Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сетевое научное издание. ISSN 1994-0448

Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Электрон. журн. 2014. № 11. С. 72–94.

DOI: **10.7463/1114.0735505**

Представлена в редакцию: 04.11.2014

УДК 519.6

Модификация метода решения прямой задачи кинематики для класса платформенных манипуляторов с шестью степенями свободы

Лапиков А. Л.[1,*], Пащенко В. Н.[1], Масюк В. М.[1]

[*]anton.lapikov@inbox.ru

[1]КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, Россия

В статье рассмотрены вопросы обобщения и систематизации существующих моделей платформенных манипуляторов с шестью степенями свободы. Обоснована необходимость модификации существующих моделей за счет добавления новых параметров. Проведена модификация и обобщение на обозначенный класс манипуляционных механизмов ранее предложенного метода решения прямой задачи кинематики. Метод построен таким образом, что решение прямой задачи кинематики сводится к нахождению аналитического уравнения плоскости, в которой лежит подвижная платформа манипулятора. Решение прямой задачи кинематики (положение и ориентация подвижной платформы манипулятора) представляется в виде матрицы однородного преобразования, что позволит в дальнейшем применять данный метод для исследования многосекционных манипуляторов параллельной структуры.

Ключевые слова: манипуляторы параллельной кинематики, платформа Гью-Стюарта, гексапод, прямая задача кинематики, математическая модель

Введение

Многосекционные манипуляторы параллельной структуры (ММПС) представляют собой соединение секций, где в качестве секции конструкции выступает манипулятор параллельной кинематики (МПК). Известными примерами подобных манипуляторов являются манипуляционный робот LX-4 компании Logabex [1], состоящий из 4-х идентичных секций (в данном механизме в роли секции выступает платформенный манипулятор Гью-Стюарта, известный также как платформа Стюарта), многосекционный манипулятор типа «хобот», разноплановое исследование которого проведено в работах [2-5]. ММПС значительно превосходят обычные манипуляторы параллельной кинематики по таким параметрам, как объем рабочей зоны, манипулятивность, число степеней подвижности. С другой стороны, построение моделей многосекционных манипуляторов является достаточно сложной задачей, обусловленной, прежде всего, такими особенностями манипуляторов параллельной кинематики, как анизотропия и неоднородность динамических, упругих и скоростных свойств манипулятора, сложность задания движений манипулятора в обобщенных координатах, связанных со степенями подвижности манипулятора, необходимость использования непрямоугольного (нелинейного) базиса [6] и т.п.

Исследование многосекционных манипуляторов параллельной структуры требует создания новых методик и подходов к изучению, базирующихся на моделях секции манипулятора.

В данной работе проведено обобщение и дополнение существующих математических моделей, описывающих кинематические особенности для класса манипуляторов параллельной кинематики платформенного типа с шестью степенями свободы.

При исследовании манипуляторов параллельной кинематики платформенного типа с шестью степенями свободы, наиболее широко известным примером которых является платформа Гью-Стюарта, используют модели разного уровня детализации. Обычно при построении моделей основание и подвижную платформу рассматривают как идеальные диски, телескопические штанги – в виде упругих стержней, а шарниры представляются как точки, допускающие вращения по некоторым степеням подвижности. Степень детализации такой модели определяется числом и расположением шарниров на основании и подвижной платформе манипулятора. В литературе особенно широко освещены следующие модели: платформа Гью-Стюарта типа 6-3 [1], характеризующаяся шестью шарнирами на основании и тремя шарнирами на подвижной платформе, платформа Гью-Стюарта типа 6-6 [1] с шестью шарнирами на основании и платформе. Шарниры могут быть расположены либо равномерно по границе основания и/или платформы, либо неравномерно (попарно). В этих моделях в качестве обобщенных координат манипулятора принято рассматривать длины телескопических штанг.

Кинематическое исследование любого манипулятора, в том числе и манипулятора параллельной кинематики, требует решения двух основных задач, которые носят название прямой задачи кинематики (ПЗК) и обратной задачи кинематики (ОЗК). ПЗК заключается в нахождении положения и ориентации манипулятора по известным обобщенным координатам, а ОЗК – в нахождении обобщенных координат по известным положению и ориентации манипулятора. В отличие от классических манипуляторов, сложность решения прямой задачи кинематики манипуляторов параллельной структуры значительно превосходит сложность решения обратной задачи. В общем случае, решение ОЗК для платформенного типа с шестью степенями свободы сводится к решению шести нелинейных уравнений [7,8]. Решение ПЗК четко не формализовано. В литературе описано несколько подходов к решению, где положение и ориентация платформы выражаются через орты подвижной системы координат, которые определяются с помощью векторов, соединяющих основание и подвижную платформу [9-12], или через составляющие матрицы поворота [13,14], или же весь манипулятор рассматривается как сложная пространственная фигура [15-17]. В настоящей работе рассматривается метод решения, в основе которого лежит вычисление аналитического уравнения плоскости подвижной платформы [18]. Данный метод требует решения системы из 9 нелинейных уравнений, характеризующихся одинаковым типом нелинейности и имеющих один и тот же физический смысл – расстояние между шарнирами манипулятора.

Целью данной работы является обобщение и модификация существующих моделей и метода решения прямой задачи кинематики, в основе которого лежит вычисление аналитического уравнения плоскости, для класса платформенных манипуляторов с шестью степенями свободы.

1. Постановка задачи

Во всех вышеуказанных моделях основание и подвижная платформа манипулятора рассматриваются как идеальные диски. Подобное допущение не приводит к снижению функциональности модели, однако может существенно повлиять на точность получаемых результатов, особенно в тех случаях, когда толщины основания сравнимы с длинами штанг. Внесем в модель дополнительные параметры, описывающие обобщенные расстояния до оси вращения в шарнире для основания и подвижной платформы. Кроме того, для унификации моделей введем дополнительные параметры: угловую координату первого шарнира основания в неподвижной системе координат и угловую координату первого шарнира подвижной платформы в связанной с ней системе координат.

Структура рассматриваемых манипуляторов приведена на рис. 1 – 4. В качестве обобщенных координат манипулятора рассматриваем вектор длин телескопических штанг $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \dots & L_6 \end{bmatrix}$. Положение и ориентацию платформы определяет вектор $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_o & y_o & z_o & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$, где x_o, y_o, z_o – декартовы координаты центра подвижной платформы, а α, β, γ – тройка углов, которая однозначно определяет ориентацию системы координат подвижной платформы относительно системы координат основания, например, углы Эйлера. Для решения задач кинематики применяем аппарат однородных преобразований. Общий вид матрицы однородного преобразования для нашей задачи:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\alpha,\beta,\gamma) & \mathbf{p}(x_0, y_0, z_0) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $\mathbf{R}(\alpha,\beta,\gamma)$ – матрица поворота, которая однозначно определяет ориентацию системы координат подвижной платформы относительно системы координат основания (матрица поворота функционально зависит от углов Эйлера), $\mathbf{p}(x_0, y_0, z_0)$ – вектор переноса, который задает координаты начала отсчета подвижной системы координат, $\mathbf{0}$ – нулевой вектор размерностью 1×3.

Ставится следующая задача: обобщить соотношения для решения прямой задачи кинематики $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{L})$ и обратной задачи кинематики $\mathbf{L} = f(\mathbf{T}(\mathbf{X}))$.

2. Кинематические соотношения для платформы Гью-Стюарта типа 6-3

Структура платформенного манипулятора Гью-Стюарта типа 6-3 с равномерным и парным расположением шарниров приведена на рис. 1 и рис. 2 соответственно. Манипулятор состоит из двух платформ, соединенных между собой телескопическими штангами, которые крепятся к платформам с помощью сферических шарниров. Шарниры основания лежат в вершинах правильного шестиугольника с радиусом описанной окружности R и отстоят от плоскости основания на величину h_b. Угловая координата первого шарнира основания определяется величиной φ_b. Шарниры подвижной платформы лежат в вершинах правильного треугольника с радиусом описанной окружности r и отстоят от плоскости платформы на величину h_{mp}. Угловая координата первого шарнира подвижной платформы определяется величиной $\varphi_{mp} = 0$.

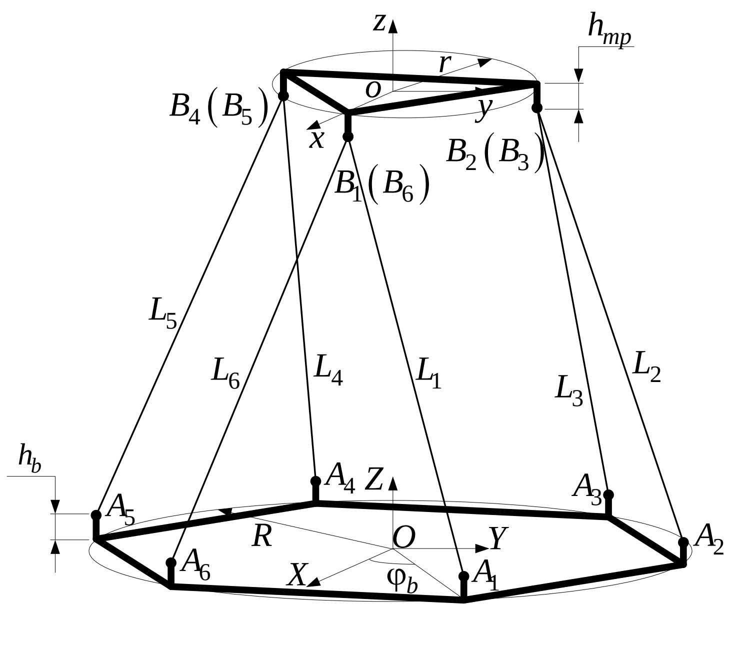

Рис. 1. Структура платформенного манипулятора Гью-Стюарта типа 6-3 с равномерным расположением шарниров

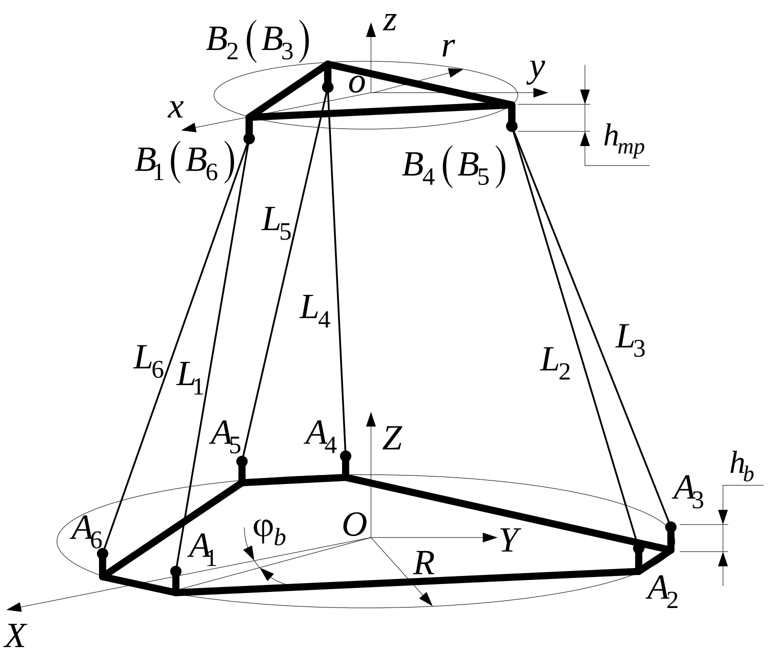

Рис. 2. Структура платформенного манипулятора Гью-Стюарта типа 6-3 с парным расположением шарниров

2.1. Обратная задача кинематики

Для манипуляторов параллельной структуры обратная задача кинематики сводится к нахождению евклидова расстояния между шарнирами основания и подвижной платформы. Запишем однородные координаты шарниров основания в неподвижной системе координат

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} R\,\mathrm{c}(\varphi_b) & R\,\mathrm{c}\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi_b\right) & R\,\mathrm{c}\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi_b\right) & R\,\mathrm{c}\left(\frac{4\pi}{3}-\varphi_b\right) & R\,\mathrm{c}\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi_b\right) & R\,\mathrm{c}(-\varphi_b) \\ R\,\mathrm{s}(\varphi_b) & R\,\mathrm{s}\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi_b\right) & R\,\mathrm{s}\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi_b\right) & R\,\mathrm{s}\left(\frac{4\pi}{3}-\varphi_b\right) & R\,\mathrm{s}\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi_b\right) & R\,\mathrm{s}(-\varphi_b) \\ h_b & h_b & h_b & h_b & h_b & h_b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, (2)$$

где $\cos(\varphi)=\mathrm{c}(\varphi)$, а $\sin(\varphi)=\mathrm{s}(\varphi)$.

Аналогично однородные координаты шарниров подвижной платформы (в подвижной системе координат) равны

$$\tilde{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix} r\,\mathrm{c}(\varphi_{mp}) & r\,\mathrm{c}\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi_{mp}\right) & r\,\mathrm{c}\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi_{mp}\right) & r\,\mathrm{c}\left(\frac{4\pi}{3}-\varphi_{mp}\right) & r\,\mathrm{c}\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi_{mp}\right) & r\,\mathrm{c}(-\varphi_{mp}) \\ r\,\mathrm{s}(\varphi_{mp}) & r\,\mathrm{s}\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi_{mp}\right) & r\,\mathrm{s}\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi_{mp}\right) & r\,\mathrm{s}\left(\frac{4\pi}{3}-\varphi_{mp}\right) & r\,\mathrm{s}\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi_{mp}\right) & r\,\mathrm{s}(-\varphi_{mp}) \\ h_{mp} & h_{mp} & h_{mp} & h_{mp} & h_{mp} & h_{mp} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, (3)$$

где $\cos(\varphi)=\mathrm{c}(\varphi)$, а $\sin(\varphi)=\mathrm{s}(\varphi)$.

Поскольку матрица однородного преобразования известна, вычислим координаты шарниров подвижной платформы в неподвижной системе координат

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}}.$$

Тогда искомая зависимость $\mathbf{L} = f\left(\mathbf{T}(\mathbf{X})\right)$ может быть выражена как

$$L_i = \sqrt{\left(A_{1,i} - B_{1,i}\right)^2 + \left(A_{2,i} - B_{2,i}\right)^2 + \left(A_{3,i} - B_{3,i}\right)^2},\ i = \overline{1..6}.$$

2.2. Прямая задача кинематики

Основные положения метода решения прямой задачи кинематики, в основе которого лежит вычисление аналитического уравнения плоскости подвижной платформы манипулятора Гью-Стюарта типа 6-3, описаны в работе [18]. Учитывая соотношения (2), запишем уравнения системы, приняв во внимание изменения, которые необходимо внести в связи с добавлением новых параметров модели

$$\begin{cases}
\left(x_a - x_b\right)^2 + \left(y_a - y_b\right)^2 + \left(z_a - z_b\right)^2 = \Delta_{ab}^2, \\
\left(x_a - x_c\right)^2 + \left(y_a - y_c\right)^2 + \left(z_a - z_c\right)^2 = \Delta_{ac}^2, \\
\left(x_b - x_c\right)^2 + \left(y_b - y_c\right)^2 + \left(z_b - z_c\right)^2 = \Delta_{bc}^2, \\
\left(x_a - \mathbf{A}_{1,1}\right)^2 + \left(y_a - \mathbf{A}_{2,1}\right)^2 + \left(z_a - \mathbf{A}_{3,1}\right)^2 = \mathbf{L}_1^2, \\
\left(x_b - \mathbf{A}_{1,2}\right)^2 + \left(y_b - \mathbf{A}_{2,2}\right)^2 + \left(z_b - \mathbf{A}_{3,2}\right)^2 = \mathbf{L}_2^2, \\
\left(x_b - \mathbf{A}_{1,3}\right)^2 + \left(y_b - \mathbf{A}_{2,3}\right)^2 + \left(z_b - \mathbf{A}_{3,3}\right)^2 = \mathbf{L}_3^2, \\
\left(x_c - \mathbf{A}_{1,4}\right)^2 + \left(y_c - \mathbf{A}_{2,4}\right)^2 + \left(z_c - \mathbf{A}_{3,4}\right)^2 = \mathbf{L}_4^2, \\
\left(x_c - \mathbf{A}_{1,5}\right)^2 + \left(y_c - \mathbf{A}_{2,5}\right)^2 + \left(z_c - \mathbf{A}_{3,5}\right)^2 = \mathbf{L}_5^2, \\
\left(x_a - \mathbf{A}_{1,6}\right)^2 + \left(y_a - \mathbf{A}_{2,6}\right)^2 + \left(z_a - \mathbf{A}_{3,6}\right)^2 = \mathbf{L}_6^2.
\end{cases} \tag{4}$$

где $\Delta_{ab}, \Delta_{ac}, \Delta_{bc}$ – расстояние между шарнирами подвижной платформы, $\mathbf{L}_i,\ i = \overline{1..6}$ – элементы вектора обобщенных координат манипулятора.

Разрешив систему уравнений (4) относительно неизвестных $x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b, x_c, y_c, z_c$, примем во внимание следующие положения:

1) ось OZ подвижной системы координат совпадает с нормалью к искомой плоскости;
2) плоскость подвижной платформы параллельна искомой плоскости и отстоит от нее на величину h_{mp};
3) единичный вектор оси OX подвижной системы координат может быть найден нормированием вектора, проходящего через центр описанной вокруг треугольника abc окружности и точку a;
4) единичный вектор оси OY образует с другими ортами правую тройку и может быть выражен через векторное произведение.

Тогда координаты центра описанной вокруг треугольника abc окружности могут быть вычислены как $\left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3} \quad \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \quad \frac{z_a + z_b + z_c}{3} \right)$. Вектор нормали $\mathbf{n}$ к искомой плоскости (ось oz системы координат подвижной платформы) определяют направляющие косинусы

$$\cos\alpha_{oz} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\beta_{oz} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \cos\gamma_{oz} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{5}$$

где A, B, C – коэффициенты канонического уравнения искомой плоскости. Направляющие косинусы осей координат ox и oy равны соответственно

$$\cos\alpha_{ox} = \frac{x_a - \frac{x_a + x_b + x_c}{3}}{\sqrt{\left(x_a - \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \right)^2 + \left(y_a - \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right)^2 + \left(z_a - \frac{z_a + z_b + z_c}{3} \right)^2}}, \tag{6}$$

$$\cos\beta_{ox} = \frac{y_a - \frac{y_a + y_b + y_c}{3}}{\sqrt{\left(x_a - \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \right)^2 + \left(y_a - \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right)^2 + \left(z_a - \frac{z_a + z_b + x_c}{3} \right)^2}}, \tag{7}$$

$$\cos\gamma_{ox} = \frac{z_a - \frac{z_a + z_b + z_c}{3}}{\sqrt{\left(x_a - \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \right)^2 + \left(y_a - \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right)^2 + \left(z_a - \frac{z_a + z_b + z_c}{3} \right)^2}}, \tag{8}$$

$$\cos\alpha_{oy} = \cos\beta_{oz} \cos\gamma_{ox} - \cos\gamma_{oz} \cos\beta_{ox}, \tag{9}$$

$$\cos\beta_{oy} = \cos\gamma_{oz} \cos\alpha_{ox} - \cos\alpha_{oz} \cos\gamma_{ox}, \tag{10}$$

$$\cos\gamma_{oy} = \cos\alpha_{oz} \cos\beta_{ox} - \cos\beta_{oz} \cos\alpha_{ox}. \tag{11}$$

Учитывая, что плоскость платформы отстоит от искомой плоскости на величину h_{mp}, координаты центра подвижной платформы могут быть выражены как

$$o\left(x_o \quad y_o \quad z_o \right) = \begin{bmatrix} \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \\ \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \\ \frac{z_a + z_b + z_c}{3} \end{bmatrix} + h_{mp}\mathbf{n}. \tag{12}$$

Подставив соотношения (5)-(12) в формулу (1) зависимость $\mathbf{T}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{L})$ примет вид

$$
\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ox} & \cos\alpha_{oy} & \cos\alpha_{oz} & x_o \\ \cos\beta_{ox} & \cos\beta_{oy} & \cos\beta_{oz} & y_o \\ \cos\gamma_{ox} & \cos\gamma_{oy} & \cos\gamma_{oz} & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

3. Кинематические соотношения для платформы Гью-Стюарта типа 6-6

Структура платформенного манипулятора Гью-Стюарта типа 6-6 с равномерным и парным расположением шарниров приведена на рис. 3 и рис. 4 соответственно. При построении модели будем придерживаться допущений, принятых для моделей платформы Гью-Стюарта типа 6-3. Таким образом, для однозначного описания любой модели необходимы следующие параметры:

1) радиус описанной окружности шестиугольника основания R;
2) угловая координата первого шарнира основания φ_b;
3) обобщенный параметр расстояния от плоскости основания до оси вращения в шарнирах основания h_b;
4) радиус описанной окружности шестиугольника подвижной платформы r;
5) угловая координата первого шарнира подвижной платформы φ_{mp};
6) обобщенный параметр расстояния от плоскости подвижной платформы до оси вращения в шарнирах подвижной платформы h_{mp};

Отметим, что при $\varphi_{mp} = 0$ структура типа 6-6 вырождается в структуру типа 6-3.

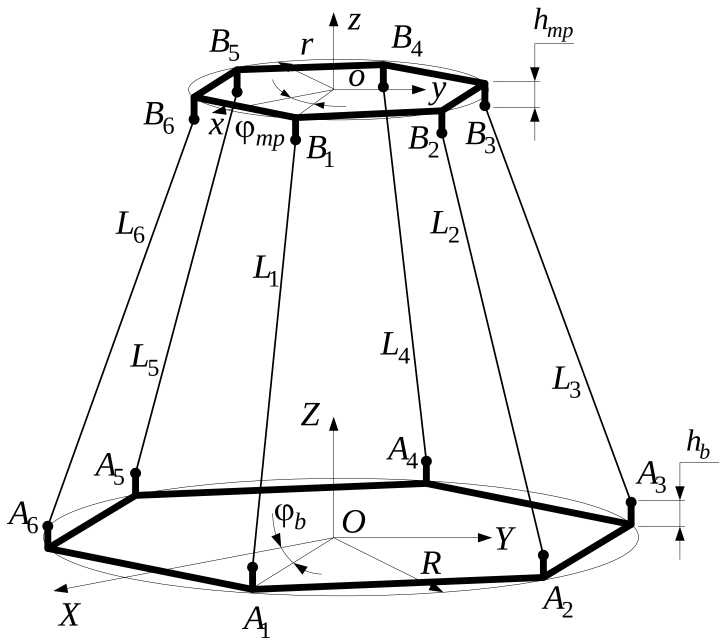

Рис. 3. Структура платформенного манипулятора Гью-Стюарта типа 6-6 с равномерным расположением шарниров

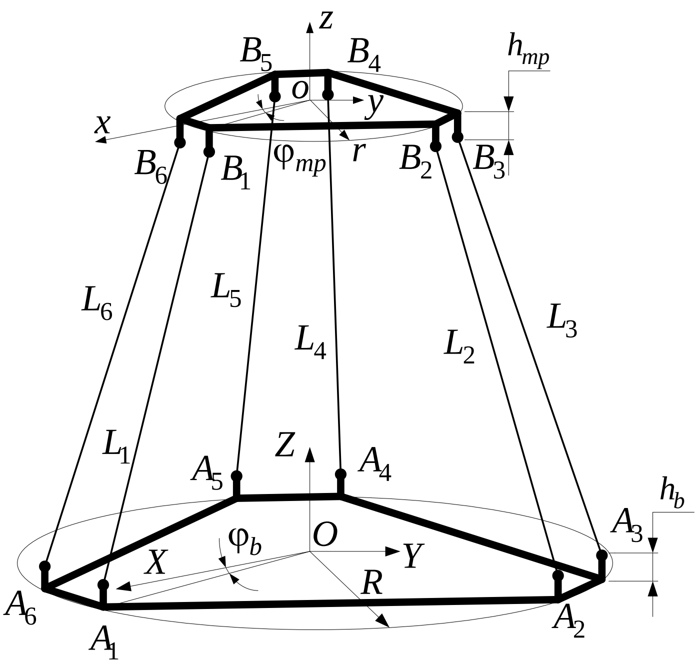

Рис. 4. Структура платформенного манипулятора Гью-Стюарта типа 6-6 с парным расположением шарниров

3.1. Обратная задача кинематики

Проанализировав набор параметров модели, можно сделать вывод, что для выражения координат шарниров основания в неподвижной системе координат и координат шарниров подвижной платформы в подвижной системе координат можно использовать соотношения (2) и (3) соответственно. Вычислив координаты шарниров платформы в неподвижной системе координат с помощью соотношения

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}},$$

искомую зависимость $\mathbf{L} = f\left(\mathbf{T}(\mathbf{X})\right)$ выразим как

$$L_i = \sqrt{\left(A_{1,i} - B_{1,i}\right)^2 + \left(A_{2,i} - B_{2,i}\right)^2 + \left(A_{3,i} - B_{3,i}\right)^2},\ i = \overline{1..6}.$$

Выбранный набор параметров моделей позволил получить единообразное решение для обратной задачи кинематики для класса манипуляторов параллельной кинематики платформенного типа с шестью степенями свободы.

3.2. Прямая задача кинематики

Модификация рассматриваемого метода решения прямой задачи кинематики для платформы Гью-Стюарта типа 6-6 с равномерным распределением шарниров описана в работах [19]. Однако подобная модификация метода не может быть применена для структуры с парным расположением шарниров, поскольку в этом случае выражение координат одних шарниров через другие затруднительно. Рассмотрим рис. 5, который иллюстрирует расположение шарниров на подвижной платформе.

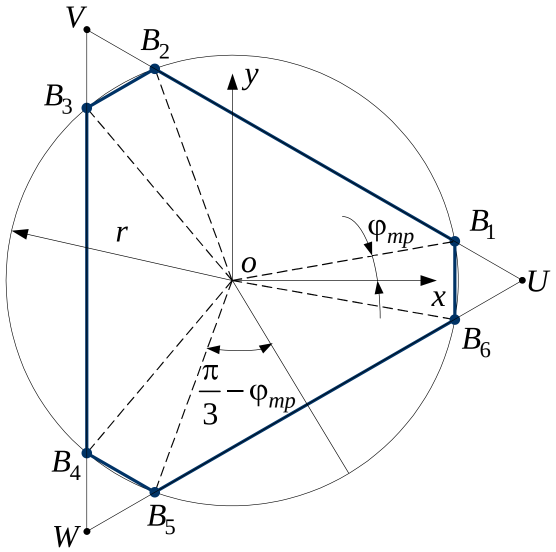

Рис. 5. Расположение шарниров на подвижной платформе для модели платформы Гью-Стюарта типа 6-6

Достроив шестиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ до треугольника, получим виртуальные точки U,V,W, которые могут быть использованы для вычисления аналитического уравнения плоскости платформы. Далее необходимо найти длину стороны треугольника UVW и выразить координаты шарниров через координаты вершин треугольника UVW. Длину стороны треугольника UVW, например WU, будем искать как сумму длин отрезков WB_5, B_5B_6 и B_6U. Учитывая, что треугольники B_1B_6U, B_2B_3V и B_4B_5W равносторонние и равные между собой, длины искомых отрезков могут быть вычислены как $WE = FU = 2r\sin\left(\varphi_{mp}\right)$. Аналогично отрезок B_5B_6 может быть найден как $B_5B_6 = 2r\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi_{mp}\right)$. Таким образом, искомая длина стороны треугольника

$$UV = VW = WU = 4r\sin\left(\varphi_{mp}\right) + 2r\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi_{mp}\right). \tag{13}$$

Выразим координаты шарниров через координаты виртуальных точек U,V,W. Известно, что координаты точки c, лежащей на отрезке ab равны

$$x_c = x_a + k\left(x_b - x_a\right), \qquad y_c = y_a + k\left(y_b - y_a\right), \qquad z_c = z_a + k\left(z_b - z_a\right), \tag{14}$$

где $k = \dfrac{|ac|}{|ab|}$.

Учитывая соотношения (14), координаты шарниров подвижной платформы манипулятора могут быть выражены следующим образом

$$B_1\begin{pmatrix} x_{B_1} & y_{B_1} & z_{B_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_U + K\left(x_V - x_U\right) & y_U + K\left(y_V - y_U\right) & z_U + K\left(z_V - z_U\right) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$B_2\left(x_{B_2}\quad y_{B_2}\quad z_{B_2}\right)=\left(x_V+K\left(x_V-x_U\right)\quad y_V+K\left(y_V-y_U\right)\quad z_V+K\left(z_V-z_U\right)\right),\qquad(16)$$

$$B_3\left(x_{B_3}\quad y_{B_3}\quad z_3\right)=\left(x_V+K\left(x_W-x_V\right)\quad y_V+K\left(y_W-y_V\right)\quad z_V+K\left(z_W-z_V\right)\right),\qquad(17)$$

$$B_4\left(x_{B_4}\quad y_{B_4}\quad z_{B_4}\right)=\left(x_W+K\left(x_V-x_W\right)\quad y_W+K\left(y_V-y_W\right)\quad z_W+K\left(z_V-z_W\right)\right),\qquad(18)$$

$$B_5\left(x_{B_5}\quad y_{B_5}\quad z_{B_5}\right)=\left(x_W+K\left(x_U-x_W\right)\quad y_W+K\left(y_U-y_W\right)\quad z_W+K\left(z_U-z_W\right)\right),\qquad(19)$$

$$B_6\left(x_{B_6}\quad y_{B_6}\quad z_{B_6}\right)=\left(x_U+K\left(x_W-x_U\right)\quad y_U+K\left(y_W-y_U\right)\quad z_U+K\left(z_W-z_U\right)\right),\qquad(20)$$

где $K=\dfrac{r\sin\left(\varphi_{mp}\right)}{2r\sin\left(\varphi_{mp}\right)+r\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\varphi_{mp}\right)}$.

Основываясь на соотношениях (15)-(20), матрицу однородных координат шарниров подвижной платформы можно записать в виде

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} x_{B_1} & x_{B_2} & x_{B_3} & x_{B_4} & x_{B_5} & x_{B_6} \\ y_{B_1} & y_{B_2} & y_{B_3} & y_{B_4} & y_{B_5} & y_{B_6} \\ z_{B_1} & z_{B_2} & z_{B_3} & z_{B_4} & z_{B_5} & z_{B_6} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\qquad(21)$$

Тогда, учитывая выражения (13) и (20), систему уравнений, описывающую конструкцию манипулятора, можно представить в виде

$$\begin{cases} \left(x_U-x_V\right)^2+\left(y_U-y_V\right)^2+\left(z_U-z_V\right)^2=\Delta_{UV}^2, \\ \left(x_U-x_W\right)^2+\left(y_U-y_W\right)^2+\left(z_U-z_W\right)^2=\Delta_{UW}^2, \\ \left(x_V-x_W\right)^2+\left(y_V-y_W\right)^2+\left(z_V-z_W\right)^2=\Delta_{VW}^2, \\ \left(\mathbf{C}_{1,1}-\mathbf{A}_{1,1}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{2,1}-\mathbf{A}_{2,1}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{3,1}-\mathbf{A}_{3,1}\right)^2=\mathbf{L}_1^2, \\ \left(\mathbf{C}_{1,2}-\mathbf{A}_{1,2}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{2,2}-\mathbf{A}_{2,2}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{3,2}-\mathbf{A}_{3,2}\right)^2=\mathbf{L}_2^2, \\ \left(\mathbf{C}_{1,3}-\mathbf{A}_{1,3}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{2,3}-\mathbf{A}_{2,3}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{3,3}-\mathbf{A}_{3,3}\right)^2=\mathbf{L}_3^2, \\ \left(\mathbf{C}_{1,4}-\mathbf{A}_{1,4}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{2,4}-\mathbf{A}_{2,4}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{3,4}-\mathbf{A}_{3,4}\right)^2=\mathbf{L}_4^2, \\ \left(\mathbf{C}_{1,5}-\mathbf{A}_{1,5}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{2,5}-\mathbf{A}_{2,5}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{3,5}-\mathbf{A}_{3,5}\right)^2=\mathbf{L}_5^2, \\ \left(\mathbf{C}_{1,6}-\mathbf{A}_{1,6}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{2,6}-\mathbf{A}_{2,6}\right)^2+\left(\mathbf{C}_{3,6}-\mathbf{A}_{3,6}\right)^2=\mathbf{L}_6^2. \end{cases}$$

где $\Delta_{UV},\Delta_{VW},\Delta_{WU}$ – расстояние между виртуальными точками, $\mathbf{L}_i,\ i=\overline{1..6}$ – элементы вектора обобщенных координат манипулятора.

Придерживаясь положений, принятых для модели платформы Гью-Стюарта типа 6-3, соотношения координаты центра описанной вокруг треугольника UVW окружности могут быть вычислены как $\left(\dfrac{x_U+x_V+x_W}{3}\quad \dfrac{y_U+y_V+y_W}{3}\quad \dfrac{z_U+z_V+z_W}{3}\right)$, а соотношения (5)-(14) примут вид

$$\cos\alpha_{oz}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \cos\beta_{oz}=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \cos\gamma_{oz}=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\alpha_{ox}=\frac{x_U-\dfrac{x_U+x_V+x_W}{3}}{\sqrt{\left(x_U-\dfrac{x_U+x_V+x_W}{3}\right)^2+\left(y_U-\dfrac{y_U+y_V+y_W}{3}\right)^2+\left(z_U-\dfrac{z_U+z_V+z_W}{3}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_{ox}=\frac{y_U-\dfrac{y_U+y_V+y_W}{3}}{\sqrt{\left(x_U-\dfrac{x_U+x_V+x_W}{3}\right)^2+\left(y_U-\dfrac{y_U+y_V+y_W}{3}\right)^2+\left(z_U-\dfrac{z_U+z_V+z_W}{3}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_{ox}=\frac{z_U-\dfrac{z_U+z_V+z_W}{3}}{\sqrt{\left(x_U-\dfrac{x_U+x_V+x_W}{3}\right)^2+\left(y_U-\dfrac{y_U+y_V+y_W}{3}\right)^2+\left(z_U-\dfrac{z_U+z_V+z_W}{3}\right)^2}},$$

$$\cos\alpha_{oy}=\cos\beta_{oz}\cos\gamma_{ox}-\cos\gamma_{oz}\cos\beta_{ox},$$

$$\cos\beta_{oy}=\cos\gamma_{oz}\cos\alpha_{ox}-\cos\alpha_{oz}\cos\gamma_{ox},$$

$$\cos\gamma_{oy}=\cos\alpha_{oz}\cos\beta_{ox}-\cos\beta_{oz}\cos\alpha_{ox}.$$

$$o\left(x_o\quad y_o\quad z_o\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{x_U+x_V+x_W}{3}\\ \dfrac{y_U+y_V+y_W}{3}\\ \dfrac{z_U+z_V+z_W}{3}\end{bmatrix}+h_{mp}\mathbf{n}.$$

где A,B,C – коэффициенты канонического уравнения искомой плоскости.

Искомая зависимость $\mathbf{T}(\mathbf{X})=f(\mathbf{L})$ примет вид

$$\mathbf{T}(\mathbf{X})=\begin{bmatrix}\cos\alpha_{ox} & \cos\alpha_{oy} & \cos\alpha_{oz} & x_o\\ \cos\beta_{ox} & \cos\beta_{oy} & \cos\beta_{oz} & y_o\\ \cos\gamma_{ox} & \cos\gamma_{oy} & \cos\gamma_{oz} & z_o\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

4. Моделирование движения платформы Гью-Стюарта

Для проведения эксперимента поставим следующую задачу. Необходимо промоделировать перевод платформы из текущего состояния в некоторое требуемое состояние при условии максимального быстродействия. За начальное состояние манипулятора примем такое его положение, при котором подвижная платформа параллельна основанию.

При переводе центра платформы из заданного положения в некоторое требуемое положение желаемая траектория должна разбиваться на участки, характер движения на которых описывается простыми зависимостями [20]. В общем случае производят линейную интерполяцию траектории, поскольку таким образом можно обеспечить наибольшее быстродействие системы.

В начальный момент времени положение центральной точки манипулятора характеризуется известным вектором обобщенных координат. Чтобы определить значения обобщенных координат манипулятора в произвольной точке необходимо решить для него обратную задачу кинематики.

Вычислив значения обобщенных координат для желаемого положения, линейную аппроксимацию законов изменения обобщенных координат можно описать следующими итерационными соотношениями:

$$L_{1,n+1} = L_{1,n} + \frac{L_{1,f} - L_{1,s}}{N} t, n = \overline{0..N}, L_{1,0} = L_{1,s},$$

$$L_{2,n+1} = L_{2,n} + \frac{L_{2,f} - L_{2,s}}{N} t, n = \overline{0..N}, L_{2,0} = L_{2,s},$$

$$L_{3,n+1} = L_{3,n} + \frac{L_{3,f} - L_{3,s}}{N} t, n = \overline{0..N}, L_{3,0} = L_{3,s},$$

$$L_{4,n+1} = L_{4,n} + \frac{L_{4,f} - L_{4,s}}{N} t, n = \overline{0..N}, L_{4,0} = L_{4,s},$$

$$L_{5,n+1} = L_{5,n} + \frac{L_{5,f} - L_{5,s}}{N} t, n = \overline{0..N}, L_{5,0} = L_{5,s},$$

$$L_{6,n+1} = L_{6,n} + \frac{L_{6,f} - L_{6,s}}{N} t, n = \overline{0..N}, L_{6,0} = L_{6,s},$$

где: $L_{i,s}$ – начальное значение обобщенной координаты, $L_{i,f}$ – желаемое значение обобщенной координаты, N – количество точек дискретизации.

В нашем случае, поскольку было принято допущение о том, что в начальном положении основание параллельно подвижной платформе, значение $L_{i,s}$ одинаково для всех обобщенных координат.

Процесс моделирования движения платформы представляет собой итеративное решение прямой задачи кинематики. В данной работе для решения системы нелинейных уравнений будем использовать встроенные методы ломаных доверительных областей среды *MATLAB*.

Одной из проблем, возникающих при решении прямой задачи кинематики для подобного манипулятора, является наличие нескольких решений, что приводит к возможности сходимости численного метода к разным допустимым решениям, о чем подробно говорилось в работах [21, 22]. Для гарантированного обеспечения непрерывной сходимости к единственному решению используем несколько правил:

1) выберем в качестве первого начального условия известное нулевое состояние манипулятора;
2) при моделировании начальными условиями для каждого следующего положения является предыдущее решение;
3) малый шаг приращения длин штанг.

Зная матрицу однородного преобразования, несложно получить координаты центра подвижной платформы (положение манипулятора). Ориентация системы координат подвижной платформы относительно системы координат основания однозначно задается матрицей поворота, которая функционально зависит от углов Эйлера и имеет следующий вид

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Тогда требуемые углы могут быть получены численным решением системы уравнений

$$\begin{cases} \cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma=T_{1,1}, \\ -\cos\alpha\sin\beta=T_{2,3}, \\ \sin\beta\cos\gamma=T_{3,2}, \end{cases}$$

где: $T_{1,1}, T_{2,3}, T_{3,2}$ – элементы матрицы однородного преобразования.

Определим параметры моделей манипулятора следующими значениями. Пусть радиус основания платформы $R=100$, а радиус подвижной платформы $r=50$. Величины, определяющие расстояние от основания и подвижной платформы до осей вращения в соответствующих шарнирах примем равными $h_b=h_{mp}=5$. Поскольку модель с равномерным расположением шарниров является частным случаем модели с парным расположением шарниров, при моделировании примем $\varphi_b=\varphi_{mp}=\dfrac{\pi}{18}$. Следует помнить, что модель платформы Гью-Стюарта типа 6-3 характеризуется $\varphi_{mp}=0$. Начальным положением манипулятора будем считать такое положение, при котором плоскость основания параллельна плоскости подвижной платформы и элементы вектора однородных координат механизма $\mathbf{L}_i=150, i=\overline{1..6}$.

Промоделируем перемещение платформы по нескольким степеням подвижности. Пусть платформе необходимо переместиться в точку с координатами $\begin{pmatrix}20 & 20 & 200\end{pmatrix}$. Результаты моделирования, включающие графики изменения координат центра платформы и углов Эйлера для модели платформы Гью-Стюарта типа 6-3 с парным расположением шарниров, приведены на рис. 6, 7. Изменение положения и ориентации платформы Гью-Стюарта типа 6-6 с парным расположением шарниров отражено на рис. 8 и рис. 9.

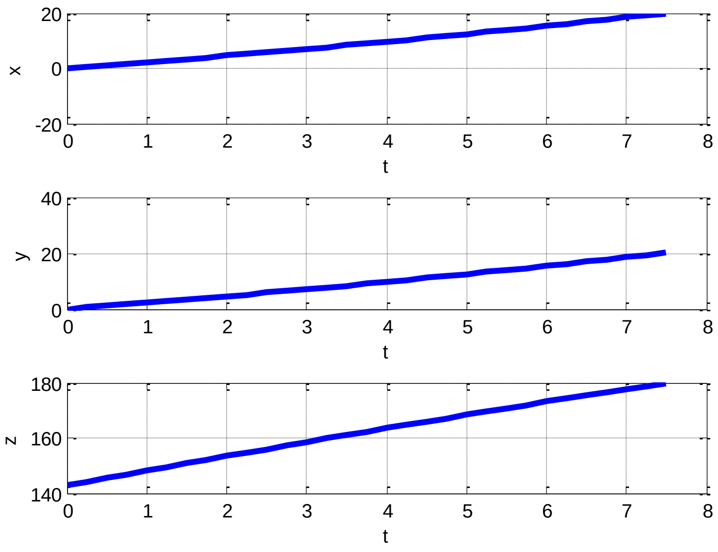

Рис. 6. Изменение координаты центра подвижной платформы для модели типа 6-3

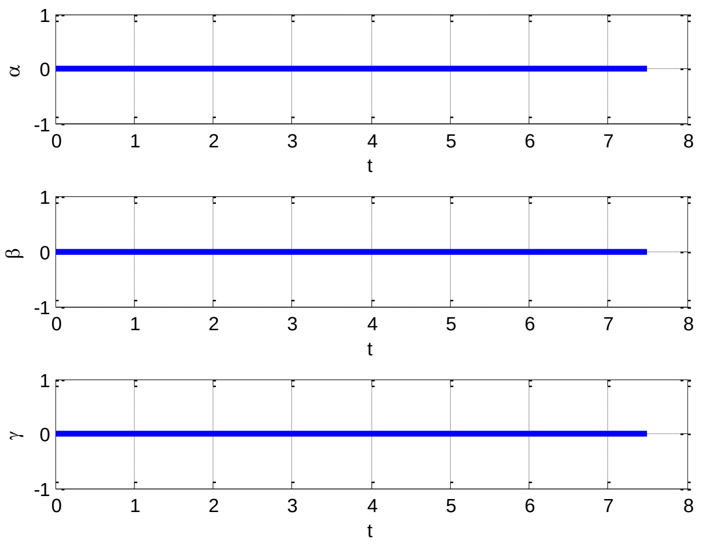

Рис. 7. Изменение ориентации платформы (углов Эйлера) для модели типа 6-3

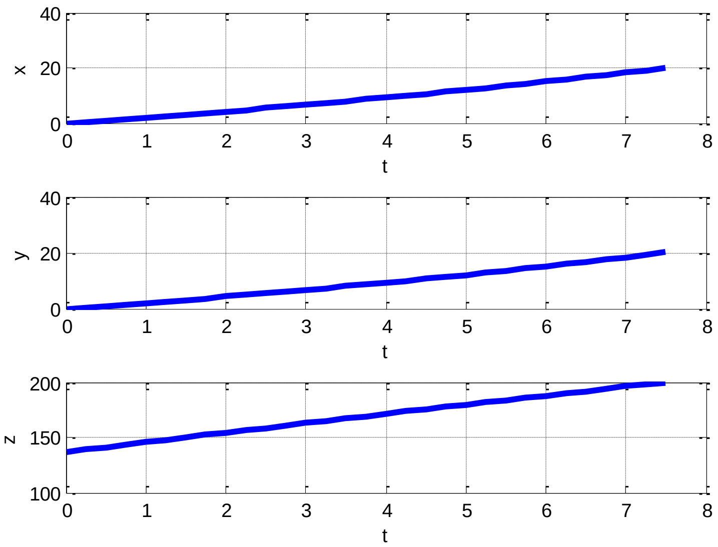

Рис. 8. Изменение координаты центра подвижной платформы для модели типа 6-6

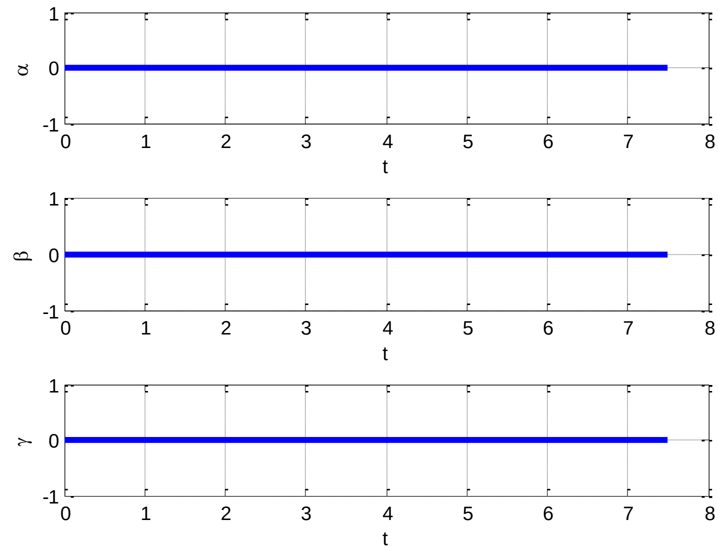

Рис. 9. Изменение ориентации платформы (углов Эйлера) для модели типа 6-6

Очевидно, что при линейном изменении обобщенных координат изменение положения и ориентации манипулятора Гью-Стюарта типа также носит линейный характер, что не противоречит результатам, полученным в [20]. Следует отметить, что при равных начальных значениях обобщенных координат модели характеризуются разным начальным положением центра платформы. Данный факт наглядно продемонстрирован на рис. 6 и 8.

Заключение

В работе проведено обобщение существующих моделей платформенных манипуляторов параллельной кинематики с шестью степенями свободы и дополнение их новыми параметрами, которые, во-первых, позволили унифицировать процесс решения различных задач кинематики для данного класса манипуляторов, во-вторых, позволили расширить функциональность моделей и увеличить точность получаемого решения. Были внесены изменения в ранее предложенный метод решения прямой задачи кинематики, в результате которых применимость метода распространена на весь класс пространственных манипуляторов с шестью степенями свободы. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность применяемых моделей и предложенного метода.

В развитии работы планируется создание новых методик и подходов, позволяющих распространить методы решения кинематических задач на случай многосекционных манипуляторов.

Список литературы

1. Merlet J.P. Parallel Robots. Springer Netherlands, 2006. 406 p. (Ser. Solid Mechanics and Its Applications; vol. 128.). DOI: 10.1007/1-4020-4133-0
2. Каганов Ю.Т., Карпенко А.П. Математическое моделирование кинематики и динамики робота-манипулятора типа «хобот». 1. Математические модели секции манипулятора, как механизма параллельной кинематики типа «трипод» // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2009. № 10. Режим доступа: http://technomag.edu.ru/doc/133262.html (дата обращения 15.09.2014).
3. Каганов Ю.Т., Карпенко А.П. Математическое моделирование кинематики и динамики робота-манипулятора типа «хобот». 2. Математические модели секции манипулятора, как механизма параллельной кинематики типа «гексапод» // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2009. № 11. Режим доступа: http://technomag.edu.ru/doc/133731.html (дата обращения 15.09.2014).
4. Волкоморов С.В., Карпенко А.П. Геометрия многосекционного манипулятора типа «хобот» // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2010. № 12. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/163391.html (дата обращения 15.09.2014).
5. Карпенко А.П., Шмонин А.М. Исследование динамики многосекционного манипулятора типа «хобот» // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2010. № 9. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/157912.html (дата обращения 15.09.2014).

6. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. М.: Наука, 1991. 94 с.
7. Янг Д., Ли Т. Исследование кинематики манипуляторов платформенного типа // Конструирование. 1984. Т. 106, № 2. С. 264-272. [Yang D.C., Lee T.W. Feasibility Study of a Platform Type of Robotic Manipulators from a Kinematic Viewpoint // Transactions of ASME Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in Design. 1984. Vol. 106, no. 2. P. 191-198. DOI: 10.1115/1.3258578].
8. Лапиков А.Л., Пащенко В.Н. Математическая модель платформенного манипулятора Гью–Стюарта // Всероссийская научно-техническая конференция «Наукоемкие технологии в приборо- и машиностроении и развитие инновационной деятельности в вузе» (Москва, 10-12 декабря 2013 г.): матер. Т. 2. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. С. 144-156.
9. Cruz P., Ferreira R., Sequeira J.S. Kinematic modeling of Stewart-Gough platforms // Proc. of the 2nd International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2005). 14-15 September, 2005, Barcelona, Spain. 2005. P. 93-99. Режим доступа: http://users.isr.ist.utl.pt/~ricardo/publications/icinco2005.pdf (дата обращения 15.09.2014).
10. Lee T.-Y. , Shim J.-K. Elimination-Based Solution Method for the Forward Kinematics of the General Stewart-Gough Platform // Proceedings of the 2nd Workshop on Computational Kinematics. 2001. P. 259-267. Режим доступа: http://www-sop.inria.fr/coprin/EJCK/Vol1-1/24_Lee_Shi.pdf (дата обращения 15.09.2014).
11. Lee T.-Y. , Shim J.-K. Algebraic Elimination-Based Real-Time Forward Kinematics of the 6-6 Stewart Platform with Planar Base and Platform // Proceedings of the 2001 ICRA – IEEE International Conference on Robotics and Automation. Vol. 2. IEEE, 2001. P. 1301-1306. DOI: 10.1109/ROBOT.2001.932790
12. Bonev I.A., Ryu J. A new method for solving the direct kinematics of general 6-6 Stewart Platforms using three linear extra sensors // Mechanism and Machine Theory. 2000. Vol. 35, no. 3. P. 423-436.
13. Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S. A Canonical Formulation of the Direct Position Kinematics Problem for a General 6-6 Stewart Platform // Mechanism and Machine Theory. 1994. Vol. 29, no. 6. P. 819-827.
14. Wang Q. Closed form direct kinematics of a class of Stewart platform // Proc. of the 15th Triennial World Congress. Barcelona, Spain, 2002. Режим доступа: http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/prost/proceedings/ifac2002/data/content/00906/906.pdf (дата обращения 15.09.2014).
15. Song S.-K. , Kwon D.-S. New Direct Kinematic Formulation of 6 D.O.F Stewart-Gough Platforms Using the Tetrahedron Approach // Transactions on Control, Automation and Systems Engineering. 2002. Vol. 4, no.3. P. 217-223.
16. Zarkandi S., Esmaili M.R. Direct position kinematics of a three revolute-prismatic-spherical parallel manipulator // IJRRAS. 2011. Vol. 7, no. 1. P. 88-95. Режим доступа:

http://www.arpapress.com/Volumes/Vol7Issue1/IJRRAS_7_1_13.pdf (дата обращения 15.09.2014).

17. Husty M.L. An Algorithm for Solving the Direct Kinematics of General Stewart-Gough Platforms // Mechanism and Machine Theory. 1996. Vol. 31, no. 4. P. 365-380.
18. Лапиков А.Л., Пащенко В.Н. Решение прямой задачи кинематики для платформы Гью-Стюарта с использованием аналитического уравнения плоскости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 4. С. 124-134. DOI: 10.7463/0414.0706936
19. Лапиков А.Л. Исследование применимости метода решения прямой задачи кинематики для манипулятора Гью-Стюарта типа 6-6 // Региональная научно-техническая конференция «Наукоемкие технологии в приборо- и машиностроении и развитие инновационной деятельности в вузе» (Москва, 22-25 апреля 2014 г.): матер. Т. 1. М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2014. С. 218-227.
20. Лапиков А.Л., Масюк В.М. Моделирование движения платформы Гью-Стюарта при линейной аппроксимации закона изменения обобщенных координат // Евразийский Союз Ученых (ЕСУ). 2014. № 4, ч. 5. С. 106-109.
21. Лапиков А.Л., Масюк В.М., Сакович О.В., Демин П.М., Пащенко В.Н. Анализ решения прямой задачи кинематики пространственного манипулятора Гью-Стюарта типа 6-3 // Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины: сб. науч. ст. В 2 ч. Ч. 2. Курск: Юго-Зап. гос. ун-т., 2014. С. 139-144.
22. Dietmaier P. The Stewart-Gough Platform of General Geometry can have 40 Real Postures // In: Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control. Springer Netherlands, 1998. P. 1-10. DOI: 10.1007/978-94-015-9064-8_1

.

Science&Education of the Bauman MSTU
Electronic journal
ISSN 1994-0448

Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 11, pp. 72–94.

DOI: **10.7463/1114.0735505**

Received: 04.11.2014

Modification of Method for Solution of Direct Kinematic Problem for the Type of Platform Manipulators with Six Degrees of Freedom

A.L. Lapikov[1,*], V.N. Paschenko[1], V.M. Masyuk[1]

[*] anton.lapikov@inbox.ru

[1] Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, Russia

Keywords: parallel kinematics manipulators, Stewart platform, hexapod, direct kinematic problem, mathematical model

This paper considers creation of methods for research of multi-section manipulators of parallel structure. To solve this task it is necessary, firstly, to carry out generalization, systematization, and enhancement of existing models of platform manipulators with six degrees of freedom; secondly, it is necessary to modify previously suggested methods for solving the kinematic tasks for the specified type of manipulation mechanisms. The paper presents detailed domain analysis, describes major issues appearing in the course of research, and suggests basic methods of their solution. The paper demonstrates the necessity for modification of existing models through supplementing new parameters. Modification and generalization of the previously suggested method for solution of direct kinematic problem for the specified type of manipulators were carried out. Method for solution of this problem consists in establishing the dependence of functional relationship of Cartesian coordinates and orientation of the moving platform center on the values of generalized coordinates of manipulator (in case of platform manipulators, these are the lengths of telescopic legs connecting the base and the moving platform of the manipulator). The method is created in such a way that solution of direct kinematic problem results in finding of the analytical equation of the plane where the moving platform lies. The equation of the required plane is described through three points (attachment points of the moving platform joints). To define coordinate values of the joints, the system of nine non-linear equations is generated. It should be noted that the system of equations is composed of one-type equations with the same type of nonlinearity. The physical meaning of all the nine equations of the system is Euclidean distance between the points of the manipulator. The location and orientation of the manipulator are depicted as a homogenous transformation matrix. Vectors of translation and rotation for this matrix can be defined through required plane. The theory was verified with the outcome of the experiment.

It is planned to create new methods and approaches, which allow us to spread the methods for solution of kinematic problems on the type of multi-section manipulators.

References

1. Merlet J.P. *Parallel Robots*. Springer Netherlands, 2006. 406 p. (Ser. *Solid Mechanics and Its Applications*; vol. 128.). DOI: 10.1007/1-4020-4133-0
2. Kaganov Yu.T., Karpenko A.P. Kinematics and dynamics mathematical modeling of a "trunk" robot-manipulator. 1. Mathematical models of the manipulator section as the type "thripod" parallel mechanism. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2009, no. 10. Available at: http://technomag.edu.ru/doc/133262.html , accessed 15.09.2014. (in Russian).
3. Kaganov Yu.T., Karpenko A.P. Kinematics and dynamics mathematical modeling of a "trunk" robot-manipulator. 2. Mathematical models of the manipulator section as the type "hexapod" parallel mechanism. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2009, no. 11. Available at: http://technomag.edu.ru/doc/133731.html , accessed 15.09.2014. (in Russian).
4. Volkomorov S.V., Karpenko A.P. Geometry of multisectional "trunk" manipulator. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2010, no. 12. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/163391.html , accessed 15.09.2014. (in Russian).
5. Karpenko A.P., Shmonin A.M. Dynamics research of a multi-section trunk robot-manipulator. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2010, no. 9. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/157912.html , accessed 15.09.2014. (in Russian).
6. Glazunov V.A., Koliskor A.Sh., Kraynev A.F. *Prostranstvennye mekhanizmy parallel'noy struktury* [Spatial Parallel Structure Mechanisms]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 94 p. (in Russian).
7. Yang D.C., Lee T.W. Feasibility Study of a Platform Type of Robotic Manipulators from a Kinematic Viewpoint. *Transactions of ASME Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in Design*, 1984, vol. 106, iss. 2, pp. 191-198. DOI: 10.1115/1.3258578
8. Lapikov A.L., Pashchenko V.N. Mathematical model of Stewart-Gough platform manipulator. *Vserossiyskaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya "Naukoemkie tekhnologii v priboro- i mashinostroenii i razvitie innovatsionnoy deyatel'nosti v vuze": mater*. [All-Russian Scientific and Technical Conference "High technologies in instrument-making engineering and mechanical engineering, and the development of innovation activities in high

school”], Moscow, 10-12 December, 2013. Vol. 2. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2013, pp. 144-156. (in Russian).

9. Cruz P., Ferreira R., Sequeira J.S. Kinematic modeling of Stewart-Gough platforms. *Proc. of the 2nd International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2005)*, 14-15 September, 2005, Barcelona, Spain. 2005, pp. 93-99. Available at: http://users.isr.ist.utl.pt/~ricardo/publications/icinco2005.pdf , accessed 15.09.2014.
10. Lee T.-Y. , Shim J.-K. Elimination-Based Solution Method for the Forward Kinematics of the General Stewart-Gough Platform. *Proceedings of the 2nd Workshop on Computational Kinematics*, May 20-22, 2001, pp. 259-267. Available at: http://www-sop.inria.fr/coprin/EJCK/Vol1-1/24_Lee_Shi.pdf , accessed 15.09.2014.
11. Lee T.-Y. , Shim J.-K. Algebraic Elimination-Based Real-Time Forward Kinematics of the 6-6 Stewart Platform with Planar Base and Platform. *Proceedings of the 2001 ICRA – IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Vol. 2. IEEE, 2001, pp. 1301-1306. DOI: 10.1109/ROBOT.2001.932790
12. Bonev I.A., Ryu J. A new method for solving the direct kinematics of general 6-6 Stewart Platforms using three linear extra sensors. *Mechanism and Machine Theory*, 2000, vol. 35, no. 3, pp. 423-436.
13. Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S. A Canonical Formulation of the Direct Position Kinematics Problem for a General 6-6 Stewart Platform. *Mechanism and Machine Theory*, 1994, vol. 29, no. 6, pp. 819-827.
14. Wang Q. Closed form direct kinematics of a class of Stewart platform. *Proc. of the 15th Triennial World Congress*, Barcelona, Spain, 2002. Available at: http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/prost/proceedings/ifac2002/data/content/00906/906.pdf , accessed 15.09.2014.
15. Song S.-K. , Kwon D.-S. New Direct Kinematic Formulation of 6 D.O.F Stewart-Gough Platforms Using the Tetrahedron Approach. *Transactions on Control, Automation and Systems Engineering*, 2002, vol. 4, no.3, pp. 217-223.
16. Zarkandi S., Esmaili M.R. Direct position kinematics of a three revolute-prismatic-spherical parallel manipulator. *IJRRAS*, 2011, vol. 7, no. 1, pp. 88-95. Available at: http://www.arpapress.com/Volumes/Vol7Issue1/IJRRAS_7_1_13.pdf , accessed 15.09.2014.
17. Husty M.L. An Algorithm for Solving the Direct Kinematics of General Stewart-Gough Platforms. *Mechanism and Machine Theory*, 1996, vol. 31, no. 4, pp. 365-380.
18. Lapikov A.L., Pashchenko V.N. Solution of direct kinematic problem for Stewart-Gough platform with the use of analytical equation of plane. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E.*

Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU, 2014, no. 4, pp. 124-134. DOI: 10.7463/0414.0706936 (in Russian).

19. Lapikov A.L. The study of applicability of the method for solving the direct kinematics problem for Stewart-Gough manipulator of the type 6-3. *Regional'naya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya "Naukoemkie tekhnologii v priboro- i mashinostroenii i razvitie innovatsionnoy deyatel'nosti v vuze": mater.* [Proc. of the Regional Scientific and Technical Conference "High technologies in instrument-making engineering and mechanical engineering, and the development of innovation activities in high school"]. Moscow, 22-25 April 2014. Vol. 1. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2014, pp. 218-227. (in Russian).
20. Lapikov A.L., Masyuk V.M. Motion simulation of Stewart-Gough platform when linear approximation of the law of change of generalized coordinates. *Evraziyskiy Soyuz Uchenykh (ESU)*, 2014, no. 4, part 5, pp. 106-109. (in Russian).
21. Lapikov A.L., Masyuk V.M., Sakovich O.V., Demin P.M., Pashchenko V.N. Analysis of solution of direct kinematic problem for Stewart-Gough spatial manipulator of the type 6-3.*Vibratsionnye tekhnologii, mekhatronika i upravlyaemye mashiny: sb. nauch. St. V 2 ch. Ch. 2* [Vibration technology, mechatronics and managed machine: collected scientific articles. In 2 pts. Pt. 2]. Kursk, Southwest State University Publ., 2014, pp. 139-144. (in Russian).
22. Dietmaier P. The Stewart-Gough Platform of General Geometry can have 40 Real Postures. In: *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control*. Springer Netherlands, 1998, pp. 1-10. DOI: 10.1007/978-94-015-9064-8_1