$

Подставим (27) в (23):

$$L(y,w) - L(y,w) + \int \left[-w(A_1w^2 + B_1w + C_1)e^{\frac{y^2}{2}+S(w)}\right]dw = C$$

Итак, мы получили

$$\int \left[-w(A_1w^2 + B_1w + C_1)e^{\frac{y^2}{2}+S(w)}\right]dw = C. \qquad (28)$$

Мы не будем выписывать решение этого уравнения ввиду его громоздкости, а приведем лишь графики, полученные нами при решении этого уравнения в ζ(y). На рисунках

1-4 представлены зависимости приведенной концентрации, амплитуды напряженности поля от координаты, начальных условий и при различных значениях скорости возбуждений в потоке слабоионизованного газа.

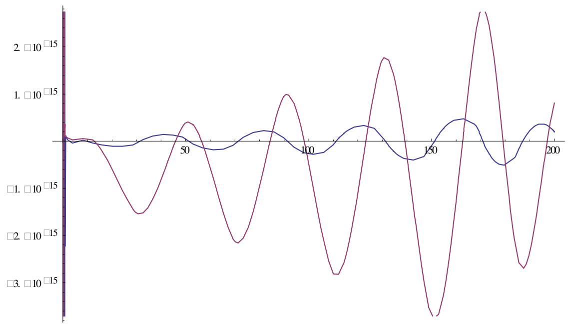


Рис. 1. Эволюция напряженности поля в потоке (красная линия) и производной плотности потока (синяя линия) при значении скорости возбуждения в потоке V = 151.021, построенная в интервале изменения приведенной координаты ξ = [0 – 200]

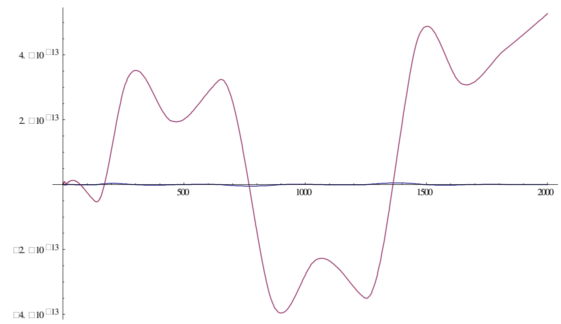


Рис. 2. Эволюция амплитуды напряженности поля (красная линия) и её производной (синяя линия) при значении скорости возбуждения в потоке V = 755.1064331852682. и области изменения переменной ξ = [0 – 1000]

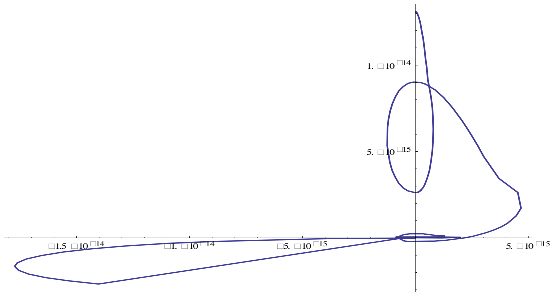


Рис. 3. Соответствующая данным рисунка 2 фазовая траектория напряженности электрического поля в потоке при значениях приведенной координаты $\xi = [0 - 1000]$

С ростом скорости возбуждений амплитуда поля возрастает на 8-12 порядков, оставаясь конечной. По результатам исследований можно сделать заключение, что рассмотренная газодинамическая модель течения газа заряженных частиц при определенных значениях параметров начальной скорости потока, плотности частиц и скорости возбуждений в потоке обнаруживает неустойчивости по отношению к амплитуде электрического поля. Амплитуда поля нарастает по мере изменения скорости потока и её значение может превысить величину пробоя воздуха на данной высоте над поверхностью Земли. В рассмотренном одномерном случае нелинейное нарастание величины поля может приводить к возникновению лидера; механизм, приводящий к его появлению, связан с преобразованием кинетической энергии потока в энергию разряда за счет создания больших полей в потоке.

## Список литературы

1. Rakov V.A., Uman M.A. Lightning physics and effects. Cambridge University Press, 2003, 465 p.
2. Roussel-Dupre, R., Colman J.J., Symbalisty E., Sentman D., Pasko V.P.. Physical processes related to discharges in planetary atmospheres // Space Science Reviews. 2008. № 137. P. 51-82. DOI: 10.1007/ s11214-008-9385-5.
3. Пустовойт В.И. Об автомодельных решениях уравнений гидродинамики заряженной среды и проблема возникновения молнии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. Спец. вып. «Оптотехника». 2011. С. 17-27.
4. Пустовойт В.И., Аникьев А.А. Электрогазодинамическая модель линейного атмосферного разряда. Инженерный журнал: Наука и инновации. МГТУ им. Н.Э. Баумана. электрон.

журн. 2013. № 1. Режим доступа: http://engjournal.ru/pribor/optica/515.html (дата обращения: 04.04.2014).

5. Krehbiel, P.R., Riousset J.A., Pasko V.P., Thomas J., Rison W., Stanley M.A., Edens H.E. Upward electrical discharges from thunderstorms // Nat. Geosci. 2008. № 1(4). P. 233-237. DOI: 10.1038/ngeo162.
6. Riousset J.A., Pasko V.P., Krehbiel P.R., Thomas R.J., Rison W. Three-dimensional fractal modeling of intracloud lightning discharge in a New Mexico thunderstorm and comparison with lightning mapping observations // J. Geophys. Res. 2007. № 112. P. D15203. DOI: 10.1029/2006JD007621.