

УДК 533.6.011.55 : 532.517.2

**Применение аналитической зависимости давления повышенной точности для
расчета тепловых потоков на поверхности затупленных тел, обтекаемых
сверхзвуковым потоком газа**

***Богданов И.О.**, студент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Аэрокосмический факультет, кафедра «Вычислительная математика и
математическая физика»*

*Научный руководитель: Котенев В.П., к.т.н, профессор
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
bauman@bmstu.ru*

Введение

При конструировании летательных аппаратов (ЛА) большое внимание уделяется исследованию течения газа около их поверхности. Для построения математических моделей обтекания сложных конфигураций и получения новых гидродинамических свойств нередко применяются экспериментальные исследования, которые сопряжены с массой сложностей, таких как использованием дорогостоящих моделей, большими временными затратами, влиянием конструкции аэродинамической трубы на результаты измерений, большими погрешностями и т.д. Таким образом, в настоящее время актуальна задача построения метода расчета газодинамических параметров, который позволил бы с высокой степенью точности и в простой аналитической форме описывать процесс обтекания различных тел вращения.

В рамках данной работы представлен метод расчета распределения величины теплопередачи q_x в произвольной точке криволинейной поверхности вращения, отнесенной к тепловому потоку q_0 в точке полного торможения. В основе указанного метода лежит применение универсальной формулы давления повышенной точности, рассмотренной в работе [1]. Приводится сравнение полученных результатов с численным решением уравнений Навье-Стокса, распределением тепловых потоков, определенных с помощью теории Ньютона, и с аналитическими зависимостями, представленными в работах [4] и [5].

Построение математической модели

Рассмотрим функцию

$$\frac{q_x}{q_0} = F(x) \sqrt{\frac{V_\infty}{2\tilde{\lambda}}}, \quad (1)$$

где

$$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{p_\delta}{p'_0} \frac{V_\delta}{V_\infty} r_0 \left(\int_0^x \frac{p_\delta}{p'_0} \frac{V_\delta}{V_\infty} r_0^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

введенную в работе [2]. В формулах (1)-(2) q_x/q_0 – величина теплопередачи в

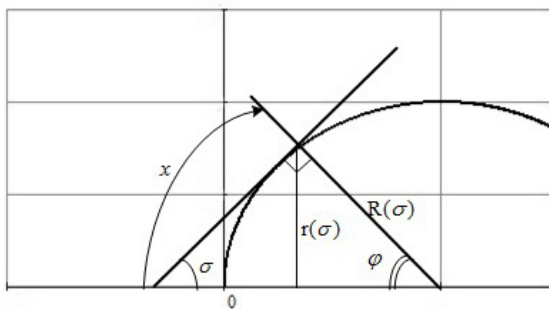


Рис. 1. Осесимметричное тело и введенная для него система координат

произвольной точке поверхности отнесенная

к величине теплового потока в точке полного торможения (см. рис. 1), V_∞ –

скорость набегающего потока, p'_0 –

давление на внешней границе пограничного слоя у точки полного торможения

затупленной поверхности, p_δ и V_δ –

давление и скорость в произвольной точке

на внешней границе пограничного слоя, $\tilde{\lambda} = dV_\delta/dx$ – градиент скорости вблизи точки полного торможения, r_0 – уравнение поверхности тела, x – криволинейная координата, выражающая длину дуги вдоль контура тела.

Из (2) видно, что для расчета (1) необходимо знать распределение давления и скоростей на всем участке между интересующей точкой и точкой полного торможения.

Далее вычисление безразмерной величины q_x/q_0 будем рассматривать на основе универсальной формулы давления [1]

$$P(\sigma) \equiv \frac{p_\delta}{p'_0} = \left[\frac{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+3} \left(\frac{\pi/2 - \sigma}{\pi/2 - \sigma_*} \right)^2}{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+3} \left(\frac{\pi/2 - \sigma}{\pi/2 - \sigma_*} \right)^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (3)$$

где σ – угол между касательной к контуру тела в рассматриваемой точке и направлением вектора скорости набегающего потока, σ_* – угол, определяющий положение звуковой

точки на поверхности тела, $\gamma=1,4$ – показатель адиабаты. Вместо формулы (3) может быть использована аналитическая зависимость давления из теории Ньютона

$$\frac{p_{\delta}}{p_0'} = \sin^2 \sigma + \frac{p_{\infty}}{p_0'} \cos^2 \sigma, \quad (4)$$

где p_0'/p_{∞} вычисляется по формуле Рэлея

$$\frac{p_0'}{p_{\infty}} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} M_{\infty}^2 \left(\gamma - \frac{\gamma-1}{2M_{\infty}^2} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (5)$$

Представим величину V_{δ}/V_{∞} в виде:

$$V(\sigma) \equiv \frac{V_{\delta}}{V_{\infty}} = \frac{V_{\delta}}{V_{\max}} \frac{V_{\max}}{V_{\infty}}. \quad (6)$$

$V_{\delta}/V_{\max}$ вычисляется по формуле

$$V_1(\sigma) \equiv \frac{V_{\delta}}{V_{\max}} = \sqrt{1 - \left(\frac{p_{\delta}}{p_0'} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}. \quad (7)$$

$V_{\max}/V_{\infty}$ можно найти из системы:

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{\gamma M_{\infty}^2}{2} = \frac{V_{\max}^2}{2}, \\ \frac{V_{\infty}^2}{2} = \frac{\gamma M_{\infty}^2}{2}. \end{cases} \quad (8)$$

Первое из уравнений (8) дает представление безразмерной величины, стоящей в правой части уравнения Бернулли, а второе – выражение для соответствующей безразмерной скорости. Искомая функция принимает вид

$$V_2 \equiv \frac{V_{\max}}{V_{\infty}} = \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_{\infty}^2}}. \quad (9)$$

В результате (6) можно представить в виде

$$V(\sigma) = V_1(\sigma)V_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{p_{\delta}}{p_0'} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_{\infty}^2}}. \quad (10)$$

Интеграл из (2) преобразуется к виду

$$\int_0^x \frac{p_\delta}{p'_0} \frac{V_\delta}{V_\infty} r_0^2 dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^\sigma \frac{p_\delta}{p'_0} \frac{V_\delta}{V_\infty} r_0^2 R(\sigma) d\sigma, \quad (11)$$

где учтено, что $dx = R(\sigma)d\sigma$, где $R(\sigma)$ – радиус кривизны поверхности.

В результате (2) приводится к виду

$$F(\sigma) = \frac{\sqrt{2}}{2} P(\sigma) V(\sigma) r_0 \left(- \int_{\frac{\pi}{2}}^\sigma P(\sigma) V(\sigma) r_0^2 R(\sigma) d\sigma \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Градиент скорости вблизи точки полного торможения $\tilde{\lambda} = dV_\delta/dx$ с учетом (7) можно выразить следующим образом:

$$\tilde{\lambda} = \frac{dV_\delta}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{V_{\max} d \frac{V_\delta}{V_{\max}}}{-R(\sigma) d\sigma} \Big|_{\sigma=\frac{\pi}{2}} = - \frac{V_{\max}}{R\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{dV_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{d\sigma}. \quad (13)$$

Подставив (13) в (1), получаем

$$Q(\sigma) \equiv \frac{q_x}{q_0} = F(\sigma) \sqrt{-\frac{V_\infty}{2 \frac{V_{\max}}{R\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{dV_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{d\sigma}}} = F(\sigma) \sqrt{-\frac{R\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2 \frac{V_{\max}}{V_\infty} \frac{dV_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{d\sigma}}},$$

откуда, учитывая выражение (9), приходим к итоговой формуле для расчета распределения величины теплопередачи в произвольной точке поверхности отнесенной к тепловому потоку в точке полного торможения:

$$Q(\sigma) \equiv \frac{q_x}{q_0} = F(\sigma) \sqrt{-\frac{R\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2 V_2 \frac{dV_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{d\sigma}}}. \quad (14)$$

В данной работе в качестве осесимметричных тел рассматриваются сфера единичного радиуса и эллипсы с отношением полуосей $b=0,5$ и $b=1,5$. Их уравнения, соответственно, имеют вид:

$$(z-1)^2 + r_0^2(z) = 1, \quad (15)$$

$$(z-1)^2 + \frac{r_0^2(z)}{b^2} = 1. \quad (16)$$

Эти уравнения можно переписать в виде функций угла σ :

$$r_0(\sigma) = \cos \sigma, \quad (17)$$

$$r_0(\sigma) = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + \operatorname{tg}^2(\sigma)}} \quad (18)$$

Радиус кривизны $R(\sigma)$ для эллипсоида определяется из соотношения

$$R(\sigma) = b^2 \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2(\sigma)}{b^2 + \operatorname{tg}^2(\sigma)} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (19)$$

Очевидно, что для сферы $b = 1$ и $R(\sigma) \equiv 1$ для любого угла σ .

Результаты

Сравнение результатов расчета распределения величины q/q_0 для сферической поверхности с численным решением уравнений Навье-Стокса представлены на рис. 2-3, для эллиптической – на рис. 4-5. На приведенных зависимостях графики 1 получены на основе формулы (14), графики 2 описывают изменение отношения удельных тепловых потоков для рассмотренного в данной работе метода с той лишь разницей, что вместо универсальной формулы (3) используется формула Ньютона (4), в которой p'_0/p_∞ вычисляется по (5). Графики 3 представляют собой численное решение уравнений Навье-Стокса.

Сравнение результатов расчета распределения величины q/q_0 для сферической поверхности с методом работы [4] представлены на рис. 6-7, для эллиптической – на рис. 8-9. На данных рисунках графики 1, 2 имеют тот же смысл, что на рис. 2-5, а график 3 представляет собой распределение величины q/q_0 , полученное в [4]. Отметим также, что температура стенки сферического тела во всех случаях равнялась $T_w = 0,25$, а эллиптического – $T_w = 0,16$.

Из приведенных результатов видно, что описанный метод дает удовлетворительное согласование с численным решением уравнений Навье-Стокса практически во всем диапазоне изменения угла σ для сферической поверхности и параметра S для эллиптической. Кроме того, из графиков видно, что применение теории Ньютона для расчета распределения отношения удельных тепловых потоков на осесимметричных телах дает наихудшую аппроксимацию.

На рис. 10 представлено сравнение графика функции (14) для эллипсоида с отношением полуосей $b=1,5$, полученной на основе универсальной формулы (3) (кривая 1) и теории Ньютона (кривая 2) с численным решением уравнений Навье-Стокса для стенки с температурой $T_w=0,238$ (кривая 3) и $T_w=0,8$ (кривая 4). Так же на данном рисунке представлены результаты работы [5]: кривая 5 для стенки с температурой $T_w=0,238$ и кривая 6 – для $T_w=0,8$. Все графики построены для случая $M=4$. Из сопоставления результатов видно, что описанный приближенный метод расчета распределения величины теплопередачи q/q_0 дает наиболее точное соответствие с численным решением при более нагретой стенке. В этом случае график функции (14) практически совпадает с численным решением уравнений Навье-Стокса в окрестности точки $S=2$. Аналитические решения из работы [5] имеют большие отличия от численного решения как для горячей, так и для холодной стенки.

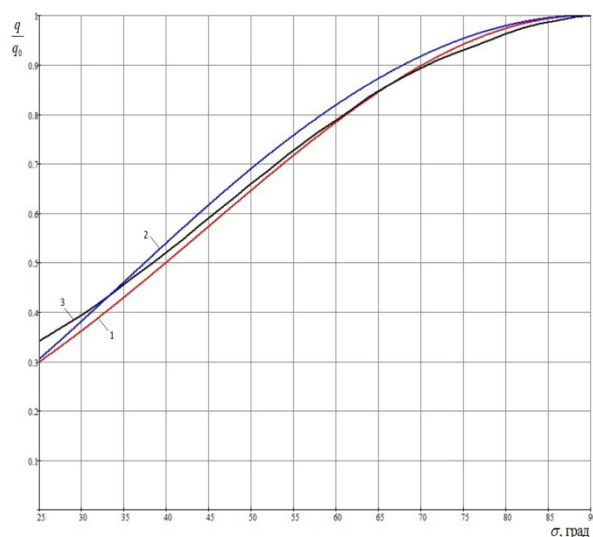


Рис. 2. Сравнение изменения отношения удельных тепловых потоков для сферической поверхности при числе Маха $M = 4,11$ и температуре стенки $T_w = 0,25$ с численным решением уравнений Навье-Стокса

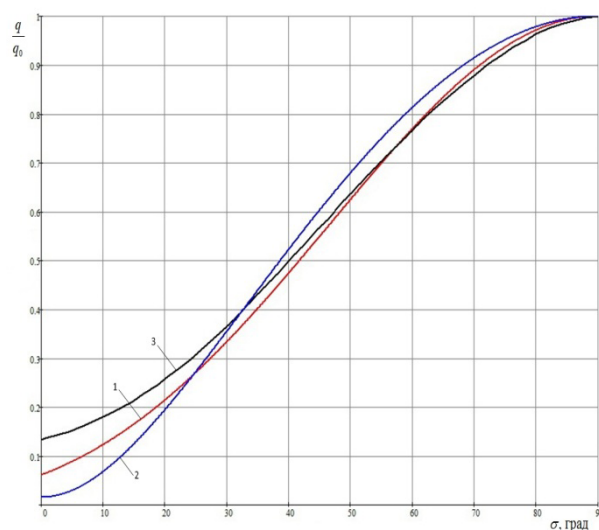


Рис. 3. Сравнение изменения отношения удельных тепловых потоков для сферической поверхности при числе Маха $M = 10$ и температуре стенки $T_w = 0,25$ с численным решением уравнений Навье-Стокса

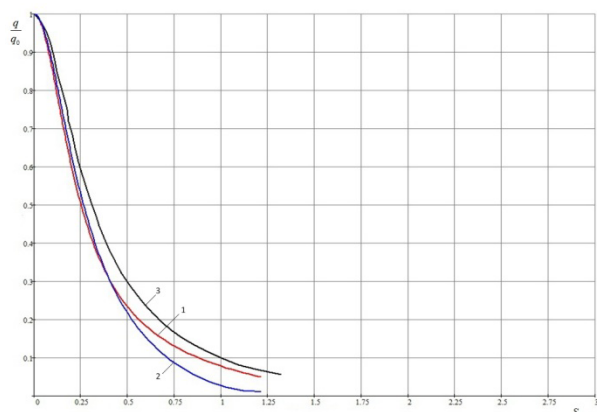


Рис. 4. Сравнение изменения отношения удельных тепловых потоков для эллиптической поверхности с отношением полуосей $b = 0,5$ при числе Маха $M = 10$ и температуре стенки $T_w = 0,16$ с численным решением уравнений Навье-Стокса

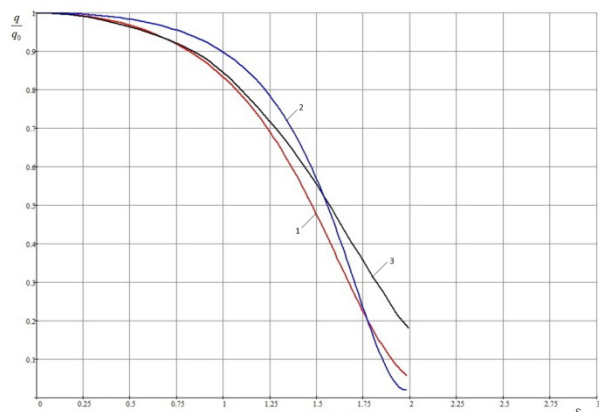


Рис. 5. Сравнение изменения отношения удельных тепловых потоков для эллиптической поверхности с отношением полуосей $b = 1,5$ при числе Маха $M = 10$ и температуре стенки $T_w = 0,16$ с численным решением уравнений Навье-Стокса

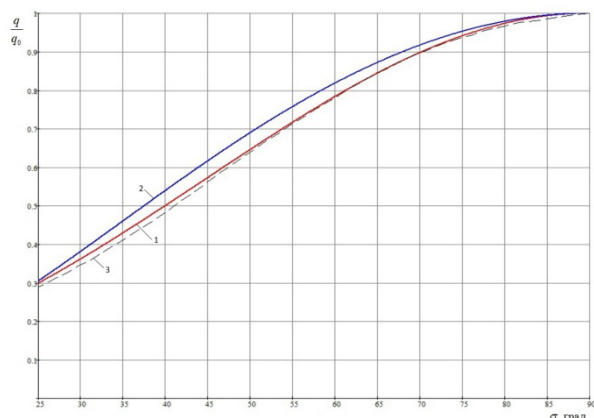


Рис. 6. Сравнение изменения отношения удельных тепловых потоков для сферической поверхности при числе Маха $M = 4,11$ и температуре стенки $T_w = 0,25$ с результатами из [4]

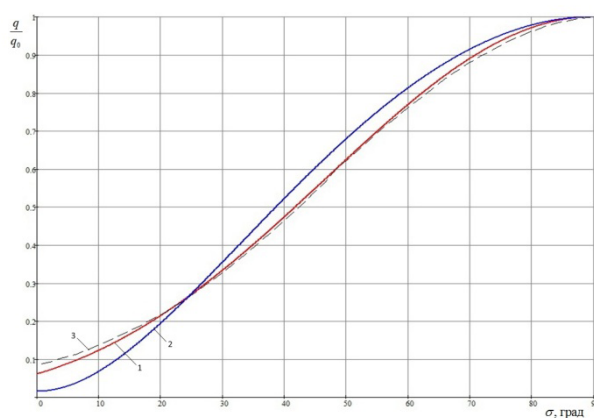


Рис. 7. Сравнение изменения отношения удельных тепловых потоков для сферической поверхности при числе Маха $M = 10$ и температуре стенки $T_w = 0,25$ с результатами из [4]

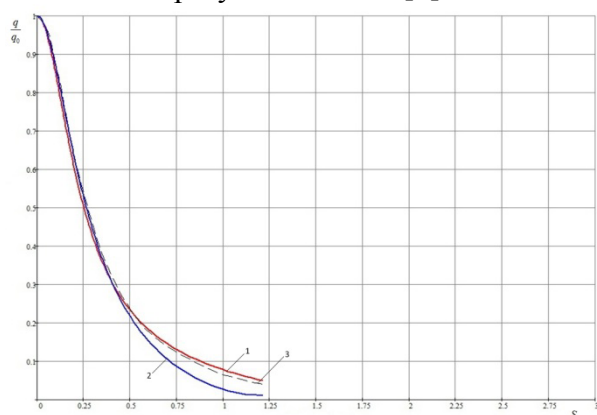


Рис. 8. Сравнение изменения отношения удельных тепловых потоков для эллиптической поверхности с отношением полуосей $b = 0,5$ при числе Маха $M = 10$ и температуре стенки $T_w = 0,16$ с результатами из [4]

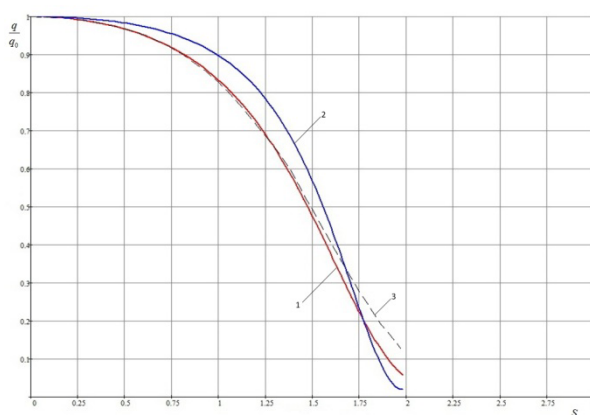


Рис. 9. Сравнение изменения отношения удельных тепловых потоков для эллиптической поверхности с отношением полуосей $b = 1,5$ при числе Маха $M = 10$ и температуре стенки $T_w = 0,16$ с результатами из [4]

Выводы

В рамках данной работы был рассмотрен метод расчета тепловых потоков на поверхности затупленных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Была получена аналитическая зависимость для величины теплопередачи в произвольной точке поверхности, отнесенная к величине теплового потока в точке полного торможения тела вращения. Расчет основывался на применении универсальной формулы давления повышенной точности из работы [1], благодаря чему удалось снизить погрешности определения тепловых потоков в областях, где угол между касательной к контуру тела в рассматриваемой точке и направлением вектора скорости набегающего потока принимает

малые ($< 30^\circ$) значения. Точность счета в указанных областях играет важное значение, поскольку поверхность тела, расположенная в сверхзвуковой части потока газа, испытывает значительные тепловые нагрузки.

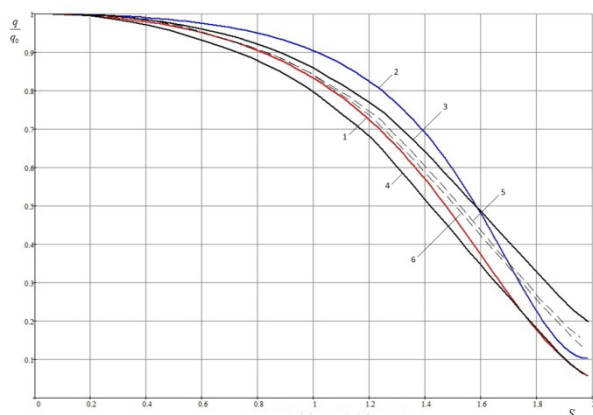


Рис. 10. Изменение отношения удельных тепловых потоков для эллиптической поверхности с отношением полуосей $b=1,5$ при числе Маха $M=4$ и температуре стенки $T_w=0,238$ для графиков 3, 5 и $T_w=0,8$ для графиков 4, 6

Было произведено сравнение полученных аналитических зависимостей с численным решением уравнений Навье-Стокса для случая сферы с температурой стенки $T_w=0,25$ и эллипсоидов с температурой стенки $T_w=0,16$ и отношением полуосей 0,5 и 1,5, в результате чего рассматриваемый метод дал неплохое согласование с численными результатами.

Также произведено сравнение аналитической зависимости, построенной на основе теории Ньютона, с численным решением уравнений Навье-Стокса. Оказалось, что теория Ньютона дает худшую в сравнении с предыдущим случаем аппроксимацию численного решения.

Кроме того, было рассмотрено сравнение предложенного метода с результатами работ [4] и [5]. Оба подхода оказались в целом сопоставимы по точности, причем было показано, что полученная в данной работе формула дает наилучшую аппроксимацию при достаточно горячей стенке для случая эллипсоида с отношением полуосей 1,5.

Список литературы

1. Котенев В.П., Сысенко В.А. Аналитические формулы повышенной точности для расчета распределения давления на поверхности выпуклых, затупленных тел вращения произвольного очертания // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 15-24.
2. Краснов Н.Ф., Захарченко В.Ф., Кошевой В.Н. Основы аэродинамического расчета. М.: Высшая школа, 1984. 264 с.
3. Котенев В.П. Определение положения звуковой точки на поверхности затупленного тела // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. вып. «Математическое моделирование». С. 150–153.

4. Брыкина И.Г. Методы расчета теплопередачи и трения при пространственном гиперзвуковом ламинарном обтекании тел во всем диапазоне чисел Рейнольдса: автореф. дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. М., 2013. 38 с.
5. Брыкина И.Г., Сахаров В.И. Сравнение приближенных аналитических и численных решений для тепловых потоков при сверхзвуковом обтекании тел вязким газом // Механика жидкости и газа. 1996. № 1. С. 125–132.
6. Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 330 с.