

УДК 517.927.25

Определение критической скорости флаттера и дивергенции крыла самолета с использованием метода конечных элементов

*Мартынова А.Д., студент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Кафедра «Прикладная математика»*

*Научный руководитель: Темис Ю. М., д.т.н., профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана
bauman@bmstu.ru*

Введение

При конструировании летательного аппарата необходимо учитывать аэроупругие колебания различных его частей, возникающие в процессе движения под действием аэродинамических сил. В определенных диапазонах скоростей полета в различных частях летательного аппарата могут развиваться чрезмерно большие упругие перемещения, установившиеся колебания или колебания с неограниченно возрастающей амплитудой [1]. Таким образом, крайне важно уметь предсказывать значение критической скорости полёта, при которой конструкция может потерять аэроупругую устойчивость.

В статье рассмотрена задача об устойчивости нестреловидного свободонесущего крыла самолета, находящегося в набегающем установившемся потоке воздуха. Целью исследования являлось определение критической скорости полёта, при которой возможно возникновение колебательной (флаттер) или установившейся (дивергенция) аэроупругой неустойчивости крыла самолета.

Постановка задачи

Пусть нестреловидное свободонесущее крыло самолета полуразмаха l , упругая ось которого является прямой линией, перпендикулярна фюзеляжу и не совпадает с линией, на которой расположены центры масс сечений крыла, находится в установившемся набегающем потоке воздуха скорости U , как показано на рисунке 1.

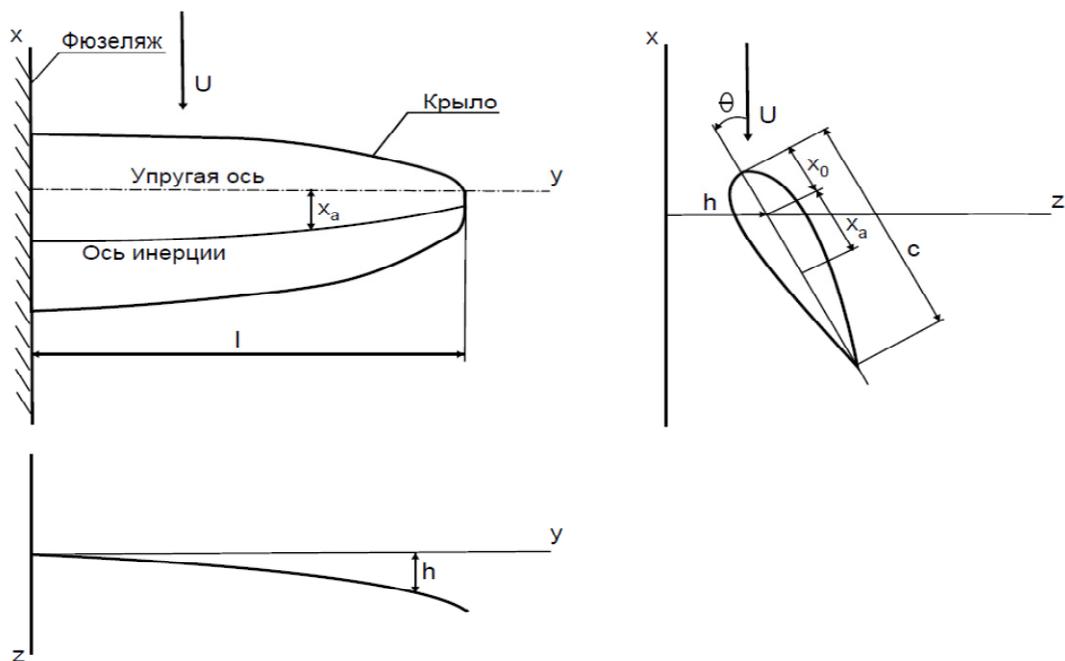


Рис. 1. Расчётная схема нестреловидного свободонесущего крыла самолета в набегающем потоке воздуха

Обозначим x_α расстояние между упругой осью и центром масс в некотором поперечном сечении крыла, x_0 – расстояние между упругой осью и передней кромкой крыла, c – длину хорды крыла. Под действием набегающего потока воздуха крыло упруго деформируется и после этой первичной деформации может происходить свободное движение крыла. В качестве переменных, описывающих это свободное движение, выберем вертикальное смещение упругой оси крыла h и угол поворота вокруг упругой оси θ . (см. рис. 1).

В рамках данного исследования допустимо считать крыло консольной балкой переменного сечения, работающей на изгиб и на кручение. Исходя из этого, запишем уравнения движения крыла [1, 2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y^2} \left(EI \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + m x_\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + L = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - m x_\alpha \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - I_\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + M = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где EI – жесткость крыла на изгиб, GJ – жесткость крыла на кручение, m и I_α масса и массовый момент, приходящиеся на единицу длины, а L и M аэродинамическая

подъемная сила и аэродинамический момент, отнесенные к единице длины. Также запишем граничные условия для консольной балки:

$$\begin{cases} h = \frac{\partial h}{\partial y} = \theta = 0, y = 0, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, y = l. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (1) в совокупности с граничными условиями (2) составляют краевую задачу.

Теперь получим выражения для определения аэродинамических силы и момента L и M . Для этого выразим эти величины через аэродинамические коэффициенты C_L (коэффициент подъемной силы) и C_M (коэффициент продольного момента) следующим образом:

$$L = \frac{\rho c U^2}{2} C_L, \quad M = \frac{\rho c^2 U^2}{2} C_M, \quad (3)$$

где ρ – плотность воздуха.

Аэродинамические коэффициенты определяем, предполагая, что крыло можно рассматривать как двумерное тонкое [1]:

$$\begin{aligned} C_L &= 2\pi\eta \left(\theta + \frac{1}{U} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{U} \left[\frac{3}{4}c - x_0 \right] \frac{\partial \theta}{\partial t} \right), \\ C_M &= -\frac{c\pi}{8U} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\frac{x_0}{c} - \frac{1}{4} \right) C_L, \end{aligned} \quad (4)$$

где η – КПД профиля крыла. Подставляя выражения (3) в (1), с учётом (4) получаем краевую задачу в окончательном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y^2} \left(EI \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + mx_\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \pi \rho^2 c U \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \left[\frac{3}{4} c - x_0 \right] \frac{\partial \theta}{\partial t} + U \theta \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - mx_\alpha \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - I_\alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \\ + \pi \rho^2 c U \left(\left[x_0 - \frac{1}{4} c \right] \frac{\partial h}{\partial t} + \left(-\frac{c^2}{16\rho} + \left[x_0 - \frac{1}{4} c \right] \left[\frac{3}{4} c - x_0 \right] \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left[x_0 - \frac{1}{4} c \right] U \theta \right) = 0, \\ h = \frac{\partial h}{\partial y} = \theta = 0, y = 0, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, y = l. \end{array} \right. \quad (5)$$

Система уравнений (5) однородна относительно неизвестных h и θ . Поэтому важно получить соотношения между геометрическими параметрами и скоростью, при которых решение отлично от нуля. Эту задачу можно решать различными способами. В [2] предложен полуаналитический метод решения, основанный на методе Галеркина и методе последовательных приближений. Ниже представлено решение задачи методом конечных элементов, который является более гибким и даёт возможность определять критическую скорость при рассмотрении задачи на собственные значения.

Метод конечных элементов

Будем искать решение задачи (5) в следующем виде:

$$h(y, t) = f(y)e^{\lambda t}, \quad \theta(y, t) = \varphi(y)e^{\lambda t}, \quad (6)$$

где λ в общем случае является комплексным числом. Подставляя (6) в (5), представим уравнения движения в матричном виде:

$$[A]\{v\} + \lambda^2[B]\{v\} + \lambda U[C]\{v\} + U^2[D]\{v\} = 0, \quad (7)$$

где

$$\{v\} = \{f \quad \varphi\}^T, \\ A = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dy^2} \left(EI \frac{d^2}{dy^2} \right) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d}{dy} \right) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} m & mx_\alpha \\ -mx_\alpha & -I_\alpha \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \pi \rho c & \pi \rho c \left[\frac{3}{4}c - x_0 \right] \\ \pi \rho c \left[x_0 - \frac{c}{4} \right] & -\frac{\pi \rho c^3}{16} + \pi \rho c \left[\frac{3}{4}c - x_0 \right] \left[x_0 - \frac{c}{4} \right] \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & \pi \rho c \\ 0 & \pi \rho c \left[x_0 - \frac{c}{4} \right] \end{bmatrix}.$$

Граничные условия для функций f и φ аналогичны граничным условиям (2).

Домножим уравнение (7) на $v_1^T = \{f_1 \quad \varphi_1\}$, такой, что для функций f_1 и φ_1 выполняются граничные условия вида (2), и проинтегрируем обе части полученного равенства по y от 0 до l [3]:

$$\int_0^l \{v_1\}^T [A] \{v\} dy + \int_0^l \left(\lambda^2 \{v_1\}^T [B] \{v\} + \lambda U \{v_1\}^T [C] \{v\} + U^2 \{v_1\}^T [D] \{v\} \right) dy = 0. \quad (8)$$

Теперь подробно рассмотрим первое слагаемое:

$$\int_0^l \{v_1\}^T [A] \{v\} dy = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^l \frac{d^2}{dy^2} \left(EI \frac{d^2 f}{dy^2} \right) f_1 dy \\ \int_0^l \frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\varphi}{dy} \right) \varphi_1 dy \end{array} \right\}.$$

Берем интегралы по частям и учитываем граничные условия для функций f, φ, f_1 и φ_1 при $y = l$. Теперь от равенства (8) можно перейти к следующему равенству:

$$\int_0^l \left(\{v_1^*\}^T [A^*] \{v^*\} + \lambda^2 \{v_1\}^T [B] \{v\} + \lambda U \{v_1\}^T [C] \{v\} + U^2 \{v_1\}^T [D] \{v\} \right) dy = 0, \quad (9)$$

где

$$v^* = \left\{ \frac{d^2 f}{dy^2} \quad \frac{d\varphi}{dy} \right\}^T, \quad v_1^* = \left\{ \frac{d^2 f_1}{dy^2} \quad \frac{d\varphi_1}{dy} \right\}^T, \quad A^* = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & -GJ \end{bmatrix}.$$

Разобьем балку на n_e одномерных элементов. На каждом элементе аппроксимируем неизвестные функции f, φ, f_1 и φ_1 . Для f и f_1 в качестве функций формы выбираем кубические полиномы Эрмита $N_k, k = 1..4$, а для φ и φ_1 - полиномы первой степени $M_k, k = 1, 2$. Тогда, на i -ом элементе для v и v_1 запишем [4]:

$$v^{e_i} = \begin{bmatrix} N_1 & \frac{y_{i+1}-y_i}{2} N_2 & 0 & N_3 & \frac{y_{i+1}-y_i}{2} N_4 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(y_i) \\ f'(y_i) \\ \varphi(y_i) \\ f(y_{i+1}) \\ f'(y_{i+1}) \\ \varphi(y_{i+1}) \end{Bmatrix}.$$

Обозначим матрицу положений $[N^{e_i}]$, а вектор узловых значений неизвестных функций на элементе выразим через матрицу геометрических связей $[a^{e_i}]$ и глобальный вектор узловых значений $u = \{f(y_1) \quad f'(y_1) \quad \varphi(y_1) \quad \dots \quad f(y_{n_e}) \quad f'(y_{n_e}) \quad \varphi(y_{n_e})\}^T$.
Решение задачи (9) будем искать в виде:

$$v = \sum_{i=1}^{n_e} [N^{e_i}] [a^{e_i}] \{u\}, \quad v_1^T = \sum_{i=1}^{n_e} \{u_1\}^T [a^{e_i}]^T [N^{e_i}]^T, \quad (10)$$

Подставим (10) в (9) и, используя свойства ортогональности функций формы и вынося за знак интеграла знак суммы, а также множители, не зависящие от y , получим:

$$\begin{aligned} \{u_1\}^T \sum_{i=1}^{n_e} \left([a^{e_i}]^T \left(\int_0^l [N^{*e_i}]^T A^* [N^{*e_i}] dy + \lambda^2 \int_0^l [N^{e_i}]^T B [N^{e_i}] dy + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda U \int_0^l [N^{e_i}]^T C [N^{e_i}] dy + U^2 \int_0^l [N^{e_i}]^T D [N^{e_i}] dy \right) [a^{e_i}] \right) \{u\} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Подынтегральные произведения матриц вычислим с учётом связи локальных и глобальных координат. Пусть

$$\begin{aligned} [K^{e_i}] &= \int_0^l [N^{*e_i}]^T A^* [N^{*e_i}] dy, & [M^{e_i}] &= \int_0^l [N^{e_i}]^T B [N^{e_i}] dy, \\ [P^{e_i}] &= \int_0^l [N^{e_i}]^T C [N^{e_i}] dy, & [Q^{e_i}] &= \int_0^l [N^{e_i}]^T D [N^{e_i}] dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Вычисление интегралов (12) сводится к покомпонентному интегрированию матриц размера 6 на 6, элементами которых являются полиномы степеней не выше 9. Интегрирование выполним численно с использованием квадратурных формул Гаусса на 5 точках.

Перепишем равенство (11) с учётом (12):

$$\{u_1\}^T \sum_{i=1}^{n_e} \left([a^{e_i}]^T \left([K^{e_i}] + \lambda^2 [M^{e_i}] + \lambda U [P^{e_i}] + U^2 [Q^{e_i}] \right) [a^{e_i}] \right) \{u\} = 0.$$

Так как вектор u_1 произвольный, для выполнения последнего равенства необходимо:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_e} \left([a^{e_i}]^T [K^{e_i}] [a^{e_i}] \right) \{u\} + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n_e} \left([a^{e_i}]^T [M^{e_i}] [a^{e_i}] \right) \{u\} + \\ & + \lambda U \sum_{i=1}^{n_e} \left([a^{e_i}]^T [P^{e_i}] [a^{e_i}] \right) \{u\} + U^2 \sum_{i=1}^{n_e} \left([a^{e_i}]^T [Q^{e_i}] [a^{e_i}] \right) \{u\} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Матрицы (12) являются локальными матрицами элемента, путём умножения их на матрицы геометрических связей и суммирования по элементам получаем глобальные матрицы $[K]$, $[M]$, $[P]$ и $[Q]$. Перепишем (13) с учётом этого следующим образом:

$$[K]\{u\} + \lambda^2[M]\{u\} + \lambda U[P]\{u\} + U^2[Q]\{u\} = 0 \quad (14)$$

или

$$[F]\{u\} = 0. \quad (15)$$

На этом этапе необходимо учесть граничные условия на левом конце консольной балки. Учёт граничных условий производим методом множителей Лагранжа [5]. Если представить граничные условия при $y = 0$ в виде:

$$[L]\{u\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \{u\} = 0,$$

то можно учесть граничные условия, решая вместо задачи (15), задачу

$$\begin{bmatrix} F & L^T \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \xi \end{Bmatrix} = 0 \quad (16)$$

Таким образом, с помощью метода конечных элементов осуществлен переход от краевой задачи (5) к системе линейных алгебраических уравнений (16). Для определения

критической скорости задачу (16) необходимо рассматривать как обобщенную проблему собственных значений.

Решение обобщенной проблемы собственных значений

Решение обобщенной проблемы собственных значений реализовано для двух случаев: нахождение собственных частот колебаний крыла и непосредственно определение критической скорости воздушного потока.

Для нахождения собственных частот ω полагаем $\lambda = i\omega$, $U = 0$. С учётом этого задача (14) принимает вид:

$$([K] - \omega^2 [M])\{u\} = 0. \quad (17)$$

Так как правая часть матричного уравнения (17) нулевая, для того, чтобы уравнение имело нетривиальные решения, определитель матрицы, стоящей в левой части, должен быть равен 0. Решаем задачу итерационно с использованием метода Ньютона. На каждой итерации необходимо вычислять определитель матрицы $[K] - \omega_k^2 [M]$. Ввиду того, что матрица имеет ленточную структуру, процедура вычисления определителя для неё менее трудоемка, чем для матрицы общего вида.

Для определения критической скорости воздушного потока полагаем $\lambda = p + i\omega$, $U \neq 0$. Тогда задача (14) принимает вид:

$$[K]\{u\} + (p^2 - \omega^2 + ip\omega)[M]\{u\} + (p + i\omega)U[P]\{u\} + U^2[Q]\{u\} = 0. \quad (14)$$

Будем увеличивать скорость U , начиная от 0, с некоторым шагом. На каждом шаге при фиксированном значении U вычисляем значения p и ω . При таком увеличении скорости p , равное 0 при $U = 0$, будет сначала уменьшаться, а потом увеличиваться, сохраняя отрицательные значения. После того, как значение p достигнет нуля при некоторой скорости U_1 , возможны два варианта: либо p увеличивается и принимает положительные значения, либо уменьшается и опять становится отрицательным. Графики изменения p с увеличением U представлены на рисунке 2. Скорость U_1 и будет являться искомой критической скоростью.

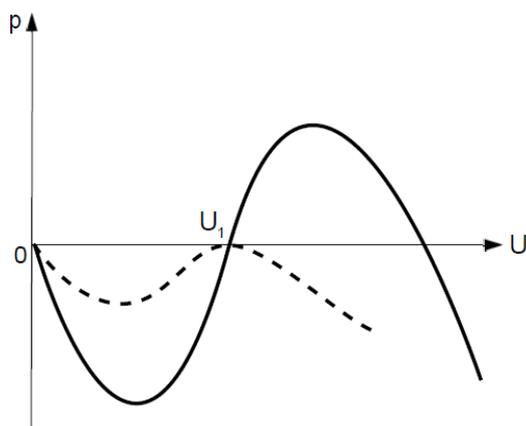


Рис. 2. Зависимость p от скорости воздушного потока U

В том случае, если при достижении критической скорости $\omega=0$, эта скорость будет критической скоростью дивергенции, в противном случае – критической скоростью флаттера.

График функции $p(U)$ может пересекать ось U и при более высоких значениях U , но интерес представляет только первое из всех таких значений, так как скорость летательного аппарата растет, начиная от нуля, и, как только будет достигнуто значение критической скорости, наступит явление флаттера или дивергенции.

Задачу нахождения p и ω при фиксированном U решаем методом Ньютона, рассматривая систему двух нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(f(p, \omega)) = 0, \\ \operatorname{Im}(f(p, \omega)) = 0, \end{cases}$$

где

$$f(p, \omega) = \operatorname{Det}([K] + (p^2 - \omega^2 + ip\omega)[M] + (p + i\omega)U[P] + U^2[Q]).$$

На первом шаге начальное приближение соответствует собственной частоте колебаний, а при каждом следующем фиксированном U начальным приближением служат значения, полученные на предыдущем шаге.

Пример определения критической скорости полёта

Для решения рассматриваемой задачи описанным выше методом, разработана программа, работоспособность которой проверена на тестовых примерах для крыла

постоянного сечения. Входными данными являются геометрические и жесткостные характеристики крыла ($l, c, m, I_\alpha, x_\alpha, x_0, \eta, EI, GJ$).

В таблице 1 представлены значения первых собственных частот изгибного и крутильного колебаний для различных значений $\frac{x_\alpha}{c}$.

Таблица 1

Собственные частоты колебаний

$\frac{x_\alpha}{c}$	Метод Галеркина [1]	Метод конечных элементов		
		$n_e = 5$	$n_e = 10$	$n_e = 20$
0.0	$\omega_1 = 2.224$ $\omega_2 = 70.248$	$\omega_1 = 2.224$ $\omega_2 = 70.537$	$\omega_1 = 2.224$ $\omega_2 = 70.320$	$\omega_1 = 2.224$ $\omega_2 = 70.266$
0.1	$\omega_1 = 2.224$ $\omega_2 = 74.092$	$\omega_1 = 2.224$ $\omega_2 = 74.274$	$\omega_1 = 2.223$ $\omega_2 = 74.023$	$\omega_1 = 2.223$ $\omega_2 = 73.965$
0.2	$\omega_1 = 2.223$ $\omega_2 = 88.352$	$\omega_1 = 2.223$ $\omega_2 = 91.247$	$\omega_1 = 2.223$ $\omega_2 = 90.958$	$\omega_1 = 2.223$ $\omega_2 = 90.888$

В таблице 2 представлены полученные значения критических скоростей для различных значений $\frac{x_\alpha}{c}$. Во всех случаях критической скоростью полета является критическая скорость флаттера.

Таблица 2

Критические скорости флаттера

$\frac{x_\alpha}{c}$	Метод Галеркина [1]	МКЭ		
		$n_e = 5$	$n_e = 10$	$n_e = 20$
0.0	$U_d = 166.960$ $U_f = \mathbf{135.274}$ $\omega_f = 56.694$	$U_d = 167.648$ $U_f = \mathbf{131.565}$ $\omega_f = 58.417$	$U_d = 167.132$ $U_f = \mathbf{130.796}$ $\omega_f = 58.271$	$U_d = 167.003$ $U_f = \mathbf{130.472}$ $\omega_f = 58.246$
0.1	$U_d = 167.650$ $U_f = \mathbf{43.847}$ $\omega_f = 67.734$	$U_d = 167.648$ $U_f = \mathbf{40.480}$ $\omega_f = 68.707$	$U_d = 167.132$ $U_f = \mathbf{40.366}$ $\omega_f = 68.489$	$U_d = 167.003$ $U_f = \mathbf{40.337}$ $\omega_f = 68.433$
0.2	$U_d = 167.651$ $U_f = \mathbf{27.517}$ $\omega_f = 83.893$	$U_d = 167.648$ $U_f = \mathbf{24.241}$ $\omega_f = 86.863$	$U_d = 167.132$ $U_f = \mathbf{24.005}$ $\omega_f = 86.644$	$U_d = 167.003$ $U_f = \mathbf{23.93}$ $\omega_f = 86.598$

На рисунке 3 показана зависимость p и ω от U для тестового примера. Красной линией обозначены зависимости, относящиеся к изгибному колебанию (частота ω_1), а синей – зависимости, относящиеся к крутильному колебанию (частота ω_2). Штриховая линия используется для обозначения достижения критической скорости.

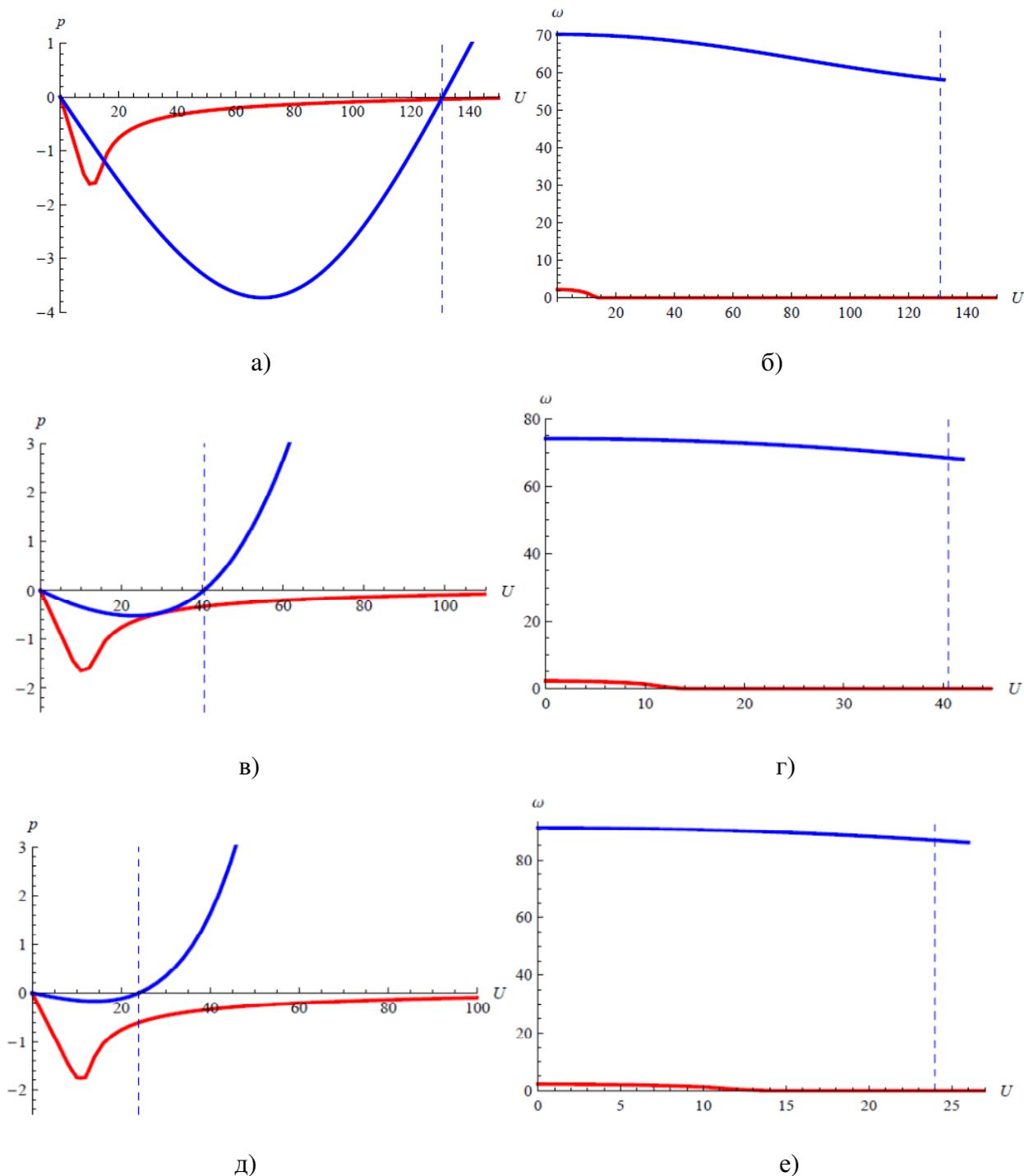


Рис. 3. Зависимости p и ω от U для тестового примера:

а) $p(U)$, $x_\alpha = 0.0$; б) $\omega(U)$, $x_\alpha = 0.0$; в) $p(U)$, $x_\alpha = 0.1$; г) $\omega(U)$, $x_\alpha = 0.1$;

д) $p(U)$, $x_\alpha = 0.2$; е) $\omega(U)$, $x_\alpha = 0.2$;

Заключение

В работе задача определения критической скорости флаттера и дивергенции решена с использованием метода конечных элементов. Разработана программа, позволяющая по геометрическим и прочностным характеристикам крыла самолёта определить критическую скорость полёта, при которой возможна аэроупругая неустойчивость крыла. Результаты решения тестовых примеров предложенным методом с допустимой погрешностью совпадают с результатами решения тестовых примеров полученных методом Галеркина с последующим использованием метода последовательных приближений, что позволяет сделать вывод о применимости метода конечных элементов к решению задач о свободном движении крыла.

Список литературы

1. Фын Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959. 524 с.
2. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов: Том первый, элементарная теория и задачи. М.: Наука, 1965. 364 с.
3. Темис Ю.М., Федоров И.М. Сравнение методов анализа устойчивости стержней переменного сечения при неконсервативном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. 2006. № 68. С. 95-105.
4. Bathe K.-J. Finite Element Procedure. New Jersey: Prentise-Hall, 1996. 1072 p.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов / под ред. Б.Е. Победря. М: Мир, 1975. 541 с.