

УДК 621.3

Свободные и вынужденные колебания балки на поверхности жидкости в ограниченном объеме

Мунин Е. Н., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Космические аппараты и ракеты-носители»*

Гончаров Д.А., аспирант

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Теоретическая механика»*

*Научный руководитель: Пожалостин А.А., д.т.н, профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана*

Bauman@bmstu.ru

В данной работе решена краевая задача о колебаниях, находящейся на свободной поверхности жидкости в жестком ограниченном прямоугольном баке. Рассмотрено два случая: в первом случае балка жесткая и совершает малые вертикальные поступательные колебания под действием гидростатического давления жидкости. Во втором – балка считается упругой, однородной с погонной массой μ_0 на некотором упругом основании. Рассмотренная модель может быть простейшей для анализа динамики плавающих объектов, в частности подводной лодки в надводном положении.

Основные допущения:

1) Движения малые и происходят под действием гидростатического давления жидкости.

2) Волновые движения последней не рассматриваются.

3) Жидкость идеальная

В случае изгибных колебаний балки принимаются следующие допущения:

1) Справедлив закон Гука, гипотеза сплошности и гипотеза плоских нормалей.

Дифференциальное уравнение вертикального движения абсолютно жесткой балки под действием гидростатического давления жидкости имеет вид :

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + \rho g S y &= 0 \\ p &= \rho g y \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= 0; \quad \omega^2 = \frac{g}{2l}, \end{aligned}$$

где g - ускорение свободного падения,

l - длина балки,

m - масса однородной балки,

ρ - плотность жидкости,

y - вертикальное поступательное перемещение балки,

p - гидростатическое давление,

S – площадь поверхности балки,

ω - частота свободных вертикальных колебаний жесткой балки.

Координата y отсчитывается от равновесного состояния балки (см. рис. 1).

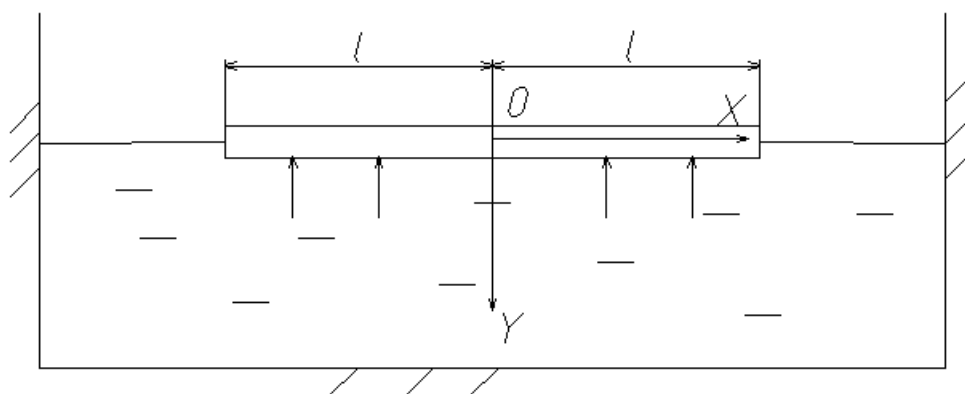


Рис. 1. Система отсчета для вертикальных колебаний балки и восстанавливающей силы от гидростатического давления жидкости

Отсюда величина жесткости основания (жидкости):

$$C = \omega^2 m = \frac{mg}{2l}$$

В дальнейшем будем считать приближенно модель жидкости в виде некоторого упругого основания жесткостью C_p , где

$$C_p = \frac{C}{2l} = \frac{mg}{4l^2}$$

Далее приведено решение краевой задачи о колебаниях упругой балки на упругом основании с распределенной жесткостью C_p .

Задача 1

Дифференциальное уравнение свободных колебаний упругой балки на упругом основании (см. рис. 2).

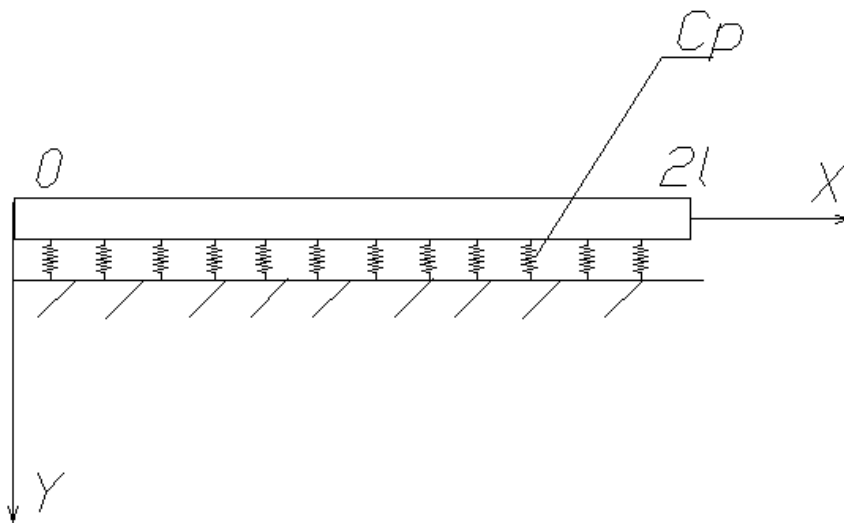


Рис. 2. Балка на упругом основании

$$y^{IV} - \mu^4 y = 0, \text{ где}$$
$$\mu^4 = \frac{\mu_0}{EI_0} (\omega_0^2 - \omega^2),$$

где

EI_0 - жесткость балки на изгиб

ω_0 - частота изгибных колебаний балки без жидкости

$\mu_0 = \frac{m}{2l}$ - погонная масса однородной балки

μ - собственное значение краевой задачи

По методу Фурье:

$y = fS$, где $f(x)$ – форма колебаний, $S(x)$ – временной множитель

Уравнение для $f(x)$ имеет вид:

$$f^{IV} - \mu^4 f = 0,$$

Решение этого уравнения

$$f(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x) + C_3 \operatorname{ch}(\mu x) + C_4 \operatorname{sh}(\mu x)$$

Константы интегрирования C_i определяются из граничных условий закрепления, которые для балки со свободными концами имеют вид:

$$f''(0) = f''(l) = 0; \quad f'''(0) = f'''(l) = 0, \text{ где } f' = \frac{df(x)}{dx}$$

Удовлетворяя последнему, получим трансцендентное уравнение для определения μ

$$ch(\mu l) \cos(\mu l) = 1$$

Решая это уравнение численно подбором (методом половинного деления), получим, например собственное значение $\mu_1 l [1]$, и выражение для частоты изгибных колебаний упругой балки

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI_0}{\mu_0} \mu_1^4 + \omega^2}, \text{ где } \mu_1 = \frac{4.73}{l}$$

Задача 2

Вынужденные колебания балки от действия силы $F(t) = F_0 \cos(pt)$. Точное решение.

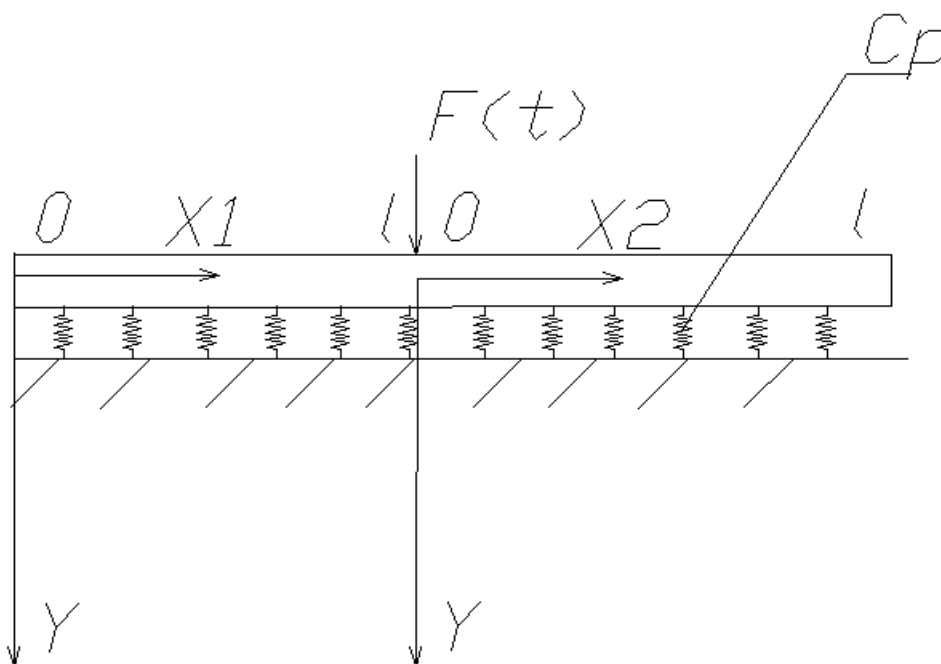


Рис. 3. Действие на балку внешней силы $F(t)$

Разбиваем балку на 2 участка (см. рис. 3) и ищем решение для вынужденных колебаний системы в виде:

$y_1(x_1, t), y_2(x_2, t)$ на первом и втором участке соответственно

$$y_1(x_1, t) = f_1(x_1) \cos(pt); \quad y_2(x_2, t) = f_2(x_2) \cos(pt)$$

Граничные условия для форм вынужденных колебаний $f_i(x), (i = 1, 2)$:

$$\begin{aligned}
f_1^{II}(0) &= f_2^{II}(l) = 0; \\
f_1^{III}(0) &= f_2^{III}(l) = 0; \\
f_1(l) &= f_2(0); \\
f_1^I(l) &= f_1^I(0); \\
f_1^{II}(l) &= f_2^{II}(0); \\
f_1^{III}(l) &= f_2^{III}(0) + F_0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1) получим выражение для констант $C_{ij}[(i = 1, 2), (j = 1..4)]$ и форму вынужденных колебаний системы:

$$\begin{aligned}
f_i(x_i) &= C_{i1} \sin(\lambda_i x_i) + C_{i2} \cos(\lambda_i x_i) + C_{i3} \operatorname{sh}(\lambda_i x_i) + C_{i4} \operatorname{ch}(\lambda_i x_i) \\
y_i(x_i, t) &= f_i(x_i) \cos(pt)
\end{aligned}$$

Функции форм вынужденных колебаний $f_i(i = 1, 2)$ в силу громоздкости в явном виде не приводятся

Задача 3

Определение прогиба балки $y(x, t)$ в случае неупругого удара груза массы m о балку (см. рис. 4).

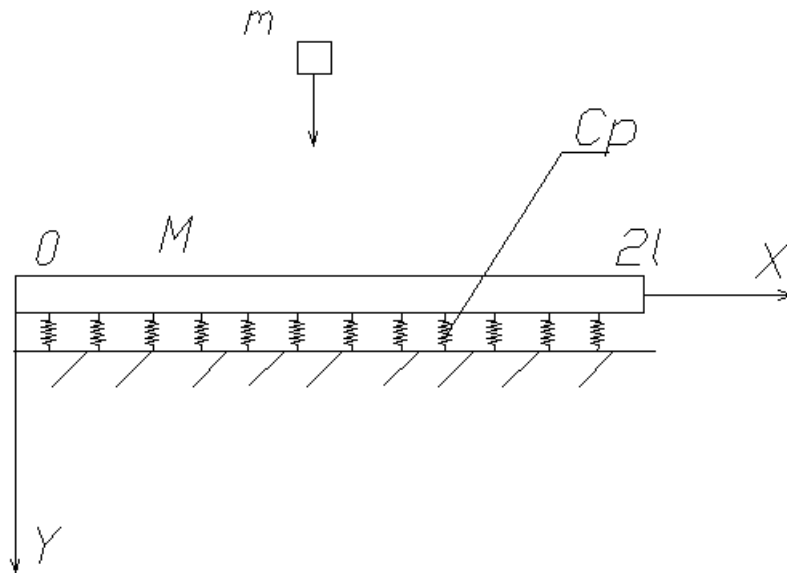


Рис. 4. Удар о балку груза массы m

Считаем массу груза после удара равномерно распределенной по длине балки, то есть $\mu = \frac{m+M}{2l}$, а форму колебаний балки $f_i(x)$ полагаем неизменной и равной форме колебаний как в случае 1.

Из теоремы об изменении количества движения при ударе находится вертикальная скорость балки после удара

$$U = \frac{m}{M+m} \sqrt{2gh}$$

Движение системы считается поступательным.

Начальные условия для определения C_{1i} и C_{2i} :

$$y_0(x, t) = 0, \quad \frac{\partial y_0(x, t)}{\partial x} = U = \text{const} \quad (2)$$

Прогиб $y(x, t)$ ищем в виде

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n f_i (C_{1i} \cos(\omega_i t) + C_{2i} \sin(\omega_i t)), \quad \text{где}$$

f_i – формы колебаний балки на упругом основании найденная в задаче 1

Константы C_{1i} и C_{2i} определяются из начальных условий (2) с учетом условий ортогональности f_i

$$C_{1i} = 0, \quad C_{2i} = \frac{\int_0^l U f_i(x) dx}{\|f_i\|}$$

В результате уравнение прогиба балки имеет вид:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \frac{U f_i(\frac{l}{2})}{\|f_i\| \omega_i} \sin(\omega_i t), \quad \text{где}$$

$$\|f_i\| = \int_0^l \mu_0 f_i^2(x) dx,$$

ω_i – частота свободных колебаний системы.

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
2. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 438 с.
3. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости М.: вычислительный центр АН СССР, 1966. 269 с.